



高等院校力学系列教材
Textbook Series in Mechanics for Higher Education

工程振动试验分析

Analysis of Experiments in Engineering Vibration

李德葆 陆秋海

Li Debao Lu Qiuhai



清华大学出版社



Springer



高等院校力学系列教材
Textbook Series in Mechanics for Higher Education

工程振动试验分析

Analysis of Experiments in Engineering Vibration

李德葆 陆秋海

Li Debao Lu Qiuhai



清华大学出版社
北京

 Springer

内 容 简 介

本书系统介绍了机械及工程结构的振动试验分析理论和测量技术。全书共12章。第1章至第5章阐述有关振动测量的基本概念、信号适调和数据采集、传感器技术及常规测量方法;第6、7章介绍振动信号的处理和分析基本理论、随机振动的基本概念和信号分析,增加了拉氏变换与Z变换的比较及随机减量法的内容;第8、9章着重介绍频响分析和模态分析的物理概念和最基本的模态分析方法,并专题介绍了应变模态理论;第10、11章主要阐述振动和冲击隔离理论与方法、机械故障信号分析和运行监测;第12章介绍结构振动试验的模型理论,并专题介绍了模型模态分析的相似理论。全书由浅入深,着重基本概念和实验技术的介绍,系统引入了现代振动实验和分析技术,所引图表和公式均充分考虑了工程可应用性。

本书可作为力学、航天航空、机械、精密仪器、汽车、动力、土木、工程物理等专业的高年级本科生和研究生的教材或参考用书,也可供从事相关研究和应用的广大科研和工程技术人员学习与参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13901104297 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

工程振动试验分析/李德葆,陆秋海著. —北京:清华大学出版社,2004.9

(高等院校力学系列教材)

ISBN 7-302-09281-8

I.工… II.①李… ②陆… III.工程力学—振动试验—高等学校—教材 IV.TB123

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第086073号

出版者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社总机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

责任编辑:陈朝晖

印刷者:清华大学印刷厂

装订者:三河市新茂装订有限公司

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:175×245 印张:24.25 字数:484千字

版 次:2004年9月第1版 2004年9月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-09281-8/O·391

印 数:1~5000

定 价:35.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

前 言

20 世纪是科学技术迅猛发展的时代。特别是 20 世纪 60 年代以后,高速大容量电子计算机的发展和信息科学带动了所有工程学科的发展。有限元法及 CAD, CAM 的应用使产品的设计和开发周期大为缩短。与此同时,在新结构、新产品的设计和开发阶段进行工程试验以及在工程结构及机械产品运行过程中进行运行状态监测及故障诊断,已成为评价结构及产品的品质、改进设计及预测其性能不可或缺的重要手段。

振动是一切运动机械以及承受动态载荷的工程结构所具有的运动现象。振动信号中包含着机械及结构的内在特性和运行状况的信息。振动状态还体现着结构运行的品质,如车辆、航空航天设备等运载工具的安全性及舒适性;桥梁、水坝以及其他大型结构的抗灾害的能力及寿命等。因此,振动测量和分析已成为最为常用、有效的基本试验手段之一,是相关行业的工程技术人员及科研人员都要掌握的基本技术手段和必备的知识。

早自 20 世纪 70 年代起,清华大学工程力学系就开设了振动测量和试验分析课程,并于 1987 年出版了《振动测试与应变电测基础》教材。经过多年的教学实践,在此教材的基础上,于 1992 年出版了《振动测量与试验分析》一书。考虑到当时实验应力分析已单独开设课程,同时考虑到振动测量和试验分析方面的新发展,此书已不包括应变测量部分,而在振动分析方面增加了较多的内容,以适应学科发展和生产发展的新需要。此后,又过去了十年,世界已进入 21 世纪,科学技术又有了新的发展,并且科教兴国已成为我国的发展方针。我们在前两本书的基础上,结合近三十年的教学经验和学科的发展成果,修订和编著了《工程振动试验分析》,由清华大学出版社和 Springer 出版社共同出版。

