概率论与数理统计

鲍祥霖 编著

上海交通大学出版社

概率论与数理统计

鲍祥霖　编著

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书主要内容有:事件与概率;随机变量及其分布;随机向量及其函数分布;数字特征及特征函数;极限定理;抽样分布;估计理论;假设检验;方差分析;回归分析;线性回归模型。本书具有现代数学的严谨性,但也顾及到了实际应用性。

本书可供高等院校非数学专业研究生和理科类、工程类、财经类、管理类本科生作为教材,也可供考研者、实际工作者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/鲍祥霖编著. —上海:上海交通大学出版社,2004

ISBN7-313-03586-1

Ⅰ.概... Ⅱ.鲍... Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 007896 号

概率论与数理统计

鲍祥霖 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

上海交大印务有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本:880mm×1240mm 1/32 印张:10.25 字数:290 千字

2004 年 7 月第 1 版 2004 年 7 月第 1 次印刷

印数:1-2050

ISBN7-313-03586-1/O·163 定价:15.00 元

前　言

本人从事概率论与数理统计的教学工作有 10 多年了。在这 10 多年中，我收集了大量中外文献，并经几次修改而写成本书。本书在基本概念的表述、问题提法及定理论证上，力求符合现代数学的严谨性。此外，在书中还列举了一些实例。希望本书的出版对青年学子有所裨益。由于本人水平所限，缺点和疏漏在所难免，希望读者不吝指正。

鲍祥霖

2003 年 8 月于上海交通大学

目　录

1 事件与概率

1.1 随机事件与样本空间

在人类的活动中经常会碰到两类现象：一类是**必然现象**；另一类是**随机现象**. 所谓必然现象，是指在一定条件下必然会发生的现象. 例如：在标准大气压下，水加热到100℃时会沸腾；随机现象则不然，它的结局是事前不能确定的，即在相同条件下重复进行试验，每次结果未必相同. 例如：掷一枚壹元的硬币观察出现的结局，它可能出现两种不同的结局："国徽"和"壹元"，但究竟出现哪种结局事先是无法确定的. 随机现象又有大量性随机现象和个别随机现象之分. 大量性随机现象是指在相同的条件下可以重复出现的随机现象，对大量性随机现象可以重复进行多次乃至无穷多次观察，而个别随机现象是不能在相同的条件下重复出现的. 对于随机现象人们通常关心的是在试验和观察的某个结果是否出现，这些结果称为**随机事件**，简称为**事件**. 例如：对某一目标进行射击，"击中目标"就是随机事件. 在每次试验中一定会发生的事件称为**必然事件**，在任何一次试验中都不会出现的事件是**不可能事件**. 例如：两次射击"至多命中目标 2 次"是必然事件. 而"命中目标 3 次"则是**不可能事件**. 我们以大写字母 A，B，C，……表示随机事件. 特别用 Ω 表示必然事件，以 $\varnothing$ 表示不可能事件.

大量性随机现象和个别随机现象都有各自的规律性，而概率论与数理统计则是研究大量性随机现象在相同条件下重复出现时所表现出来的规律性. 我们称这种规律性为**统计规律性**.

为了探索随机事件发生的统计规律性，需对随机现象进行观察或试验. 一个试验如果满足以下条件：

（1）试验可在相同的情形下重复进行.

(2) 试验的所有可能结果都是明确可知的.

(3) 每次试验之前不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

称这样的试验为**随机试验**. 如前所述,随机试验的每一可能结局均称为随机事件.

1.1.1 样本空间

在随机试验中我们把不可能再分的随机事件称为**基本事件**,由若干事件组合而成的事件称为**复合事件**. 基本事件也可称为**样本点**,一般用 ω 表示,样本点全体构成**样本空间**,样本空间一般也用 Ω 表示.

用 E 表示随机试验;以 ω 表示 E 的一种结局,以 $\Omega=\{\omega\}$ 表示 E 的一切可能结局的集合. 当指定了一种试验并给出一切可能的结局 Ω,也就给出了随机试验.

