清华大学公共基础平台课教材

微积分（I）

清华大学数学科学系《微积分》编写组

清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

微积分（I）

清华大学数学科学系《微积分》编写组

清华大学出版社

北京

内容简介

本教材共分3册：《微积分(Ⅰ)》、《微积分(Ⅱ)》和《微积分(Ⅲ)》. 此书为《微积分(Ⅰ)》，它在强调"变化趋势"的极限直观定义和初等函数极限的基础上，展开对一元函数微分和积分的概念、计算、应用及简单微分方程等微积分最基础内容的研究. 包括函数、函数的极限与连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分与原函数、定积分、定积分应用、简单微分方程与数学模型初步8章内容.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(Ⅰ)/清华大学数学科学系《微积分》编写组. —北京：清华大学出版社，2003.8
(清华大学公共基础平台课教材)
ISBN 7-302-06785-6

Ⅰ. 微… Ⅱ. 清… Ⅲ. 微积分—高等学校—教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 047345 号

出 版 者：清华大学出版社 **地 址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **客户服务**：010-62776969

责任编辑：刘 颖
印 刷 者：北京市清华园胶印厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开 本：140×203 **印张**：14 **字数**：351 千字
版 次：2003 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第2 次印刷
书 号：ISBN 7-302-06785-6/O・304
印 数：4001～9000
定 价：18.00 元

前　言

微积分是 17 世纪由英国的牛顿(Newton)和德国的莱布尼茨(Leibniz)在前人成果的基础上创立起来的. 在以后的两个世纪里,它以惊人的速度飞快地发展,在许多领域中得到了广泛的应用,取得了空前辉煌的成就. 作为显示数学理论无比威力的例证之一是海王星的发现. 1781 年德国的威廉·赫歇尔通过观察,发现了天王星. 1830 年天文学家发现天王星的运行轨道的观测位置与理论计算位置不符,因而推测在天王星之外可能还有一颗未知的行星在影响它的运动. 英国天文学家与几何学家亚当斯(J. C. Adams)和法国天文学家勒维利(Le Verrier)于 1845,1846 年先后用严格的数学方法算出了这颗未知行星的运行轨道. 1846 年 9 月 23 日晚上在柏林天文台工作的加勒(Galle),将望远镜指向秋夜的星空,对准了勒维利预报的方位,果然找到了这颗新的行星,这就是海王星.

微积分之所以有如此神奇的力量,是因为通过这种方法,能找到"无限短"时间内物理运动规律的所谓"微分形式",然后进行"积分",从而合乎逻辑地得到适合于表示物体运动规律的函数关系. 正如爱因斯坦所说:"微分定律的明晰概念是牛顿最伟大的理智成就之一".

从更一般的角度看:用微积分方法研究实际问题的过程大致是这样的,在自变量的无限小变化过程中,考察函数的对应变化,并通过确定变化趋势的数学过程,即所谓"极限过程",找出函数所满足的"微分规律",然后"积分",从而找出函数关系.

这里的关键就在于，如何在数学上理解并阐述清楚什么是“无限小变化”？什么是“极限过程”？牛顿及莱布尼茨等微积分的创立者，当时是用现实直观与数学理性相结合的方法，大胆而机智地解决了大量实际问题. 他们的思想今天仍然在许多学科中被广泛使用. 当然，这种方法有其不足之处，主要是作为一般的数学概念和方法，缺乏精确的数学描述，因而造成了一些混乱. 在当时，牛顿也为其困惑，他想了许多方法来解决，终因受当时数学发展水平所限而没能完成. 对于这种状况，18 世纪的许多大数学家，如高斯(Gauss)，达朗贝尔(d'Alembert)等都意识到了这一问题的所在：微积分原理的严格理性基础，不能依赖于物理或几何的直观，而只能依靠自身合理的数学概念和方法. 当时挪威数学家阿贝尔(N. H. Abel)明确地指出：“人们在今天的分析中无可争辩地发现了多得惊人的含混之处”，“最糟糕的是它还没有得到严格处理，高等分析中只有少数命题得到完全严格的证明. 人们到处发现从特殊到一般的令人遗憾的推理方法”. 正是在这种形势下，法国数学家柯西(Cauchy)在他 1821 年至 1829 年相继编写的几本教材：《分析教程第一编·代数分析》(1821)、《微积分概要》(1823)、《微积分在几何中的应用教程》(1826)和《微分学教程》(1829)中，首次成功地为微积分奠定了比较严格的基础，其中最核心的是给“极限”以比较精确的数学定义，使微积分从此走出了混乱的阶段.

