中学生实用解题辞典

（平面几何部分）

中学生实用解题辞典

（平面几何部分）

中学生实用解题辞典
（平面几何部分）
吕 品 主编

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 朝阳新华印刷厂印刷

字数：650,000 开本：787×1092 1/32 印张：20 插页：4
印数：1—11,837
1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

责任编辑：俞晓群 责任校对：理 于晓 晶
封面设计：谭成荫 插 图：潘智倩 韩 梅 赵 军

ISBN 7-5382-0487-3 / Z·16
定 价：4.75 元

《中学生实用解题辞典》编辑委员会

（按姓氏笔画为序）

马忠林　　王鸿钧　　方嘉琳　　李翼忠　　余元希

郭大钧　　梁宗巨　　曹才翰　　魏庚人

平面几何部分

主　　编　吕　品

编写人员　刚铁滨　　高喜龙　　许香衷　　侯桂殿

审校人员　宋殿祯　　高文生　　苏健一

凡　　例

一、本辞典的公理体系均按人民教育出版社（1983年11月第1版，初级中学课本《几何》第一册、第二册为准。

二、本辞典共收集二千零三十六题。题目的选择遵循精选的原则，考虑到中学生的实际水平。题目的解答力求规范、简捷。

三、解题部分的知识分类编排，参照了中学平面几何教学的程序，便于学生查阅。

四、附录中给出了本辞典以涉及的重要概念、公式和定理。

编　　者

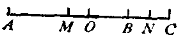
1987年1月

目　录

第一章 直线、相交线和平行线(1—142)

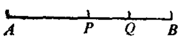
§1 直线、相交线 (1—30)

1．若B点在线段AC上，且M为AB的中点，N为BC的中点，O是AC的中点，则 $MN=OC$。



【解】 因为 $BN=BC/2$，$BM=AB/2$，所以 $MN=BM+BN=(AB+BC)/2=AC/2$。又 $OC=AC/2$，故$MN=OC$。

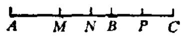
2．若P为线段AB的中点，Q为 PB 上的一点，则$2PQ=AQ-BQ$。



【解】 因为 $AQ=AP+PQ$，$BQ=PB-PQ$，$AP=PB$，所以 $AQ-BQ=AP+PQ-(PB-PQ)=2PQ$、即$2PQ=AQ-BQ$。

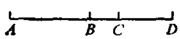
3．若点B在线段 AC上，M是AB的中点，N是 AC 的中点，P是 BC 的中点，则 $MN=BC/2$；$MP=AC/2$；$NP=AB/2$。

【解】 因为 $AM=BM=AB/2$，$AN=CN=AC/2$，$BP=CP=BC/2$，所以 $MN=AN-AM=(AC-AB)/2=BC/2$，$MP=BM+BP=(AB+BC)/2=AC/2$，$NP=CN-CP=(AC-BC)/2=AB/2$。

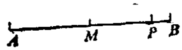


4．如图，若A、B、C、D为一直线上顺次之四点，则$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

【解】 因为 $AB=AC-BC$，$AD=AC+CD$，故 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=(AC-BC)CD+BC(AC+CD)=AC\cdot CD-BC\cdot CD+AC\cdot BC+BC\cdot CD=AC(BC+CD)=AC\cdot BD$。



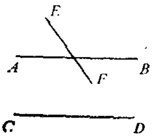
5．若M是线段AB的中点，点P在MB上，则 $AP^2-BP^2=2AB\cdot MP$。



【解】 因为点M是AB的中点，所以 $AP-BP=AM+MP-(MB$

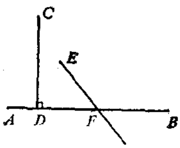
$-MP)=2MP\cdots$①。又知$AP^2-BP^2=(AP+PB)(AP-PB)=AB(AP-PB)\cdots$②，故由①、②得$AP^2-BP^2=2AB\cdot MP$。

6．若直线$AB\parallel CD$，而且直线EF与AB相交，则EF也必定与CD相交。



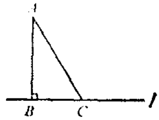
【解】　假定EF与CD不相交，则$EF\parallel CD$，又$AB\parallel CD$，故$EF\parallel AB$。（如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行）这和已知EF与AB相交矛盾，所以EF与CD必定相交。