例 1 随机试验 E:掷一枚硬币并观察所出现的面;试验只有两种相互对立的结局:ω_1 = 正面;ω_2 = 反面,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 随机试验 E:在长为 t 的时间段内观察 3 级以上地震出现的次数 $\nu(t)$,$\omega_i=\{\nu(t)=i\}$;若简记 ω_i 为 i,则 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 3 随机试验 E:向平面上某一有界区域 Ω 任意投一质点并观察其落点位置;以 $\omega(a,b)$ 表示落点的坐标为 (a,b) 的一个试验结局,若简记 $\omega(a,b)$ 为 (a,b),则一切可能结局的集合即区域 Ω.

例 4 随机试验 E:在 10 个大小相同的空心球中各放有印有"0,1,…,9"中一个数字的纸一张,把 10 个球放入一个口袋任意摸出一球并观察其中的数字. 以 $\omega(i)$ 表示摸出球中数字为 i;若简记 $\omega(i)$ 为 i,则 $\Omega=\{0,1,\cdots,9\}$. $\omega(i)(i=0,1,\cdots,9)$ 均为基本事件.

事件 $A=\{i:\omega(i)>4\}$ = {摸出球中的数字大于 4} 和事件 $B=\{i:\omega(i)$ 为奇数$\}$ = {摸出球中数字是奇数},均为复合事件.

1.1.2 事件的关系和运算

事件的包含和相等:如果事件 A 发生,事件 B 必发生,则称 B **包含** A,记作 $A\subset B$.

显然,对任何事件 A 有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A,B **相等**，记作 $A=B$.

事件的并(和)："事件 A,B 至少发生一个"，称作 A 与 B 的**并**(或**和**)，记作 $A\cup B$. 类似地，"事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 至少发生一个"为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**和**(或**并**)，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. "事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 至少发生一个"为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和(或并)，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

显然，若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$. 此外对任意事件 A 有 $A\cup\varnothing=A$，$A\cup\Omega=\Omega$.

事件的交："事件 A,B 同时发生"称为 A 与 B 的**交**，记作 $A\cap B$(或 $A\cdot B,AB$). 类似地"事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 同时发生"称作事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的交，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 而 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示可列个事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 同时发生，称作可列个事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 的交.

例 5 随机试验 E：掷一颗骰子并观察出现的点数；以 $\omega(i)$ 表示出现的点数，若简记 $\omega(i)$ 为 i，则 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 若令：$A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{3,6\}$，则 $A\cap B=\varnothing$；$A\cup B=\Omega$；$A\cap C=\{6\}$；$A\cup C=\{2,3,4,6\}$；$B\cap C=\{3\}$.

互不相容事件：若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A,B 为**互不相容事件**. 这一概念可推广至有限个或可列无穷多个，即若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则称 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 两两互不相容；若 $A_i(i=1,2,\cdots)$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则称 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 两两互不相容.

事件的差和逆："事件 A 发生但 B 不发生"称为 A 与 B 的**差**，记作 $A-B$；"A 不发生"这一事件称作 A 的**逆事件**，记作 $\overline{A}$. 显然.

$$\overline{A}=\Omega-A;\ \overline{\overline{A}}=A.$$

A 与 B 互为逆事件当且仅当 $A\cup B=\Omega,A\cap B=\varnothing$.

单调事件序列及其极限：事件序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$，满足条件 $A_n\subset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则称 $\{A_n\}$ 是**递增**的，如果满足条件 $A_n\supset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则称 $\{A_n\}$ 是**递减**的；递增或递减事件序列都称为**单调**的. 记

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\begin{cases}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n & (\text{若}\{A_n\}\text{ 递增}),\\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n & (\text{若}\{A_n\}\text{ 递减}).\end{cases}$$

称$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$为(单调)事件序列$\{A_n\}$的**极限**.

例 6 随机试验E:向实数轴上随机投一个质点,并观察质点落在那个实数点上.设$A=\{$质点落入$[0,4]\}$,$B=\{$质点落入$(0,4)\}$,$A_n=\left\{\text{质点落入}\left[0-\frac{1}{n},4+\frac{1}{n}\right](n=1,2,\cdots)\right\}$,$B_n=\left\{\text{质点落入}\left[0+\frac{1}{n},4-\frac{1}{n}\right](n=1,2,\cdots)\right\}$,显然$\{A_n\}$是递减事件序列,$\{B_n\}$是递增事件序列,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$;$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n=B$.