本书共分 12 章。第 1 章至第 5 章阐述有关振动测量的基本概念,传感器技术及常规测量方法,大体上与《振动测量与试验分析》一书变化不大,但增加了第 3 章“若干现代传感器介绍”和第 4 章“信号适调和数据采集”,以适应计算机应用和测试设备发展的需要。其中第 4 章主要根据 IOTECH 公司 1998 年的 *Signal Conditioning & PC-based Data Acquisition Handbook* 一书中的内容改写。第 6 章“振动信号的处理和分析(基本理论)”和第 7 章“随机振动的基本概念和信号分析”在内容上进行了重组和适量的扩充,在傅里叶变换部分进行了重新改写;增加了拉普拉斯变换与 Z 变换的比较;新增了随机减量法的内容。第 8 章“机械阻抗法和频响分析”和第 9 章“多自由度系统模态分析与试验”,着重介绍频响分析和模态分析的物理概念和最基本的模态分析方法。这两章内容可使读者对响应分析及动特性参数识别有一个较为完整的基本概念并掌握初步的试验方法,希望更进一步研究模态分析及其应用的读者可以研读更专门的教材。考虑到在许多工程设计中,人们对动态应变问题的关心,在第 9 章有一节阐述了应变模态分析的基本概念和方法。第 10 章阐述振动和冲击控制的基本概念和方法,这一章基本上重新编写,主要阐述振动和冲击隔离理论和方法,加强了理论概念的阐述,所引图和公式充分考虑了工程可应用性。第 11 章为机械故障信号分析和运行监测,简明地介绍了各类机械故障的特点及分析方法,着重介绍频谱分析方法,包括信号调制现象及边频分析,倒频谱分析;考虑到现代机械及工程结构在生产和运行中的安全性及寿命越来越成为人们关心的课题,本章中对这一问题也作了简明的介绍。第 12 章介绍结构振动试验的模型理论。模型理论是一个古老的课题,有很多资料和著作可资参考,本章着重对结构在振动试验中有关的模型设计、模型试验、模型试验结果对原型性能的预测等问题作全貌性介绍;注意到现代模态试验的发展,本章中有一节专门介绍模型的模态分析。

前面我们回忆了在总结教学经验及积累资料的基础上得以发展成为本书的 30 年过程。在这一过程中我们得到了许多同事以及学习本课程同学的帮助,特别应该提到的是,曾是《振动测试与应变电测基础》以及《振动测量与试验分析》合著者的沈观林、冯仁贤及张元润三位老师,他们虽然没有参加本书的直接编写,但是他们在前两本书中所作的贡献对于本书的作用是非常重要的,作者谨此深表感谢。

作 者

2004 年 8 月

目 录

第 1 章 振动测试概论	1
1-1 振动测试的一般意义	1
1-2 振动系统的力学模型和振动参数	2
1-3 简谐振动的表示方法	6
1-4 周期振动的峰值、有效值和平均值	9
1-5 周期振动的频谱表示法	12
1-6 振动测量的若干术语	13
1-7 振动测量仪器的主要性能指标	15
1-8 对数标尺与分贝表示法	19
第 2 章 振动信号传感器	24
2-1 惯性式传感器的力学原理	24
2-2 位移计型惯性式拾振器的构成特点	26
2-3 动圈型磁电式速度拾振器	28
2-4 加速度计的构成特点	30
2-5 压电式加速度计及其应用问题	33
2-6 伺服式加速度传感器	44
2-7 关于周期信号测量中波形畸变的讨论	48
2-8 振动传感器的标定	51
2-9 电涡流传感器	56
2-10 其他常用传感器和测量方法	62