7．一条直线的垂线和斜线必相交。



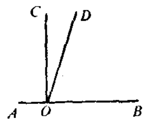
【解】　设直线$CD\perp AB$，垂足为D，斜线EF与AB相交于F。假定垂线CD与斜线EF不相交，则CD与EF就平行或重合。①当$CD\parallel EF$时，因为$CD\perp AB$，所以$EF\perp AB$②当CD与EF重合时，由题设也可得出$EF\perp AB$。从①，②知　$EF\perp AB$。这与已知EF是AB的斜线相矛盾，故CD与EF必相交。

8．证明：过直线l外一点A，只能引一条直线垂直于直线l。



【解】　设A是直线l外一点，如果过A点至少可引两条直线AB和AC都垂直于l，垂足分别为B、C，那么$\angle ABC=90°$，$\angle ACB=90°$，因此在$\triangle ABC$中，有$\angle A+\angle B+\angle C>180°$，这与三角形内角和定理相矛盾，所以过直线$l$外一点$A$，只能引一条直线垂于直线$L$。

9．过直线AB上的一点O且垂直于AB的直线只有一条。

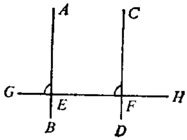


【解】　引直线OC等分平角AOB则相邻两角$\angle COA$，$\angle COB$都是直角，所以$CO\perp AB$。若过O还可作AB的垂线DO，则$\angle DOA=\angle COA=90°$。因此$DO$与$CO$重合，所以过点$O$只能有一条直线垂直于$AB$。

〔注〕　8、9 两题，在中学教材中，统称垂线的基本性质。

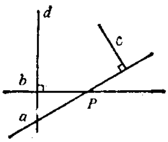
10．如果一条直线垂直于两平行线中的一条直线，那么这条直线必垂直于另一条直线。

【解】　设两直线$AB\parallel CD$，其中直线GH与CD垂直相交于点F，则由6题可知，GH必与AB相



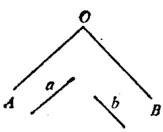
交，设交点为E。因为$\angle AEG$和$\angle CFG$是同位角，所以$\angle AEG=\angle CFG$，又$\angle CFG=90°$，故$\angle AEG=90°$，即$GH\perp AB$。

11．在直线a、b、c、d中，直线a与直线b相交于P点，$c\perp a$ $d\perp b$，则直线c与直线d必相交。



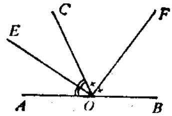
【解】 假定直线c与直线d不相交，则$c\parallel d$。又$a\perp c$，所以由10题可知$a\perp d$，而知$b\perp d$。所以过P有两条直线垂直于直线d，这与垂线的基本性质相矛盾，故直线c与直线d必相交。

12．在平面内，与相交的两条直线分别平行的两条直线必相交。



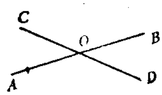
【解】 设两直线AO，BO相交于O点，直线$a\parallel OA$，直线$b\parallel OB$。假定直线a和直线b不相交，则$a\parallel b$，因此有$a\parallel OB$（一条直线和两条平行直线中的一条平行，也和另一条直线平行），这样过点O有两条直线OA和OB都平行于直线a，这与平行公理相矛盾，故直线a与直线b必相交。

13．如果两个邻角的平分线互相垂直，那么两个邻角的另外两条边互为反向延长线。



【解】 设EO平分$\angle AOC$，FO平分$\angle BOC$，且$EO\perp FO$，即$\angle EOC=\frac{1}{2}\angle AOC$。$\angle FOC=\frac{1}{2}\angle BOC$，$\angle EOF=90°$。所以$(\angle AOC+\angle BOC)/2=90°$，即$\angle AOC+\angle BOC=180°$，所以$OA$，$OB$是互为反向延长线。

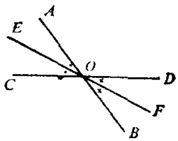
14．从直线AB上一点O向两侧引OC、OD两射线，且$\angle COA=\angle BOD$，则OC、OD互为反向延长线。