1.1.3 事件运算的简单性质

假设A,B,C是事件,则它们满足以下性质:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$AB=BA$.

(2) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,$A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律:$A(B\cup C)=AB\cup AC$,$A(B-C)=AB-AC$.

(4) 对偶原则:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些性质的证明很简单.这里仅证明$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,其余各式的证明由读者自己完成.

事实上,事件$A\cap B$表示"A和B同时发生",故$\overline{A\cap B}$为A,B不同时发生,即$\overline{A}$,$\overline{B}$中至少有一个发生,这样$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$.反之,$\overline{A}\cup\overline{B}$表示$\overline{A}$,$\overline{B}$中至少有一个发生,这表明$A$,$B$不同时发生,即事件$\overline{A}\cup\overline{B}$发生必导致$\overline{A\cap B}$发生,从而$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$.于是$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.性质(4)可以推广到任意有限多个或可列多个事件:假设$A_1,A_2,\cdots$是有限个或可列多个事件,则

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$

1.2 相对频率和概率

前文指出大量性随机现象具有统计规律性.为了研究大量性随机现象的统计规律性,先引进相对频率这一概念.

若在 n 次重复试验中，事件 A 发生 S_n 次，则称 $P_n(A) \triangleq \frac{S_n}{n}$ 为随机事件 A 在 n 次试验中发生的**相对频率**.

相对频率可以刻划随机事件发生可能性的大小. 当然，相对频率是由随机试验的具体结果而定的，一般不是一个确定的值. 但当试验次数 n 充分大时，相对频率 $\frac{S_n}{n}$ 会呈现出稳定性.

例 7 随机试验 E：随手掷出一枚硬币，观察落地时是正面还是反面. 以 A 表示{落下后正面向上}. 历史上蒲丰、皮尔逊做过这一试验，结果如下表：

实验者	实验次数	出现正面次数	相对频率
蒲 丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

由以上资料可以看出，当 n 充分大时出现正面的相对频率稳定在 0.5 附近.

例 8 某厂生产的一种产品作检验. 因批量很大，采取了放回抽样检验方法，检验合格品频率如下表所示：

抽取件数	5	10	60	150	600	900	1 200	1 800
合格品数	5	7	53	131	542	820	1 091	1 631
合格频率	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

可以看出，当 n 充分大时合格频率稳定在 0.91 附近.

频率显然具有以下性质：

(1) $0 \leqslant P_n(A) \leqslant 1$.

(2) $P_n(\Omega)=1$.

(3) 若 A,B 互不相容，则 $P_n(A \cup B)=P_n(A)+P_n(B)$.

频率的稳定性，说明了随机事件发生的可能性的大小是随机事件

本身固有的，因此可以对它进行度量.

对于一个随机事件 A，常用一个数 $P(A)$ 来表示事件 A 发生的可能性，这个数 $P(A)$ 就称为 A 发生的概率.

当 n 充分大时 $P_n(A)$ 与 $P(A)$ 能足够接近，故当试验次数很大时，可用相对频率作为概率的近似值. 用频率的稳定值来定义概率是概率的古典定义.

1.3　古典型概率与几何型概率

若试验 E 的样本空间 Ω 中只有有限个样本点，且每个基本事件的发生是等可能的，则称试验 E 为古典型随机试验.

定义 1　设古典型随机试验 E 的样本空间 Ω 中含有 n 个基本事件，事件 A 包含了 m 个基本事件，则称

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

为 A 的概率.

试验的样本空间中只有有限个样本点，不妨设是 n 个，记这 n 个基本事件为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，而每个基本事件是等可能发生的，故有

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{i=1}^{n}\omega_i)=\sum_{i=1}^{n}P(\omega_i)=nP(\omega_i),$$

所以

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n).$$

上式对理解古典型概率定义颇有帮助.