第 3 章	若干现代传感器介绍	66
3-1	薄膜网格式压力传感器	66
3-2	智能传感器(Smart Sensor)	69
3-3	光学干涉法测量简谐振动位移	71
3-4	激光多普勒外差干涉法测量位移、角度和速度	73
3-5	光纤陀螺	78
3-6	光纤加速度传感器	80
第 4 章	信号适调与数据采集	82
4-1	多路复用技术(Multiplexing)	83
4-2	通用放大(General Amplification)	85
4-3	隔离(Isolation)	94
4-4	模数转换(Analog-to-Digital Converters)	97
第 5 章	机械振动的运动量和动特性参数的常用测量方法	103
5-1	概述	103
5-2	简谐振动频率的测量	104
5-3	两个同频简谐振动相位差的测量	108
5-4	振动系统固有频率的测量	113
5-5	衰减系数及相对阻尼系数的测量	123
5-6	质量或刚度的测量	130
5-7	周期振动总振级的测量	132
5-8	周期振动的频谱分析	133
第 6 章	振动信号的处理和分析(基本理论)	139
6-1	信号的分类	139
6-2	傅里叶变换	140
6-3	离散傅氏变换	149
6-4	快速傅氏变换	159
6-5	选带傅氏分析(ZOOM-FFT)	161
6-6	功率谱与功率谱密度分析	163
6-7	线性系统的输入与输出关系	166
6-8	拉普拉斯变换与 Z 变换	168

第 7 章 随机振动的基本概念和信号分析	173
7-1 随机振动的统计特性	175
7-2 相关分析	185
7-3 功率谱密度分析	190
7-4 随机减量法(Random Decrement Technique)	200
第 8 章 机械阻抗法与频响分析	205
8-1 振动系统机械阻抗和导纳的概念	206
8-2 单自由度系统的频响特性和导纳曲线	214
8-3 单自由度约束系统导纳的五种曲线及其特点	222
8-4 五种类型的导纳曲线的比较	227
8-5 具有结构阻尼的情况	230
8-6 导纳曲线分析法原理	234
第 9 章 多自由度系统模态分析与试验	240
9-1 多自由系统响应的模态迭加法	240
9-2 振动系统的物理模型和模态模型间的转换	242
9-3 频响函数	243
9-4 频响函数的图像	246
9-5 频响函数的留数表示法	251
9-6 复模态问题	255
9-7 模态试验准备及试验设计	256
9-8 模态试验常用激励方法	261
9-9 单点宽频带激振条件下结构系统频响函数的估计	266
9-10 频域模态参数识别——单模态识别法	271
9-11 模态振型标准化	279
9-12 频域模态参数识别——多模态识别法	281
9-13 应变模态分析及参数识别	283
第 10 章 振动和冲击控制的基本概念和方法	289
10-1 振源的隔离(主动隔振)	289
10-2 被动隔振(设备隔振)	294
10-3 振动隔离设计	295
10-4 冲击隔离	297

10-5	动力消振器	307
10-6	阻尼处理	314
第 11 章	机械故障信号的测量分析和运行监测	319
11-1	故障信号测量中通常应考虑的问题	319
11-2	信号调制现象及边频分析	323
11-3	倒频谱分析	327
11-4	旋转机械的故障信号分析	331
11-5	齿轮箱故障信号分析	336
11-6	工业机械的运行监测和故障诊断	339
第 12 章	振动结构的模型理论	346
12-1	引言	346
12-2	量纲分析	347
12-3	模型理论	356
12-4	实验模态分析中的模型律	364
12-5	关于畸变模型及模型试验中的若干其他问题	372
	主要参考文献	376

第 1 章

振动测试概论

1-1 振动测试的一般意义

狭义地说,振动测试在于通过传感器、放大仪器以及显示或记录仪表,测量运动机械或工程结构在外界激励(包括环境激励)或运行工况中其重要部位的位移、速度、加速度等运动量,从而了解机械或结构的工作状态。广义地说,通过运动量的测量,我们希望了解机械或结构的动特性,如固有频率、固有振型、阻尼以及动刚度等特性参数,为机械或工程结构的动力设计服务。

