教育部、保监会推荐教材

经济管理类课程教材

保险系列

寿险精算

主编　李秀芳　傅安平　李　静

中国人民大学出版社

教育部、保监会推荐教材

经济管理类课程教材

保险系列

寿险精算

主编　李秀芳　傅安平　李　静

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

寿险精算/李秀芳等主编.
北京:中国人民大学出版社,2004
教育部、保监会推荐教材.经济管理类课程教材.保险系列

ISBN 7-300-05454-4/F·1714
Ⅰ.寿…
Ⅱ.①李…②傅…③李…
Ⅲ.人寿保险-精算学-教材
Ⅳ.F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 028588 号

教育部、保监会推荐教材
经济管理类课程教材·保险系列
寿险精算
主编 李秀芳 傅安平 李静

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242(总编室) 010－62511239(出版部) 010－82501766(邮购部) 010－62514148(门市部)		
网　　址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北涿州星河印刷厂		
开　　本	787×965 毫米 1/16	版　　次	2004 年 4 月第 1 版
印　　张	17.5	印　　次	2004 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	316 000	定　　价	18.00 元

总　序

中国保险监督管理委员会主席

吴定富

改革开放以来，中国保险业走上了高速发展的快车道，无论是保险市场规模还是保险市场主体，都获得了前所未有的发展，保险监管体系与法律体系已初步建立并趋于完善。随着社会主义市场经济的深入，特别是加入世界贸易组织后，对外开放的进一步扩大以及经济全球化进程的加快，中国保险业发展前景更为广阔，面临的挑战更为严峻。如何在总结和借鉴国内外保险业发展经验和教训的基础上，对中国保险业的发展、保险业风险防范机制的建立和完善、保险业对外开放、加强和改进保险监管、充分发挥行业组织自律作用和加快培养保险人才等方面的问题进行深入研究和探讨，为中国保险业的发展提供正确的理论指导，成为保险监管部门、保险理论界与实务界的重要课题。

适应这种形势，由国发资本市场研究中心牵头，“政产学”界专家教授共同参与，编写了“经济管理类课程教材·保险系列”教材、学习指导书及案例。

一般而言，只有成熟的经济形态，才有成熟的经济理论。在社会主义市场经济体制初步建立，保险业飞速发展，还需要逐步总结完善的时

候，编写一套保险系列丛书，是一项探索性的工作。这种探索是对保险业感性认识去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的加工整理过程，这个过程可以加深人们对保险业改革与实践的认识，加强人们对保险业运行规律的把握，但不可能穷尽人们对保险工作的认识。这套系列教材紧密结合当前国内外经济金融理论研究的最新成果与中国保险业改革与发展的实际情况，全面阐述了保险的基本原理、基本方法和基本技能。因此，我愿意把它介绍给所有热爱和关心保验业的同志们，希望大家在学习、工作和交流中进一步研究探讨，使这套系列教材能够不断丰富完善。我也相信该系列教材的推出，能够为保险学科的建设与教学改革、为中国保险业人才的培养起到应有的作用，为中国保险业的发展做出重要贡献。

前 言

精算是对各种经济活动未来的财务风险进行分析、估价和管理的一门综合性的应用科学。精算方法和精算技术是对现代保险、金融、投资进行科学管理的有效工具。精算学自 1988 年从北美引入中国以来，在我国得到了迅速的发展，特别是在人寿保险领域得到了广泛的应用。

本书是在《寿险精算》（中国人民大学出版 2002 年 12 月）的基础上直接删减而得，更适用于非精算专业的学生。本书以人寿保险为基础，是一本集寿险精算的基础理论、基本技能和寿险精算实务为一体的精算书籍。本书不仅注重寿险精算的基本理论和基本技能，而且对寿险精算实务作了深入的探讨，特别是与中国目前的精算实务标准等一系列现实问题相结合，既具有理论性，也具有实践性。读者通过学习此书，不仅可以较为全面的掌握寿险精算的理论基础和数理基础，而且可以掌握寿险精算在实务中的应用的基本思想和方法。本书吸收了国内、外最新的研究成果，体系完整，结构严谨合理。同时，该书结合中国寿险精算的实践运用了大量的实证分析和实例分析，内容翔实，资料丰富，是一本既有深度、又有广度的专业书籍。

