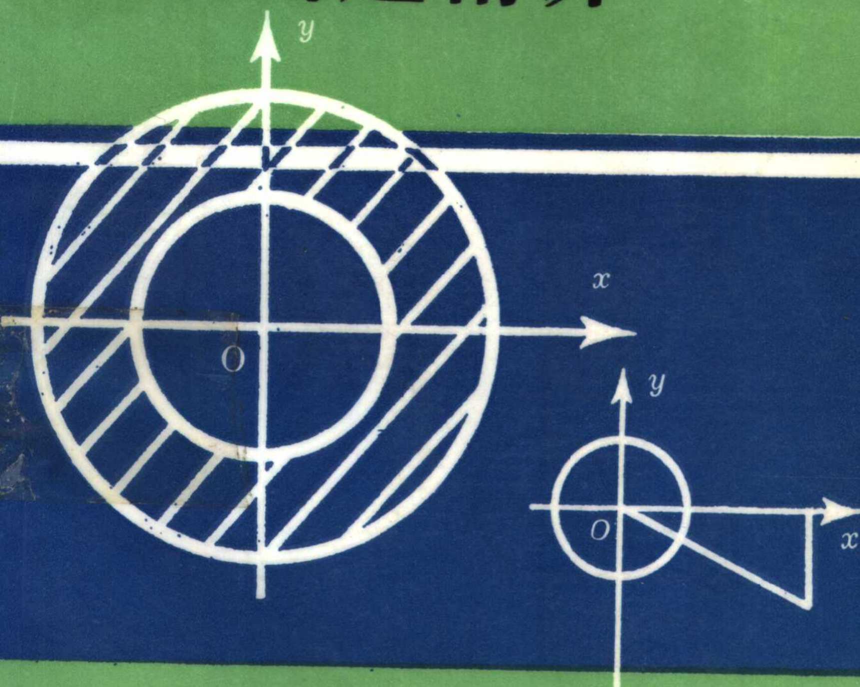
闻厚贵 叶德三 陈先枝 编著

初中数学竞赛专题精讲



北京师范学院出版社

初中数学竞赛专题精讲

周厚贵　叶德三　陈先枝　编著

北京师范学

(京)新登字208号

初中数学竞赛专题精讲
闻厚贵　叶德三　陈先枝　编著
*
北京师范学院出版社出版发行
(北京阜成门外花园村)
全国新华书店总经销
国防科工委印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：12　字数：250千
1992年2月北京第1版　1992年2月北京第1次印刷
印数：0,001—31000册
ISBN7—81014—593—2/G·484
定价：5.00元

序 言

从1978年开始，我国的数学竞赛重新恢复，至今虽然只有十多年时间，但是现在每年都有数以万计的小学、初中和高中学生参加全国的或地区的各种层次的数学竞赛。目前，各地数学奥林匹克学校和培训班日益增多，“竞赛数学”的生命力也日臻增强，这不仅为广大中小学生极大地丰富了第二课堂，同时也为他们开辟了施展数学才华的广阔天地。广大数学工作者无不为今天中小学生爱好数学的积极性感到欢欣鼓舞。

数学竞赛题涉及的知识面广，解题方法比较灵活，虽然它们并不包括高等数学的内容，但是有些竞赛题却有高等数学的背景，还有一些题的解法蕴含了高等数学中常见的思想方法。另一方面，数学竞赛要求参加者具有更广泛的初等数学知识，这些内容不是中小学数学教材所能包括的。因此，为了使中小学生学好数学，特别是为满足那些数学爱好者在数学竞赛中一显身手的愿望、广大中小学师生迫切需要内容详尽而又有深度的参考资料，提供给他们为学生在参加数学竞赛前作为辅导和学习之用。

北京师范学院出版社组织了三位多年从事数学竞赛辅导和研究的骨干教师编写出版了《初中数学竞赛专题精讲》一书，正是为了适应这种需要。

本书有三个明显的特点：一是它覆盖了初中各种不同层

次的数学竞赛内容，能够适应初中各年级学生的要求；二是例题的选择具有典型性、代表性和系统性，编者参阅了大量国内外数学竞赛的资料，选取了过去到最近一年的数学竞赛题，体现了较好的完备性；三是本书对每道例题进行了符合逻辑的推理分析，既便于学生自学，同时也能帮助他们提高分析问题和解决问题的能力。