【解】 因为AOB是一直线，故$\angle AOC+\angle COB=180°$。又知$\angle COA=\angle BOD$。所以$\angle BOD+\angle COB=180°$。故$OC$、$OD$互为反向延长线。

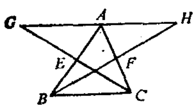
15．两直线AB、CD相交于O，OE平分$\angle AOC$，OF平分

$\angle BOD$，则OE、OF互为反向延长线。



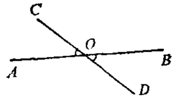
【解】 因为 $\angle AOC=\angle BOD$，OE、OF又分别平分$\angle AOC$和$\angle BOD$，故 $\angle AOE=\angle FOB$。又知 AOB是一直线，所以$\angle AOD+\angle DOF+\angle FOB=180°$，即 $\angle AOE+\angle AOD+\angle DOF=180°$。故$OE$、$OF$是互为反向延长线。

16．$\triangle ABC$中，AB和AC的中点分别为E和F，连结CE并延长到G，使，$EG=CE$，连结BF并延长到H，使$FH=BF$，则G、A、H三点同在一直线上。



【解】 在$\triangle EBC$和$\triangle EAG$中，$AE=BE$，$EG=EC$，$\angle AEG=\angle BEC$，所以$\triangle AEG\cong\triangle BEC$。所以$\angle GAE=\angle CBE$，故 $AG\parallel BC$。同理 $AH\parallel BC$，所以由平行公理可知，G、A、H 三点必在同一直线上。

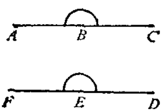
17．对顶角相等，即两条直线AB，CD相交于点O时，则有$\angle AOC=\angle BOD$，$\angle AOD=\angle BOC$。



【解】 由COD是一条直线，有$\angle AOC+\angle AOD=180°$，由$AOB$是一条直线，有 $\angle AOD+\angle BOD=180°$，所以 $\angle AOC+\angle AOD=\angle AOD+\angle BOD$。所以 $\angle AOC=\angle BOD$。同理$\angle AOD=\angle BOC$。

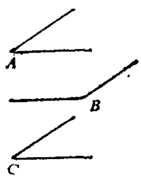
〔注〕 这个定理称为对顶角相等。

18．凡平角都相等。



【解】 设$\angle ABC$和 $\angle FED$ 都是平角。因为 $\angle ABC$ 是平角，所以BA、BC可成一直线，同理 EF、ED 也成一直线。于是将顶点B和顶点E重合，把直线ABC放在直线FED上，并使A与F在E的同侧，或C与D在E的同侧，则在任何情况下平角ABC和平角FED都完全重合，所以凡平角都相等。

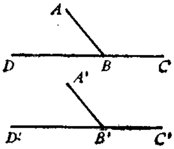
19．同角的补角相等。



【解】 设$\angle A$、$\angle C$都是$\angle B$的补角，则$\angle A+\angle B=180°$，$\angle C+$

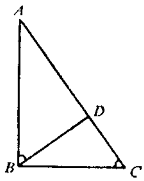
$\angle B = 180°$。所以 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle B$。所以 $\angle A = \angle C$。

20．等角的补角相等。



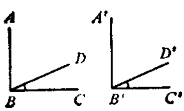
【解】 设 $\angle ABD = \angle A'B'D'$，$\angle ABC$和$\angle A'B'C'$分别为$\angle ABD$ 和$\angle A'B'D'$ 的补角。则仿19题即可证明 $\angle ABC = \angle A'B'C'$。

21．如图，若 $\angle ABC = 90°$，$\angle DBC + \angle C = 90°$，则 $\angle ABD = \angle C$。



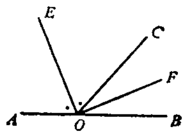
【解】 因为 $\angle ABC = 90°$，且 $\angle ABC = \angle DBC + \angle ABD$，所以 $\angle DBC + \angle ABD = 90°$。又$\angle DBC + \angle C = 90°$，所 以 $\angle DBC + \angle ABD = \angle DBC + \angle C$。故 $\angle ABD = \angle C$。