删减实际上是非常困难的工作，既要保持书的完整性，还要保证书的逻辑性，本书的删减和整理工作全部由李静负责。各章节具体的编写分工为：

李秀芳：第8、9、10、11章

李　静：第3（合写）、12章

曾庆五：第3（合写）章

刘占国：第2章

孙佳美：第4（合写）、5（合写）、6、7章

李勇权：第1章

张　琳：第4（合写）、5（合写）章

书中难免疏漏之处，请读者予以指正。

编　者

2004年1月

目　录

第1章

利息的基本概念

1.1 实际利率与实际贴现率

所谓利息，是指在一定时期内借款人向贷款人支付的使用资金的报酬。

如果我们把每项业务开始时投资的金额称为本金，而把业务开始一定时间后回收到的总金额称为该时刻的积累值（或终值），则积累值与本金的差额就是这一时期的利息金额。

假定在投资期间不再加入或抽回本金，则决定积累值的两个最主要的因素就是本金金额和从投资日算起的时间长度。时间长度可以用不同的单位来度量，如日、周、月、季、半年、一年等。用来度量时间的单位称为“度量期”或“期”，其中最常用的期是年。

考虑投资一单位的本金。我们定义该投资在时刻 t 的积累值为积累

函数$a(t)$，显然，$a(0)=1$，积累函数$a(t)$也可称为t期积累因子，因为它是单位本金在t期期末的积累值。一般情况下，本金金额不是1个单位，而是k个单位，这时我们定义一个总量函数$A(t)$，它是本金为k的投资在时刻$t\geqslant 0$时的积累值。

显然，$A(t)$与$a(t)$仅相差一个倍数k，即

$$A(t)=k\cdot a(t) \tag{1.1.1}$$

我们称积累函数$a(t)$的倒数$a^{-1}(t)$为t期折现因子或折现函数。特别地，把一期折现因子$a^{-1}(1)$简称为折现因子，并记为v。容易发现，t期折现因子$a^{-1}(t)$是为了使在t期期末的积累值为1，而在开始时投入的本金金额。事实上，将$k=a^{-1}(t)$代入式（1.1.1），就有

$$A(t)=k\cdot a(t)=a^{-1}(t)\cdot a(t)=1$$

我们把为了在t期期末得到某个积累值，而在开始时投入的本金金额称为该积累值的现值。显然，$a^{-1}(t)$是在t期期末支付1的现值，在t期期末支付k的现值为$k\cdot a^{-1}(t)$。

在某种意义上，积累与折现是相反的过程，$a(t)$为1单位本金在t期期末的积累值，而$a^{-1}(t)$是在t期期末支付1单位终值的现值。

另外，把从投资日起第n个时期得到的利息金额记为I_n，则

$$I_n=A(n)-A(n-1),\quad n\geqslant 1 \tag{1.1.2}$$

式中，I_n为一个时间区间上所得利息的量；$A(n)$为在一特定时刻的积累量。

1.1.1 实际利率

某一度量期的实际利率，是指该度量期内得到的利息金额与此度量期开始时投入的本金金额之比。实际利率通常用字母i表示。

对于有多个度量期的情形可以分别定义各个度量期的实际利率。这时，用i_n表示从投资日算起第n个度量期的实际利率，则

$$i_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)}=\frac{I_n}{A(n-1)},\quad n\geqslant 1，n\text{为整数} \tag{1.1.3}$$

【例1.1.1】 某人到银行存入1 000元，第1年年末的存款余额为1 020元，第2年年末的存款余额为1 050元，问第1年、第2年的实际利率分别是多少？

解 显然 $A(0)=1\,000$

$A(1)=1\,020$

$A(2)=1\,050$

因此 $I_1=A(1)-A(0)=20$

$I_2=A(2)-A(1)=30$

$$i_1=\frac{I_1}{A(0)}=\frac{20}{1\,000}=2\%$$

$$i_2=\frac{I_2}{A(1)}=\frac{30}{1\,020}=2.941\%$$

故第 1 年的实际利率为 2%，第 2 年的实际利率为 2.941%。

1.1.2 单利和复利

前面讨论的实际利率是针对某一个度量期而言的，若投资期为多个或非整数个度量期，那么如何进行利息的度量呢？最重要的度量方式有单利和复利两种。

考虑投资一单位本金。如果其在 t 时的积累值为

$$a(t)=1+i\cdot t \tag{1.1.4}$$

则该笔投资以每期单利 i 计息，并将这样产生的利息称为单利。

如果其在 t 时的积累值为

$$a(t)=(1+i)^t \tag{1.1.5}$$

则该笔投资以每期复利 i 计息，并将这样产生的利息称为复利。

由上述定义可以知道：

(1) 若以每期单利 i 计息，那么，在投资期间，每一度量期产生的利息均为常数 i。不过，这并不意味着其实际利率为 i。事实上，按定义，对于整数 $n\geqslant 1$，第 n 期的实际利率为