我热忱地向全国广大初中师生推荐这本书。我深信，本书的读者一定能从这本书中得到启发和提高。

梅向明

一九九一年十月十八日

于北京师范学院

目　　录

第一讲　数 字 问 题

数字问题在初中的数学竞赛中经常出现，其题型多样、涉及的知识范围较广，它需要解题者细心地观察，大胆地探索。现分类叙述如下：

一、整数的多项式表示法

一个十进制的 $n+1$ 位整数 N 可以表示为：

$$N=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0.$$

其中 a_i 都是整数，$0\leqslant a_i\leqslant9\ (i=0,1,\cdots,n)$ 且 $a_n\neq0$；整数 N 最左边的一位数字 a_n 叫做整数的首位数字，最右边的一位数字 a_0 叫做整数的末位数字；而且满足 $10^n\leqslant N<10^{n+1}$。

二、平方数的性质

1. 平方数的形式具有下列形式之一：$3m$，$3m+1$；

2. 平方数的形式具有下列形式之一：$5m$，$5m+1$，$5m+4$；

3. 平方数的形式具有下列形式之一：$16m$，$8m+1$，$16m+4$；

（性质1、2、3中 m 均为自然数或零）。

4. 平方数的末位数字仅可为0、1、4、5、6、9六个数字之一；

5. 奇数的平方，其个位数字为奇数，十位数字为偶数；

6. a^2b 为平方数的充要条件是 b 为平方数。

三、乘方的末位数性质

1. a^n的末位数字等于a的末位数字的n次方的末位数字；

2. a^n的末位数字循环出现，各有它的周期。如2^n的末位数字出现2的周期是4，6^n的末位数字出现6的周期是1，9^n出现9的周期是2等。所有这些周期的最小公倍数是4。即若a^n的末位数字是b，则a^{4m+n}的末位数字也是b。

四、整数的数码与整除的性质

1. 一数能被3（或9）整除，只要它的各个数码的和能被3（或9）整除；

2. 一数能被4（或25）整除，只要它的最末两位数字所成的数能被4（或25）整除；

3. 一数能被2（或5）整除，只要它的最末位数字能被2（或5）整除；

4. 一数能被8（或125）整除，只要它的最末三位数字所成之数能被8（或125）整除；

5. 一数能被11整除，只要它的奇数位数字之和与偶数位数字之和的差能被11整除。

例1 一个六位数，如果它的前三位数码与后三位数码完全相同，顺序也相同，则7、11、13是此六位数的约数。（1983年湖北省初中赛题）

分析 由于7、11、13互质，本题即为证明$7\times11\times13=1001$为此六位数的约数。可将此数用整数的多项式表示法表示，从而推断结论。

证明 设此数为$N=\overline{abcabc}$ $(a\neq0)$，则有

$$N=a\times10^5+b\times10^4+c\times10^3+a\times10^2+b\times10+c$$

$=100100a+10010b+1001c$

$=1001(100a+10b+c)$

$=7\times11\times13(100a+10b+c)$

由于 a、b、c 均为整数，所以$100a+10b+c$也是整数，按整数定义，7、11、13都是N的约数。

例 2 设有六位数$\overline{1abcde}$乘以 3 后，变为$\overline{abcde1}$，求这个数。(1956年上海市数学竞赛题)

分析 由于$\overline{abcde}$在变形中顺序没有变化，因此可设$\overline{abcde}=x$。

解 令五位数$\overline{abcde}=x$，则$\overline{1abcde}=10^5+x$，$\overline{abcde1}=10x+1$，故$3(10^5+x)=10x+1$，$x=42857$。所以这个数为142857。

例 3 求一切正整数，它的首位数码是6，去掉这个6，所成的整数是原数的$\frac{1}{25}$。(1970年加拿大第二届中学生数学赛题)

解 首位数码为 6 的正整数具有的形式为：$6\times10^n+m$ $(0\leqslant m<10^n)$，故有$m=\frac{1}{25}(6\times10^n+m)$。即$m=2^{n-2}5^n$，故所求的数具有的形式为：$6\times10^n+2^{n-2}5^n=6\times10^n+10^{n-2}5^2=625\times10^{n-2}$，即625，6250，62500，…。