22．等角的余角相等。



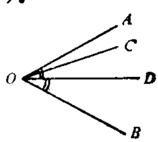
【解】 设$\angle DBC = \angle D'B'C'$，$\angle ABD$和$\angle A'B'D'$分别为 $\angle DBC$和$\angle D'B'C'$的余角。则 $\angle ABD + \angle DBC = 90°$，$\angle A'B'D' + \angle D'B'C' = 90°$。所以 $\angle ABD + \angle DBC = \angle A'B'D' + \angle D'B'C'$。所以 $\angle ABD = \angle A'B'D'$。

23．若 A、O、B 三点在同一直线上，EO 平分 $\angle AOC$，$EO \perp OF$，则 OF平分$\angle BOC$。



【解】 已知EO平分 $\angle AOC$ $EO \perp OF$。因为 $\angle COF = 90° - \angle COE$，而A、O、B三点又在同一直线上，所以 $\angle FOB = 90° - \angle AOE$。又 $\angle COE = \angle AOE$，所以$\angle COF = \angle FOB$。即 FO 平分 $\angle BOC$。

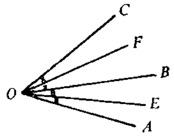
24．设有共公顶点的两个角$\angle AOC$、$\angle DOB$，且 $\angle BOD = \angle AOD$，则$\angle COD = \frac{1}{2}(\angle BOC - \angle AOC)$。



【解】 因为 $\angle BOC = \angle BOD + \angle COD$…①，$\angle AOC = \angle AOD -$

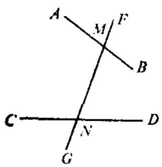
$\angle COD$…②。 由①－②得$\angle BOC-\angle AOC=\angle BOD-\angle AOD+2\angle COD$。又 $\angle BOD=\angle AOD$，所以 $\angle COD=(\angle BOC-\angle AOC)/2$。

25．若OE、OF分别是$\angle AOB$和$\angle BOC$ 的平分线，则 $\angle EOF=(\angle AOB+\angle BOC)/2$。



【解】 因为OE，OF分别是$\angle AOB$和$\angle BOC$ 的平分线，所以$\angle EOB+\angle BOF=(\angle AOB+\angle BOC)/2$，即$\angle EOF=(\angle AOB+\angle BOC)/2$。

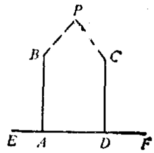
26．设AB不平行于CD，FG分别交AB、CD于M、N，则$\angle FMB\neq\angle MND$。



【解】假定 $\angle FMB=\angle MND$，则 $AB\parallel CD$。这与题设AB不平行CD相矛盾。故 $\angle FMB\neq\angle MND$。

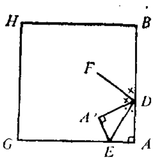
27．垂直于同一条直线的两条直线不能相交。

【解】 设 $AB\perp EF$，$CD\perp EF$，A、D为垂足。假定 AB与CD相交



于某一点 P，那就是说过直线 EF 外一点 P 可以引EF的两条垂线 PA 及PD，这样就与过已知直线外一点向已知直线只能引一条垂线的性质相矛盾，故 AB与 CD 不能相交。

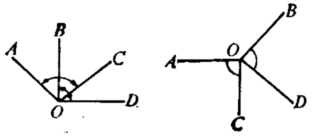
28．如图，若斜折一页书的直角，原直角顶点A落在 A' 的位置上，DE为折痕，作DF平分 $\angle A'DB$，则$DF\perp DE$。



【解】 因为 DF平分 $\angle A'DB$，所以 $\angle A'DF=\angle BDF$。又DE为折痕，A点落在A'点上，则DE就平分 $\angle ADA'$。又A、D、B在同一直线上，所以$\angle BDF+\angle FDA'+\angle A'DE+\angle EDA=180°$， 即 $2(\angle FDA'+\angle A'DE)=180°$。所以$\angle FDE=90°$，即$DF\perp DE$。

29．设有公共顶点的两个角$\angle AOB$、$\angle COD$，$AO\perp CO$，$BO\perp DO$，则$\angle AOB=\angle COD$或$\angle AOB+\angle COB=180°$。