因此,振动测试包括运动量的测量和动特性试验两个方面。后者通常用所谓动特性参数来表达,因而动特性试验归结为动特性参数的试验识别。

无论是生产机械、运输机械或工程结构,均日益向高速、高效、高精度和大型化发展。在许多情况下,限制其振动效应或提高其抗振性能成为设计成功与否的关键。在这种情况下,振动测试和设计计算是相辅相成的两种手段。在设计过程中,往往要通过模型试验或对已有相近设备的试验来考验计算方法的可靠性或改进计算方法。某些参数,如阻抗则只能通过测试来提供。在新设备建成后,则要通过测试来鉴定其性能,必要时可直接用试验的方法建立其动力响应模型,进行结构修改模拟分析,为结构修改提供依据。

在多数情况下,振动常常是伴随着正常运行产生的一种消极的甚至是有害的现象,振动测试分析着眼于尽量降低或消除其影响。然而,在有些情况下,振动和冲击

是可以利用的。典型的例子如振动传输、振动筛、机械锤、振动搅拌器等。在这种情况下,振动试验的目的在于如何产生所需要的振动和冲击效应。

运动机械在运行中必然会产生振动。即使是那些我们视为不运动的工程结构,在环境激励的影响下,也会发生振动。振动信号可以反映机械的运行状态和结构的损伤。上世纪90年代,利用振动测试对运行机械的故障进行诊断和对工程结构的损伤进行检测已为众多工程师和科研工作者所重视。运行监测和故障诊断已逐渐成为由振动理论、振动测试和信号分析相结合而生长出来的一门重要的学科。其中,振动测量和试验分析起着关键的作用。

如上所说,振动测量和振动试验分析在机械工程和工程结构部门有着广泛的应用。它综合了传感器、电子学、信号分析以及现代结构振动理论等多方面的学术成果,形成了自身的理论、方法、实践技术和学科体系。特别是上世纪60年代快速傅里叶变换(FFT)的应用及以后的电子技术和计算机技术的飞速发展,对振动测量和振动试验分析起了相当大的推动作用。从这个意义上说,振动测试和分析不仅是一门应用性学科,而且也应属于与当代新技术紧密相连的高技术学科范畴。

1-2 振动系统的力学模型和振动参数

一个实际机械或工程结构,在研究其振动特性或振动状态时,总要把它做某种简化,抽象出其本质,形成一个理想化的力学模型。模型的特点又往往以若干重要参数来表达。

一、单自由度系统

一个无质量的弹簧支持一个无弹性的质量,就形成了单自由度系统的力学模型,如图1-1所示。这一模型的参数便是质量 m 和刚度 k 。该系统受到外界的一个初始干扰之后,便产生振动。在一个相对较短的时间内研究它的振动状态时,可以认为它是一种无阻尼的自由振动。其质量块的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1-1)$$

解上述方程时,可令 $x = X_m \sin \Omega t$,代入原方程得

$$(k - m\Omega^2) X_m \sin \Omega t = 0$$

上式 $X_m \neq 0$ 。则应要求

$$k - m\Omega^2 = 0 \quad (1-2)$$

由此解得

$$\Omega = \sqrt{k/m} \quad (1-3)$$

Ω 称为单自由度系统的无阻尼自由振动的固有频率。 Ω 是该振动系统的又一个重要参数,但它是由 k 和 m 所决定的,是一种导出参数。

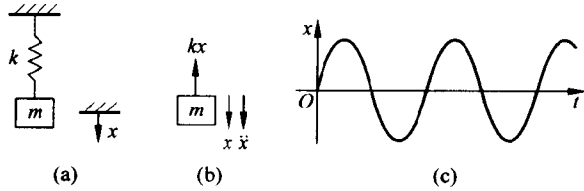


图 1-1 有阻尼的单自由度系统

无阻尼系统一旦开始振动,就将永远振动下去。事实上,一切实际系统在开始作自由振动之后,由于摩擦等原因,振动幅度必将随着时间的增长而逐渐衰减。为了反映这种衰减特性,引进了阻尼系数,定义为阻尼力和运动速度之比。于是,质量块的运动微分方程变为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