$$\begin{aligned}i_n&=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}\\&=\frac{(1+in)-[1+i(n-1)]}{1+i(n-1)}\\&=\frac{i}{1+i(n-1)}\end{aligned}$$

显然，i_n 关于 n 单调递减。也就是说，常数的单利意味着递减的实际利率。

(2) 若以每期复利 i 计息，则在投资期间的不同时期将产生不同的利息。事

实上

$$
\begin{aligned}
I_n &= a(n) - a(n-1) \\
&= (1+i)^n - (1+i)^{n-1} \\
&= i \cdot (1+i)^{n-1} \\
&= i \cdot a(n-1)
\end{aligned}
$$

上面讨论的是单位本金，所以采用的是 $a(n)$ 而不是 $A(n)$，显然，I_n 关于 n 单调递增。而对于每期的实际利率，有

$$
i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{I_n}{a(n-1)} = i
$$

比较单利和复利可以发现，单利具有这样的性质：利息并不作为投资资金而再赚取利息；对复利来讲，在任何时候，本金和到该时为止得到的利息，总是用来投资以赚取更多的利息。

【例 1.1.2】 某银行以单利计息，年息为 2%，某人存入 5 000 元，问 5 年后的积累值是多少？

解 $A(5) = 5\ 000 \cdot a(5) = 5\ 000 \times (1 + 5 \times 2\%) = 5\ 000 \times 1.1 = 5\ 500$（元）

即 5 年后的积累值为 5 500 元。

【例 1.1.3】 如果例 1.1.2 中银行以复利计息，其他条件不变，问 5 年后的积累值是多少？

解 $A(5) = 5\ 000 \cdot a(5) = 5\ 000 \times (1 + 2\%)^5 = 5\ 520.4$（元）

即 5 年后的积累值为 5 520.4 元。

1.1.3 实际贴现率

一个度量期的实际贴现率为该度量期内取得的利息金额与期末投资可回收金额之比，通常用字母 d 来表示。

可以看出，实际贴现率 d 与实际利率 i 的定义十分类似。事实上，它们都是一个比例，而且都是利息除以投资金额，只不过实际利率 i 对应的投资金额是在期初实际付出的资金金额，即本金；而实际贴现率 d 对应的投资金额是期末投资者可收回的资金金额。

类似于实际利率，也可以定义任意度量期的实际贴现率，令 d_n 为从投资日算起第 n 个时期的实际贴现率，根据定义，有

$$d_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n)}=\frac{I_n}{A(n)},\quad n\geqslant 1,\ n\text{ 为整数} \tag{1.1.6}$$

式中，I_n 为贴现金额或利息金额。一般来说，像 I_n 一样，d_n 也可能随不同的时期而变化。然而，若在复利假设下，如果实际利率是常数，那么实际贴现率也是常数。

事实上，若每期实际利率为 i，那么对任意正整数，有

$$a(n)=(1+i)^n$$

$$d_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)}=\frac{(1+i)^n-(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}=\frac{i}{1+i}$$