今天我们来回顾微积分发展的这两个阶段，对于牛顿的直观微积分与柯西的理性微积分，应该给两者一个全面的评述. 首先，这两个阶段是微积分发展历史中的两个必然阶段，前者是后者的基础，后者是前者的发展. 更为重要的是，这两个阶段的微积分从方法上讲各有其特点，两者不是互相否定的，而是互为补充的. 从应用上讲，牛顿的方法易于理解，贴近实际，激发创意，生动而充满活力，所以为许多非数学的学者所喜爱与沿用. 但存在的问题是缺乏严格的数学理论基础，导致一些重要概念上的混乱. 柯西的

理性微积分，基本上排除了混乱的概念，给微积分以完整的理论体系，为分析学科的发展奠定了坚实的理论基础. 但另一方面，它也有用严格而形式的语言，掩盖牛顿方法的许多鲜活和源于实际的思想等问题，使学习者难以较快地理解极限的实质. 这套严格的形式处理，对于初学者，有一种难以接受的感觉.

在微积分的教学和教材中如何既能体现"牛顿方法"生动易懂的特点，使学生对运用微积分方法解决实际问题的基本思路有所掌握，又能给予学生以"柯西方法"严谨的数学理性思维的初步训练，这是长期以来大学数学教学改革的一个重要课题，不少人在这方面做过多种有益的尝试. 由于"微积分"是大学的一门很重要的基础课，它不但为大学的许多后续课程提供必要的数学工具，特别是在研究连续模型的数学方法方面起着重要作用；同时它在培养学生理性思维方面有着无可替代的地位. 因此这门课程和教材的改革备受人们关注. 我们编写的这本《微积分》教材，对微积分的体系作了一些改变，力求能反映近几年来国内数学改革的研究成果，适应我校创建研究型大学形势发展的要求. 该教材重大的变化在极限的处理上，希望把"牛顿方法"与"柯西方法"适当结合起来，将极限内容分两阶段讲述，分别在《微积分（Ⅰ）》和《微积分（Ⅱ）》中完成. 这样做的目的是为了突出特点、分散难点、循序渐进，同时使教材适应不同读者的要求. 该教材分成三册，各册内容分述如下.

《微积分（Ⅰ）》是在强调"变化趋势"的极限直观定义和初等函数极限的基础上，展开对一元函数微分和积分的概念、计算、应用及简单微分方程等微积分中最基本内容的讨论. 这部分的重点是计算与应用，希望读者通过这部分内容的学习，能基本掌握一元微积分的极限、微分及积分的基本计算方法，初步理解微积分中用牛顿方法解决实际问题的思路，而对于极限等有关理论问题，则作为进一步的内容留待在《微积分（Ⅱ）》中研究.

《微积分(Ⅱ)》是《微积分(Ⅰ)》的深入,着重于极限理论层面上的讨论,目的是通过本册的学习,使读者的数学理性思维能力和数学的素养得到进一步的提高. 在内容上选择了极限与连续、函数的可积性与广义积分、数项级数与函数项级数 4 个部分.

《微积分(Ⅲ)》是《微积分(Ⅰ)》的扩展,主要包括多元函数微分学和积分学、曲线论和场论的初步知识以及线性微分方程等内容. 我们希望读者在本册中不但能学到多元微积分学的内容,进一步领会微积分方法的实质及其发展,同时在微积分的应用上视野能更加开阔.