或改写作

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\left(\frac{c}{2m}\right)\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ \ddot{x} + 2n\dot{x} + \Omega^2 x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中

$$n = \frac{c}{2m} \quad (1-5)$$

称为衰减系数,它由 m 及 c 所确定。

为解上述微分方程,可令

$$x = Xe^{st}$$

代入方程后可得

$$(s^2 + 2ns + \Omega^2)Xe^{st} = 0$$

该式有解的条件是

$$s^2 + 2ns + \Omega^2 = 0 \quad (1-6)$$

上式称为该振动系统的特征方程。该式的根 s 称为特征根。由式(1-6)可得

$$s = -n \pm \sqrt{n^2 - \Omega^2} = -n \pm \Omega \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1-7)$$

式中

$$\zeta = \frac{n}{\Omega} = \frac{c/2m}{\sqrt{k/m}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{c_c} \quad (1-8)$$

我们把 $c_c = 2\sqrt{mk}$ 称为临界阻尼系数,它的意义将在下面加以讨论。 ζ 是 c 和 c_c 之

比,因而称之为相对阻尼系数。

由式(1-7)可见,当 m 和 k 一定之后, s 值取决于 ζ , 即取决于 c 。

当 $c < c_c$ 时, $\zeta < 1$, 式(1-7)变为

$$s_{1,2} = -n \pm j\Omega \sqrt{1-\zeta^2}$$

由此可得微分方程的解为

$$x = e^{-nt} (X_1 e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t} + X_2 e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t}) \quad (1-9)$$

利用欧拉(Euler)公式

$$e^{\pm j\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t} = \cos \sqrt{1-\zeta^2}\Omega t \pm j \sin \sqrt{1-\zeta^2}\Omega t$$

最后,可将式(1-9)化为

$$x = X e^{-nt} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t + \alpha) \quad (1-10)$$

该式随时间变化如图 1-2(c)所示。

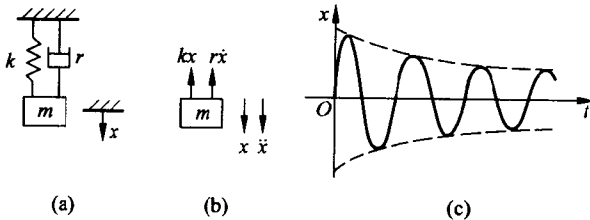


图 1-2 有阻尼的单自由度系统

当 $c = c_c$ 时, $\zeta = 1, n = \Omega, s_1 = s_2 = -\Omega$

微分方程的解则为

$$x = e^{-nt} (X_1 + X_2 t) \quad (1-11)$$

该式已不表示振动。

而当 $c > c_c$ 时, $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$

$$x = X_1 e^{(-n - a\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + X_2 e^{(-n + a\sqrt{\zeta^2 - 1})t} \quad (1-12)$$

显然式(1-12)也不表示振动。可见, $c = c_c$ 是系统能否实现自由振动的分界点, 因而称它为临界阻尼系数。

到此为止, 对于单自由度系统, 我们已经引入了三个基本参数, 即质量 m 、刚度 k 、阻尼 c 。固有频率 Ω 由系统的 m 及 k 确定。关于阻尼, 我们还引进了相对阻尼系数 ζ 的概念。临界阻尼系数 c_c 虽然具有阻尼的量纲, 但并非系统实际存在的阻尼, 它只是一种重要的参考量。至于衰减系数 n , 也是一种重要的导出参数, 它由基本参数 m 及 c 所决定。

二、两自由度系统

两自由度系统的力学模型如图 1-3(a)所示。先不考虑阻尼,则系统的自由振动微分方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