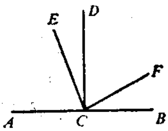
【解】 如图(1)所示，因为$\angle AOC=\angle BOD=90°$，所以$\angle AOC-\angle BOC=\angle BOD-\angle BO$



（1）　　（2）

C,得$\angle AOB=\angle COD$.如图（2)所示，因为$\angle AOB+\angle BOD+\angle DOC+\angle AOC=360^\circ$,又$\angle AOC=\angle BOD=90^\circ$，所以$\angle AOB+\angle COD=180^\circ$。

30．若$CD\perp AB$，而$\angle ACE>\angle BCF$，则$\angle ECD<\angle FCD$。



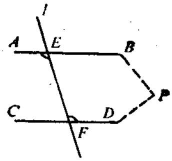
【解】 因为$CD\perp AB$，所以$\angle ACD=\angle BCD=90^\circ$．则$\angle ACE=90^\circ-\angle ECD$，$\angle BCF=90^\circ-\angle FCD$．又知$\angle ACE>\angle BCF$，故$90^\circ-\angle ECD>90^\circ-\angle FCD$，即$\angle ECD<\angle FCD$。

§ 2　平行线

（31—83）

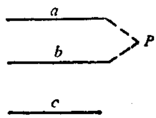
31．(平行线判定定理)若两条直线被第三条直线所截得的内错角相等，则这两条直线平行．(简单说成内错角相等，两直线平行)

【解】 设直线AB和CD与直线l分别交于E和F两点，且$\angle AEF=\angle EFD$．假设AB不平行于



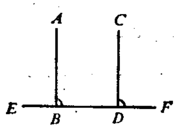
CD，那么AB与CD必相交于一点P,则$\angle AEF$是$\triangle EPF$的一个外角.所以$\angle AEF>\angle EFD$，这与已知$\angle AEF=\angle EFD$相矛盾，故$AB\parallel CD$。

32．设在一平面内有三条直线a、b、c,且$a\parallel c$、$b\parallel c$，则$a\parallel b$。



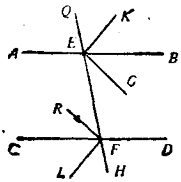
【解】 假定a不平行于b，则a、b就必相交，设其交点为P，则P不在C上（否则a、b、c就重合为一直线了），这样我们就得出：过直线c外一点P能作两条与c平行的直线了．这与平行公理相矛盾，故$a\parallel b$。

33．在同一平面内垂直于同一条直线的两条垂直线平行。



【解】 设AB、CD都垂直于直线EF，其垂足分别为B和D，则$\angle ABF=\angle CDF=90^\circ$．所以$AB\parallel CD$。

34. 两条平行线被第三条直线所截，内(外)错角的平分线互相平行。



【解】 设直线$AB \parallel CD$，与直线QH分别相交于点E、F。$\angle BEF$、$\angle EFC$的平分线分别为EG、FR，$\angle QEB$、$\angle CFH$的平分线分别为EK、FL。

则　$\angle GEF=\frac{1}{2}\angle BEF$，

$\angle RFE=\frac{1}{2}\angle EFC$。由$AB \parallel CD$得$\angle BEF=\angle EFC$，所以$\angle GEF=\angle RFE$。因此$GE \parallel RF$。

又因为$AB \parallel CD$，所以$\angle BEF=\angle CFE$，$\angle DEQ=\angle DFQ=\angle CFH$而$\angle KEB=\frac{1}{2}\angle BEQ$，$\angle CFL=\frac{1}{2}\angle CFH$，

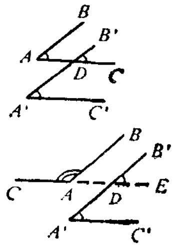
故　$\angle KEB+\angle BEF=\angle CFL+\angle CFE$即$\angle KEF=\angle EFL$，

因此　$KE \parallel FL$。

35. 两组对边分别平行的两个角相等或互补。

【解】 设$\angle BAC$和$\angle B'A'C'$的两边$AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$。

（1）当两组对边分别同向平行时，因为$AB \parallel A'B'$，所以$\angle BAC=\angle B'DC$，因为$AC \parallel$