本套教材力求继承清华大学长期以来数学教学的优良传统,力求吸收国内外同类教材的成功经验. 该教材是在清华大学数学科学系已出版的多本有关教材的基础上编写的,如萧树铁主编,由高等教育出版社出版的面向 21 世纪的改革教材《一元微积分》、《多元微积分及其应用》,施学瑜编写,由清华大学出版社出版的《高等数学教程》(上、下册),韩云瑞、扈志明编写,由清华大学出版社出版的《微积分教程》(上、下册)等. 本教材先以讲义形式经过一轮教学实践,然后集中了所有有关任课教师的意见,对体系、内容、习题安排等方面又进行反复讨论,最后由《微积分》教材编写组负责修改成稿.

《微积分》教材编写组的组成是:

主编:谭泽光

成员:刘坤林、韩云瑞、扈志明.

参加编写工作的还有陆小援和刘庆华.

在教材的编写过程中,得到萧树铁、白峰杉、李津、苏宁、张光远、林润亮等老师的关心和帮助. 清华大学出版社刘颖同志为本教材的编辑做了大量细致而有成效的工作. 还有我系的一批博士生助教为教材中习题的校对做了大量工作. 在此一并表示感谢.

这套教材虽经过教学实践，但由于在体系上有较大变化，仍是一种试用性的教材，其中必然还有一些不当之处，诚请使用此教材的老师及读者批评指正.

清华大学数学科学系《微积分》教材编写组

2003 年 7 月

目　　录

预备知识

为了便于读者阅读和作者叙述，这里将一些在中学中讲述过，但强调不够，而微积分中却经常使用的集合、区间、邻域等概念以及两个逻辑符号和几个不等式，作为预备知识列举如下，以备复习和参考.

1 集合、区间与邻域

(1) 一个**集合**(set)S 是指某些可以列举，或者可用某种属性加以区别的个体的全体. 集合 S 中每一个体 a 称为 S 的**元素**，记为 $a\in S$. 符号“$\in$”读作“属于”；$\notin$ 读作“不属于”.

例 1 $S=\{1,2,3,4,5\}$是用“列举法”表示的一个集合. 该集合亦可用“属性法”表示为

$$S=\{n \mid n\text{ 是小于 6 的正整数}\}.$$

例 2 常用的数的集合有：

$\mathrm{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，自然数集合；

$\mathrm{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\cdots\}$，整数集合；

$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} \mid p,q\text{ 为互质的整数},q\neq 0\}$，有理数集合；

$\mathbb{R}=\{x \mid x\text{ 是实数}\}$，实数集合；

$\mathbb{C}=\{x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbb{R}\}$，复数集合.

空集是不含任何元素的集合，记为$\varnothing$. 例如

$$\{x \mid x^2+1=0,x\in\mathbb{R}\}=\varnothing.$$

(2) 集合的基本运算

设 A 和 B 是两个集合.

A 和 B 之间的"**并**"运算"$\cup$"定义为 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$，集合 $A\cup B$ 称为 A,B 的并集或简称为并；

A 和 B 之间的"**交**"运算"$\cap$"定义为 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，集合 $A\cap B$ 称为 A,B 的交集或简称为交.

例 3 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9\},A\cap B=\{1,3,5\}.$$

若 A 中的元素都属于 B，则称 A 是 B 的一个**子集**(subset)，记作 $A\subset B$.

若 $A\subset B$，同时又有 $B\subset A$，则称 A 与 B 相同，记成 $A=B$.

(3) **区间**(Interval)是实数的一种特殊子集. 常遇到的区间有：

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

无穷区间：$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$，

$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$.

以上统称为区间，通常用记号 I 表示.

实数集$\mathbb{R}$ 可以表示为$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

(4) **邻域**(neighbourhood)是指以某点 x_0 为中心的一个长度为 $2\delta(\delta>0)$的对称开区间，通常记成 $N(x_0,\delta)$，即

$$N(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

或
$$N(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}.$$

去心邻域是指在邻域中去掉中心点 x_0 的集合，通常记成 $N^*(x_0,\delta)$，即

$$N^*(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}.$$

在谈到邻域时，δ 的大小通常并不重要，只要 $\delta>0$ 就行，因此