例 4 把一个四位数的各位数字按反序排成一个新的四位数，正好是原数的 4 倍，求原数。

解 设原数为$\overline{abcd}$，则新数为$\overline{dcba}$(a、d均不等于 0)。根据题意得：

$$4(1000a+100b+10c+d)=1000d+100c+10b+a \quad ①$$

$\because$ ①式左边$>4\times1000a$，右边$<(d+1)\times1000$，$\therefore 4\times1000a<(d+1)\times1000$。$\therefore 4a<d+1$。$\because d\leqslant9$，$\therefore 4a<10$。$\because a\neq0$且新数为原数的 4 倍是偶数，$\therefore a=2$。由$4a<d+1$，得：$d>4a-1=7$，且 d 为原数的末位数字，则它的 4 倍的末位数字是新数的末位数字 $a=2$，故 $d=8$。

将 $a=2$、$d=8$ 代入①式得 $13b+1=2c$。

$\because c\leqslant9$，$\therefore 13b\leqslant17$，且由 $13b+1=2c$ 知 b 为奇数，$\therefore b=1$、$c=7$，所求之数为2178。

处理数字问题通常可用整数的多项式表示法来表示数，它给解题能带来极大的方便，往往也是解此类问题的可行途径。例 4 则还包含了末位数字、奇偶性等方面知识的综合应用。

例 5 求证：11、111、1111、…，都不是一个完全平方数。(1978年安徽集训练习题)

分析 欲证它们不是完全平方数，由于它们是奇数，只要证明它们不符合奇数的完全平方数的特点即可。

证明 由于11、111、1111、…，均是奇数，故只能为一奇数的平方，而奇数的平方，其十位数字应是偶数，而这些数十位数字均为 1 。

故它们都不是完全平方数。

例 6 数码不同的两位数AB，有$\overline{AB}^2-\overline{BA}^2=k^2$ (k 为自然数)，试求此两位数。

分析 求$\overline{AB}$即求 A、B，由于$\overline{AB}=10A+B$，$\overline{BA}=10B+A$，可将原式转化为关于 A、B 的方程，再根据完全平方数和数码特点求之。

解 $\because \overline{AB}=10A+B$，$\overline{BA}=10B+A$，

∴ $\overline{AB}^2-\overline{BA}^2=(10A+B)^2-(10B+A)^2$

$$=(11A+11B)(9A-9B)$$

$$=3^2\times 11(A+B)(A-B)=k^2,$$

∴ $11(A+B)(A-B)$为一完全平方数。

∵ $0<A-B<9$，（A、B不同），∴ $11|A+B$。

∵ $0<A+B<18$，∴ $A+B=11$，∴ $k^2=3^2\times 11^2(A-B)$，∴ $A-B$为完全平方数。且$0<A-B<9$，∴ $A-B=1$ 或 4。故 $A+B=11$ 且 $A-B=1$，得 $A=6$、$B=5$ 或 $A+B=11$，且 $A-B=4$(无解)，故此两位数为 65。

此题运用了 a^2b 为 平方数的充要条件是 b 为平方数的性质。

例 7 若n为自然数，和数 $1981^n+1982^n+1983^n+1984^n+1985^n$ 不能被 5 整除，那么必须满足什么条件？并说明理由.

分析 由于 $5|1985^n$，故 n 满足的条件为 $5\nmid(1981^n+1982^n+1983^n+1984^n)$，即 n 满足的条件为 1981^n、1982^n、1983^n、1984^n 的末位数字的和不为 0 和 5。因此可将 n 分成 $4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 来讨论。

解 ∵ $5|1985^n$，且 $5\nmid(1981^n+1982^n+1983^n+1984^n+1985^n)$，∴ $5\nmid(1981^n+1982^n+1983^n+1984^n)$。

当 $n=4k$(k 为自然数)时1981^n、1982^n、1983^n、1984^n 的末位数字分别为 1、6、1、6。则 $1981^n+1982^n+1983^n+1984^n$ 的末位数字为 4，故 $5\nmid(1981^n+1982^n+1983^n+1984^n)$；

当 $n=4k+1$ 时（k 为非负整数）$1981^n+1982^n+1983^n+1984^n$ 的末位数字为 $(1+2+3+4=)10$；

当 $n=4k+2$ 时（k 为非负整数）$1981^n+1982^n+1983^n+1984^n$ 的末位数字为 $(1+4+9+6=)20$；

当 $n=4k+3$ 时（k 为非负整数）$1981^n+1982^n+1983^n+1984^n$ 的末位数字为 $(1+8+7+4=)20$。

均有 $5|(1981^n+1982^n+1983^n+1984^n)$，故只有 n 为 4 的倍数时 $5\nmid(1981^n+1982^n+1983^n+1984^n+1985^n)$。