与 n 无关，为常数，通常把这种情况下的贴现叫做复贴现，这是类似于复利的一个术语。

【例 1.1.4】 重新考虑例 1.1.1 中存款，若所述的条件不变，求第 1 年、第 2 年的实际贴现率。

解 $$d_1=\frac{A(1)-A(0)}{A(1)}=\frac{20}{1\,020}=1.961\%$$

$$d_2=\frac{A(2)-A(1)}{A(2)}=\frac{30}{1\,050}=2.857\%$$

实际利率和实际贴现率都是用来度量利息的，若某人以实际贴现率 d 借款 1，则实际上的本金为 $1-d$，而利息（贴现）金额为 d，若这笔业务的实际利率为 i，则

$$i=\frac{d}{1-d} \tag{1.1.7}$$

这表明，与实际贴现率 d 等价的实际利率为 $\frac{d}{1-d}$。将式（1.1.7）进行变化，有

$$i-id=d \tag{1.1.8}$$

$$d(1+i)=i \tag{1.1.9}$$

$$d=\frac{i}{1+i} \tag{1.1.10}$$

即与实际利率 i 等价的实际贴现率为 $\frac{i}{1+i}$。

贴现率 d 和折现因子 v 之间也存在着重要的关系。由式（1.1.10）可知

$$d=iv \tag{1.1.11}$$

对于式（1.1.11）我们可以这样理解：以贴现率 d 投资 1 赚得的在期初支付的利息是 d，如果该笔业务以利率度量，且等价的实际利率为 i，也就是说，这笔业务如果投资 1，将在期末赚得利息 i。而 i 在期初的现值为 iv，这个值显然应该等于 d。

由式（1.1.11），还有

$$d=\frac{i}{1+i}=\frac{1+i}{1+i}-\frac{1}{1+i}=1-v \tag{1.1.12}$$

或

$$v=1-d \tag{1.1.13}$$

显然，式（1.1.13）两端均可看成是期末支付 1 的现值。

另外，由于

$$d=iv=i\ (1-d)\ =i-id \tag{1.1.14}$$

即

$$i-d=id \tag{1.1.15}$$

式（1.1.14）也可理解为，某人可以借款 1 而在期末还 $1+i$；也可借 $1-d$ 而在期末还 1。两种选择本金的差为 d，因此，利息差应为 id，而实际上两种选择的利息差为 $i-d$，于是有式（1.1.15）。

1.2 名义利率和名义贴现率

前面讨论了实际利率和实际贴现率，“实际”一词的主要含义在于，利息为每个度量期支付一次，或在期初，或在期末，视具体情况而定。然而，实际中往往有很多在一个度量期中利息支付不止一次或在多个度量期利息才支付一次的情形。这时，我们称相应的一个度量期的利率和贴现率为“名义”的。

用符号 $i^{(m)}$ 记每一度量期付 m 次利息的名义利率。m 一般为大于 1 的整数，有时 m 也可以小于 1 或不为整数，只是这种情况很少见。所谓名义利率 $i^{(m)}$，是指每 $\frac{1}{m}$ 个度量期支付利息一次，而在每 $\frac{1}{m}$ 个度量期的实际利率为 $\frac{i^{(m)}}{m}$。也就是说，每一度量期 $i^{(m)}$ 的名义利率等价于每 $\frac{1}{m}$ 度量期 $\frac{i^{(m)}}{m}$ 的实际利率。例

如，若一年为一个度量期，$i^{(4)}=8\%$ 的名义利率指的是每季度的实际利率为 2%，即每年计息 4 次的年名义利率为 8%。

由等价的定义还可以得到 $i^{(m)}$与等价的实际利率 i 之间的关系，即

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \tag{1.2.1}$$

$$i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m-1 \tag{1.2.2}$$

$$i^{(m)}=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right] \tag{1.2.3}$$

图 1.2.1 形象地揭示了在一个度量期中以名义利率积累的过程，其中向右的对角线箭头可理解为加号，而向下的箭头则可看成等号。

时间点：	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\cdots$	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{m}{m}=1$
利　息：		$\frac{i^{(m)}}{m}\cdot 1$	$\frac{i^{(m)}}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$	$\cdots$	$\frac{i^{(m)}}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-2}$	$\frac{i^{(m)}}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-1}$
余　额：	1	$1+\frac{i^{(m)}}{m}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2$	$\cdots$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-1}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m=1+i$

图 1.2.1　名义利率图

类似地，用符号 $d^{(m)}$记每一度量期付 m 次利息的名义贴现率。所谓名义贴现率 $d^{(m)}$，是指每$\frac{1}{m}$个度量期支付利息一次，而在每$\frac{1}{m}$个度量期的实际贴现率为$\frac{d^{(m)}}{m}$。

名义贴现率 $d^{(m)}$是一种在每$\frac{1}{m}$个度量期初支付的利息的度量。正如 d 是在一个度量期初支付的利息的度量一样。类似于 $i^{(m)}$与 i 的关系的推导，由等价的含义也可推导出 $d^{(m)}$和 d 之间的关系。

事实上，若 $d^{(m)}$与 d 等价，则有

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \tag{1.2.4}$$

$$d=1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \tag{1.2.5}$$