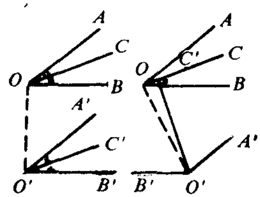


$A'C'$。所以$\angle B'DC=\angle B'A'C'$ 所以$\angle BAC=\angle B'A'C'$。

（2）当一组对边平行，而另一组对边反向平行时，因为

$AB \parallel A'B'$，所以$\angle BAC+\angle B'DE=180°$。因为$AC \parallel A'C'$，所以$\angle B'A'C'=\angle B'DE$。所以$\angle BAC+\angle B'A'C'=180°$。

36. 若$\angle AOB$和$\angle A'O'B'$的两边$OA \parallel O'A'$，$OB \parallel O'B'$且$\angle AOB$，$\angle A'O'B'$的平分线分别是OC和$O'C'$，则$OC \parallel O'C'$或$OC \perp O'C'$。

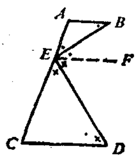


【解】（1）当角的两边同向平行或逆向平行时，$OA \parallel O'A'$ $OB \parallel O'B'$，则$\angle AOB=\angle A'O'B'$。连结OO'，由$OA \parallel O'A'$得$\angle AOO'+\angle A'O'O=180°$。因为$\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB$，$\angle A'O'C'$

$=\frac{1}{2}\angle A'O'B'$，且$\angle AOB=\angle A'O'B'$，所以 $\angle AOC=\angle A'O'C'$。因此 $\angle COO'+\angle C'O'O=\angle AOO'+\angle A'O'O=180°$，所以$OC\parallel O'C'$。

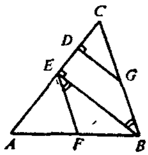
（2）当角的两边中有一组同向平行，另一组逆向平行时，因为$\angle AOB+\angle A'O'B'=180°$，所以$\angle COB+\angle C'O'B'=90°$。过$O'$作$OC$的垂线，垂足为$C'$，连结$OO'$，因为$OB\parallel O'B'$，所以$\angle BOO'=\angle B'O'O$。所以$\angle BOO'+\angle C'O'O=\angle C'O'B'$，$\angle COB+\angle BOO'+\angle C'O'O=90°$。所以$\angle OC'O=90°$，即 $OC\perp O'C'$。

37．如图，若 $AB\parallel CD$，$\angle AEB=\angle B$，$\angle CED=\angle D$则 $BE\perp DE$。



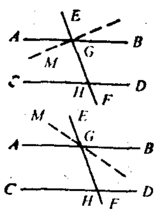
【解】 过E点作$EF\parallel AB$。因为$AB\parallel CD$，所以$EF\parallel CD$，由此可得 $\angle ABE=\angle BEF=\angle AEB$，$\angle EDC=\angle FED=\angle CED$。所以$2\angle CED+2\angle FEB=180°$。所以$\angle FED+\angle FEB=90°$，故$BE\perp DE$。

38．如图，若 $GD\perp AC$，$\angle FEB+\angle DGB=180°$，$\angle AFE=\angle ABC$，则$BE\perp AC$。



【解】 因为 $\angle AFE=\angle ABC$，所以$EF\parallel CB$。所以 $\angle FEB=\angle EBG$。又 $\angle FEB+\angle DGB=180°$；故 $\angle DGB+\angle EBG=180°$，所以 $DG\parallel EB$。又 $GD\perp AC$，所以$BE\perp AC$。

39．平行线性质定理：两条平行线被第三条直线所截得的内错角相等。



【解】 设直线$AB\parallel CD$，且与另一直线EF相交于G、H。假定$\angle AGH\neq\angle GHD$，则 $\angle AGH>\angle GHD$，或$\angle AGH<\angle GHD$。

（1）当$\angle AGH>\angle GHD$时，过G作GM使 $\angle MGH=\angle GHD$，则$GM\parallel CD$。故$\angle AGH\not>\angle GHD$。

（2）仿照（1）可得，$GM\parallel CD$。综上述可知只有过G就有两条与CD平行的直线了，这与平行公理相矛盾，故只有$AB\parallel CD$时，