处理乘方（尤其是高次方）的和、差的整除问题时，运用 a^n 的末位数字与 a^{4m+n} 的末位数字相同的性质会带来方便。

例 8 设 3^{10000} 的各位数字和为 A，A 的各位数字和为 B，B 的各位数字和为 C，求 C。（1978 年安徽省数学竞赛优胜者集训练习题）

分析 求 C 需求 A，但 A 难以求得，因为 $3^{10000}<10^{5000}$，故 3^{10000} 的位数少于 5001，由此限定 $A<5001\times 9$。同理可确定 B、C 的范围。又 $9|3^{10000}$，故 $9|A$、$9|B$、$9|C$，结合此求出 C。

解 $\because 3^{10000}=9^{5000}<10^{5000}$，$\therefore 3^{10000}$ 的位数少于 5001，$\therefore A<5001\times 9=45009$，$\therefore A$ 至多是一个 5 位数，$\therefore B<4+4\times 9=40$，$\therefore C\leqslant 3+9=12$。$\because 9|3^{10000}$，$\therefore C$ 的各位数字和为 9 的倍数，$\therefore C=9$。

例 6、例 8 的解答，除了应用整除的性质外，还应用了简单不等式作“估计”。

例 9 将自然数 N 接写在每一个自然数的右边（例如将 2 接写在 35 的右边得 352），如果得到的新数，都能被 N 整除，那么，N 称为魔术数。在小于 130 的自然数中，魔术数的个数为____。（1986年全国初中联赛题）

分析 可设魔术数为 N，任意自然数为 P。则接后的数为 $\overline{PN}=P\times 10^m+N$（$m$ 为 N 的位数），从而对满足 $N<130$ 的 m 进行验算，求得魔术数的个数。

解 任取自然数P，魔术数N。设N为m位数，则$\overline{PN}=P\times10^m+N$（$\overline{PN}$为接写后的数）。

$\because N\mid\overline{PN}$，$\therefore N\mid P\times10^m$。$\because P$为任取的自然数，$\therefore N\mid10^m$。

当$m=1$时，$N=1$，2，5；

当$m=2$时，$N=10$，20，25，50；

当$m=3$，且$N<130$时，$N=100$，125。

故小于130的魔术数有九个，它们为：1，2，5，10，20，25，50，100，125。

练 习 一

1． 大于10小于100的整数中，当数字交换位置后所得的数比原数增加9的数的个数是多少？

2． 若一个完全平方数的个位数字是6，则它的十位数字一定是奇数。试证明之。

3． 求证：不存在这样的整数，把它的首位数字移到末位之后，得到的数是原来的两倍。（1985年第17届加拿大数学竞赛题）

4． 试求最小自然数N，使个位数字为6，且将N的个位数字6移到其余各位数字之前所得的数是N的4倍。

5． 一个十进制的正整数，其中有三个数字是4，其余的数是0，问这个正整数是平方数吗？（苏联竞赛题）

6． 设a与b为任意给定的整数，证明方程$x^2+10ax+5b\pm3=0$没有整数解。（1978年北京市数学竞赛题）

7． 试求弗尔马数$2^{2^n}+1$当$n\geqslant2$时的末位数字。

8． 173□是个4位数，数学老师说："我在这个□中先

后填入三个数字，所得到的三个四位数，依次可被 9 、11、6 整除”，问数学老师先后填入的三个数字的和是多少？（1991 年“华罗庚金杯”赛复赛试题）

9． x、y 为何值时，$\overline{803xy78}$ 能被 9 整除，而被 8 除余 2 。

10．下面的算式中共有10个不同的字母：F、O、R、T、Y、E、N、S、I、X，试用 0 、1 、2 、…、8 、9 十个数字分别代替各个字母，使算式成立。

$$
\begin{array}{rccccc}
 & F & O & R & T & Y \\
 & & & T & E & N \\
+ & & & T & E & N \\
\hline
 & S & I & X & T & Y
\end{array}
$$