例 9　100 只外观相同的产品中有 40 只为合格品，60 只为不合格品，按以下两种方法抽取：

(1) 每次抽取一只，测试后放回再抽一只(返回抽样).

(2) 每次抽取一只，测试后不放回，再从剩下的产品中抽取(不返回抽样).

求下列事件的概率：

A=｛抽取 3 只，3 只均为不合格品｝；

$B=\{$抽取 3 只,其中 2 只为合格品,1 只为不合格品$\}$.

解 (1) 返回抽样

$$P(A)=\frac{60^3}{100^3}=0.216;\quad P(B)=\frac{C_3^2\times 40^2\times 60}{100^3}=0.288.$$

(2) 不返回抽样

$$P(A)=\frac{60\times 59\times 58}{100\times 99\times 98}=0.212;$$

$$P(B)=\frac{C_3^2\times 60\times 40\times 39}{100\times 99\times 98}=0.289.$$

例 10 设有 n 个同样的球,将其随机地放入 N 个格子中去($N\geqslant n$),试求以下事件的概率.

(1) $A=\{$指定的 n 个格子中各有一个球$\}$.

(2) $B=\{$任意 n 个格子各有一个球$\}$.

解 由于每个球可落入 N 个格子中的任一个,所以 n 个球落入 N 个格子共有 N^n 种可能.

(1) 指定的 n 个格子中各有一个球这种可能性总共有 $n!$ 种. 于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) n 个格子可从 N 个格子中任意选取,选法有 C_N^n 种,对每组选定的 n 个格子中各有一个球的可能性又有 $n!$ 种. 于是

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

例 11 某城有 N 部卡车,车牌号从 1 到 N,有一外地人到该城去,把遇到的 n 部卡车的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号),若以 $A=\{$抄到的最大号码恰好为 $k\}$. 求 $P(A)$.

解 根据题意,可看作对 N 个牌号进行了 n 次返回抽样,所有可能抽样法有 N^n 种;而最大车牌号不大于 k 的取法有 k^n 种;最大车牌号不大于 $k-1$ 的取法有 $(k-1)^n$ 种;故最大号码恰好为 k 的取法有 $k^n-(k-1)^n$ 种. 于是

$$P(A)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

由于古典型概率要求试验可能的结果为有限且基本事件的发生必须是等可能的，因此局限性较大. 人们首先把问题推广到试验的结果为无限多个且又有某种等可能的情况. 先看一个简单的例子.

例 12 如果在一个 5 万平方公里的海域里有面积达 40 平方公里的海域蕴藏着石油，假如在这海域里随意选定一点钻探，问恰好钻到石油的概率是多少？

解 由于选点是随意的，可以认为该海域内各点被选中的可能性是一样的，因此所求概率自然认为等于蕴藏石油的海域面积与整个海域面积之比，即 $p=\frac{40}{50\,000}=0.000\,8$.

上例为几何型随机试验的一个直观例子. 一般地说，具有以下特点的随机试验称为**几何型随机试验**.

假设 Ω 是 m 维空间中的一个有界区域. 以 $\mu(\Omega)$ 表示 Ω 的 m 维"体积"(一维"体积"是长度，二维"体积"是面积，三维"体积"是普通的体积)；A 是 Ω 的一个子区域；A 的 m 维体积表示为 $\mu(A)$. 随机试验 E：向区域 Ω 随机地投一质点并设：

(1) 随机点可能落在区域 Ω 内的任何一点，但不可能落在 Ω 之外.

(2) 因为投点是随机的，所以落入 A 的可能性大小仅与 A 的 m 维体积有关而与位置无关.

若 Ω 和 A 的"体积"都是可测量的(存在不可测量体积的区域称为不可测集，这一点读者也许会很奇怪，但这是事实，参见"测度论"教材). 记 $A=\{$质点落在区域 A 中$\}$，则称

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

为**几何型概率**.

下面的解释有助于理解几何型概率与古典型概率之间的联系.