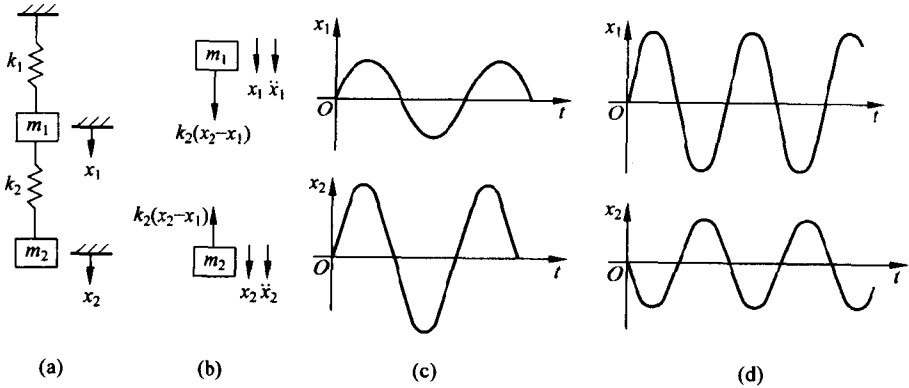


图 1-3 两自由度系统

写成矩阵形式便是

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1-13)$$

令

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\Omega t} \quad (1-14)$$

代入上式得

$$\left\{ -\Omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\Omega t} = \{0\} \quad (1-15)$$

上式有解的条件是

$$\left| -\Omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (1-16)$$

式(1-16)称为两自由度系统的特征方程,由此可解出两个特征值为

$$\left. \begin{matrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}} \right] \quad (1-17)$$

将以上两个特征值依次代入式(1-15)可解得

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = A_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{k_2}{k_2 - \Omega_1^2 m_2} \end{Bmatrix} \quad (1-18)$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = A_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{k_2}{k_2 - \Omega_2^2 m_2} \end{Bmatrix} \quad (1-19)$$

式中 A_1, A_2 为两个任意常数。以上所得两个列阵依次称为 Ω_1^2 和 Ω_2^2 所对应的特征矢量。

利用欧拉公式按照式(1-9)到式(1-10)的处理方法,可得两种可能的固有运动状态为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 \sin \Omega_1 t \quad (1-20)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 \sin \Omega_2 t \quad (1-21)$$

可见, Ω_1, Ω_2 是系统的两个固有频率,而由式(1-18)及式(1-19)所得的两个列阵则分别是两种运动状态时的振型。在这两种自由振动状态时两质量块的振动波形如图 1-3 的(c),(d)所示。

由以上讨论可见,对于两自由度系统,有两个固有频率,对应于每一个固有频率,有各自的振型。此处引入的振型概念,反映多自由度系统振动时,各点的运动量不仅是时间的函数,而且是空间的函数。

1-3 简谐振动的表示方法

在静态测量中,被测量无论是位移、应变或应力,它们只是位置的函数。在动态测量中,位移、速度或加速度,既是位置的函数,又是时间的函数。进行振动测量时,总要从个别点的测量开始。对于一个固定点来说,振动量便仅是时间的函数了。

最基本的振动是简谐振动,在简谐振动中, x 和 t 的关系可表示为

$$x = X_m \sin \omega t$$

当然,余弦函数也是一种简谐运动,但我们在以后只运用正弦函数的表达式,若遇有余弦函数,则将其写成正弦函数的表达形式:

$$\cos \omega t = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

一、简谐振动的矢量表示法

为了研究问题方便,有时用一个旋转矢量来代表简谐振动。例如某一简谐振动为

$$x = X_m \sin(\omega t + \alpha) \quad (1-22)$$

可以用图 1-4 所示的旋转矢量 x 来表示,即

$$x = X_m \angle (\omega t + \alpha) \quad (1-23)$$

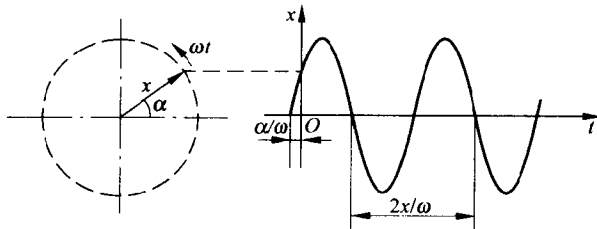


图 1-4 简谐振动的旋转矢量表示法

这意味着:以 α 为初始角而以 ω 为角速度逆时针旋转,大小为 X_m 的矢量在纵轴上的投影为一正弦函数。对于余弦函数,按照我们的规定,一律先化作正弦函数,然后再用矢量表示。

二、简谐振动的复数表示法

在复平面上,一个复数 \bar{x} ,可看成复平面上的一个矢量,即

$$\bar{x} = X_m (\cos\theta + j\sin\theta) = X_m e^{j\theta}$$

若 $\theta = \omega t + \alpha$,则上式变为

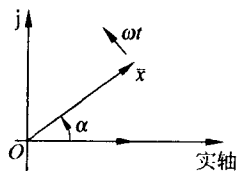
$$\bar{x} = X_m [\cos(\omega t + \alpha) + j\sin(\omega t + \alpha)] = X_m e^{j\alpha} e^{j\omega t}$$

可见,上述复数旋转矢量的虚部为正弦分量。于是简谐振动为

$$x = X_m \sin(\omega t + \alpha) = I_m(\bar{x})$$

可用复数

$$\bar{x} = X_m e^{j\alpha} e^{j\omega t}$$



来表达(图 1-5),它的意义是:复数 \bar{x} 的虚部分量即为所取的简谐振动函数。

同样,根据我们的规定,对于余弦函数,须先化作正弦函数,再用复数表示。

三、简谐振动时间波形的参量

简谐振动为

$$x = X_m \sin(\omega t + \alpha)$$

它的时间波形取决于三个参数,即振幅 X_m ,角速度 ω 以及初相角 α 。若式 (1-22) 表示位移波形,那么速度和加速度波形分别为

$$v = \dot{x} = \omega X_m \cos(\omega t + \alpha) = \omega X_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= V_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = V_m \sin(\omega t + \alpha')$$

$$a = \dot{v} = -\omega^2 X_m \sin(\omega t + \alpha) = \omega^2 X_m \sin(\omega t + \alpha + \pi)$$

$$= A_m \sin(\omega t + \alpha + \pi) = A_m \sin(\omega t + \alpha'')$$

因此,简谐振动的位移、速度、加速度的幅值之间的关系为

$$A_m = \omega V_m = \omega^2 X_m$$

或

$$V_m = \frac{A_m}{\omega} = \omega X_m \quad (1-24)$$

在振动测量中,位移幅值用 mm 表示,速度的单位则用 mm/s 表示。依此类推,加速度幅值应该用 mm/s² 表示。但在实用中,加速度的单位往往用 g 来表达。 g 是重力加速度,一般认为

$$1g = 9800 \text{ mm/s}^2$$

角速度 ω 又称为圆频率,它的单位是 rad/s,它和周期之间的关系为

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f \quad (1-25)$$

式中 f 为振动频率,它的单位是 1/s,是周期的倒数,即 $f=1/T$ 。周期 T 的单位则为 s。

$\omega t + \alpha$ 称为初相位。相位和初相位的单位都是 rad。

四、位移、速度和加速度之间的相位关系

简谐振动的位移、速度和加速度的三角函数表达式为

$$\left. \begin{aligned} x &= X_m \sin(\omega t + \alpha_x) \\ v &= V_m \sin(\omega t + \alpha_v) \\ a &= A_m \sin(\omega t + \alpha_a) \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

式中 $\omega X_m = V_m = A_m / \omega$, 相角之间的关系则为