第二讲　数的奇偶性

整数可分为两大类：奇数和偶数。能被 2 整除的整数叫做偶数，记作$2n$（n为整数）；不能被 2 整除的整数叫做奇数，记作 $2n+1$（n 为整数）。

一、奇数和偶数的性质

1．　奇数≠偶数；

2．　奇数±奇数＝偶数，偶数±偶数＝偶数，奇数±偶数＝奇数；

3．　奇数个奇数的和是奇数，任意多个偶数的和是偶数；

4．　奇数×奇数＝奇数，（奇数）^{n}＝奇数（n为非负整数），偶数×偶数＝ 4 的倍数，偶数×整数＝偶数；

5．　两个数的和与差有相同的奇偶性；

6．　奇数的平方被 4 除余 1 ，被 8 除余 1 ；

7. 任意两个整数的平方和被 4 除一定不余 3；

8. 任意两个整数的平方差被 4 除一定不余 2。

二、数的奇偶性

例 1 在 1，2，…，1989，1990，1991这 1991 个数的前面任意添加一个正号或负号，问它们的代数和是奇数还是偶数？

分析 数的和与差有相同的奇偶性，只要求$1+2+3+\cdots+1990+1991$的奇偶性即可。

解 ∵两整数的和与差的奇偶性相同，∴不论正负号如何添加，它们的代数和的奇偶性都与$1+2+\cdots+1990+1991$的奇偶性相同。

∵$1+2+\cdots+1990+1991=$(995个偶数)+(996个奇数)=偶数，∴任意添加正负号后的代数和一定是偶数。

例 2 有若干个人彼此写信，并且每个人只要接到对方的来信就一定要回信，问写了奇数封信的人的总数是奇数，还是偶数？

分析 可由若干个人彼此写信的总数为偶数，而写了偶数封信的人，所写的信的总数也是偶数出发求解。

解 设写了奇数封信的人的个数是 k，而且他们分别写了 n_1、n_2、…、n_k 封信，其中，n_1、n_2、…、n_k 都是奇数，则剩下的 s 个人各写了m_1、m_2、…、m_s 封信，其中，m_1、m_2、…、m_s 均是偶数。

因为每个人只要接到对方来信就一定要回信，这样信的总数为偶数。而信的总数$=(n_1+n_2+\cdots+n_k)+(m_1+m_2+\cdots+m_s)$。又因为 $m_1+m_2+\cdots+m_s$ 是偶数，所以 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 应是偶数。又因为 n_1、n_2、…、n_k 均为奇数，所以 k 必

为偶数。即写了奇数封信的人的总数为偶数。

例 3 甲、乙两人玩纸牌游戏，甲持全部红桃1～13张，乙持全部黑桃 1～13 张，两人轮流出牌，每对牌彼此相减，问这13个差的积是奇数，还是偶数？(1986 年天津市“中华少年杯”邀请赛试题)

分析 这13个差的积的奇偶性的确定在于13个差中有没有偶数，这可由13个差的和的奇偶性确定。

解 设甲出牌顺序为 a_1、a_2、…、a_{13}，乙出牌顺序为 b_1、b_2、…、b_{13}，则 $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_{13}-b_{13})=(a_1+a_2+\cdots+a_{13})-(b_1+b_2+\cdots+b_{13})=0$，故 (a_1-b_1)、(a_2-b_2)、…、$(a_{13}-b_{13})$ 中必有一个为偶数，否则13个奇数的和为奇数，故 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_{13}-b_{13})$ 为偶数。

三、数的整除性

例 4 试证 3^n+1 能被 2 或 2^2 整除，而不能被 2 的更高次幂整除。

分析 只要证明 3^n+1 是 2 的奇数倍或 4 的奇数倍，可将 n 分成奇数和偶数分别讨论。

证明 当 n 为偶数时，设 $n=2k$。

$$\because\ 3^n+1=3^{2k}+1=9^k+1=(8+1)^k+1$$
$$=(8m+1)+1=2(4m+1),$$

$\therefore\ 2|(3^n+1)$。

当 n 为奇数时，设 $n=2k+1$。

$$3^{2k+1}+1=3\cdot3^{2k}+1=3(8m+1)+1=4(6m+1),$$

$\therefore 2^2|(3^n+1)$。

由于$4m+1$，$6m+1$都是奇数，所以 3^n+1不能被 2 的更高次幂整除。故不论 n 为奇数，还是偶数，命题均成