设 Ω 是平面上的一个矩形区域，A 是 Ω 中的一个子区域. 用两组互相垂直的等距平行线将 Ω 作分割，如图 1.1 所示. 以 N 表示包含在 Ω 中的小方格数，以 M 表示包含在 A 中的小方格数. 因投点落入每一

小方格是等可能的，按古典型概率定义有点落入区域 A(记作事件 A)的概率应近似等于$\frac{M}{N}$，当分割的细度(小方格对角线的长度)$\lambda\to 0$ 时，$\frac{M}{N}\to\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=P(A)$，而 $P(A)$正是几何型概率.

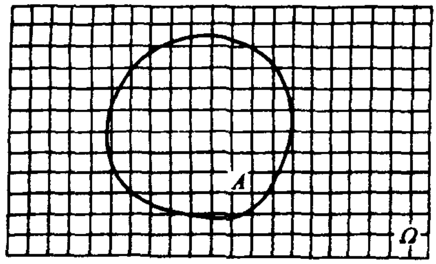

图 1.1

例 13(约会问题)　两人约定于 0 到 T 时内在某地相见，先到者等 $t(t\leqslant T)$时后离去，试求两人能会见(事件 A)的概率.

解　分别以 x,y 表示两人到达的时刻，则 $\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant T;0\leqslant y\leqslant T\}$. 两人能会见的充要条件是$|x-y|\leqslant t$，这个条件在 Ω 中决定了一个区域 A(图 1.2 中的阴影部分). 本问题可以看作向区域 Ω 随机投点，所求概率为随机点(x,y)落入区域 A 的概率. 因此

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

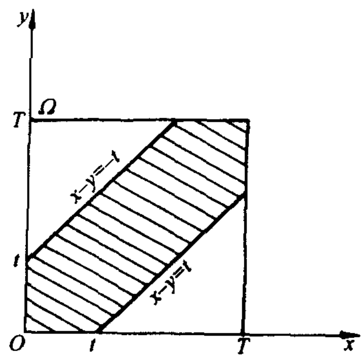

图 1.2

需要指出的是古典型概率和几何型概率均具有以下 3 个性质：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$(对任何事件 A 均成立).

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$.

(3) 可列可加性：设 $A_i(i=1,2,\cdots)$为有限个或可列多个互不相容事件，则 $P(\bigcup_i A_i)=\sum_i P(A_i)$.

这些性质也是所有概率的共同性质.

两个著名的例子

例 14（蒲丰(Buffon)投针问题） 平面上画有等距离的平行线，平行线间的距离为 $a(a>0)$. 向平面任意投掷一枚长为 $l(l<a)$ 的针，试求针与平行线相交的概率.

解 以 x 表示针的中心与最近一条平行线间的距离，又以 φ 表示针与此直线间的交角，如图 1.3 所示，显然有

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

这两式可以确定 $xO\varphi$ 平面上的一个矩形 Ω. 针与平行线相交（记作事件 A）的充要条件是：$x \leqslant \frac{l}{2}\sin\varphi$.

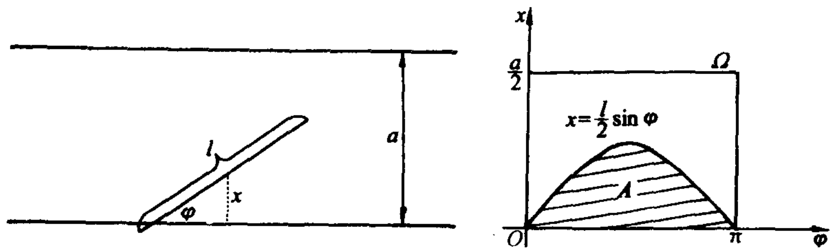

图 1.3

这个不等式表示的区域 A 是图 1.3 中的阴影部分. 由等可能性知

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi}{\pi \cdot \frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}.$$

如果 l, a 为已知，则以 π 值代入上式便可计算出 $P(A)$ 的值.

由于最后的答案与 π 有关，故如果已知 $P(A)$ 的值，则可用上式去求 π. 为此如果投针 N 次，计算出针与线相交的次数 n，以 $\frac{n}{N}$ 作为概率 $P(A)$ 的近似值，便可求得

$$\pi = \frac{2lN}{an}.$$