肖学平 编著

中学数学的基本思想和方法

科学出版社

中学数学的基本思想和方法

肖学平 编著

1994

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统论述中学数学的基本思想和方法，并按高考数学中明确要求考查的数学思想方法分成十章．每一章基本上分成三节．第一节讲述有关的基本知识，第二节讲述在高考数学中的应用，第三节讲述应用技巧，并用分析、解答、评注等形式讲解典型的例题．同时部分章节后配有一定的练习．书末有两个附录，其一是正文中未能论述的几种常用的数学思想方法，其二是有关练习的答案与提示．

本书概括了中学数学的主要内容、方法和技巧，重点剖析了通性、通法，有助于读者对中学数学的深入理解及从根本上提高独立思考的能力．

本书可供高中学生和中学教师学习和参考．

中学数学的基本思想和方法

肖学平 编著

责任编辑 吕 虹

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

北京市怀柔黄坎印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1994 年 10 月第一次印刷 印张：14 1/8

印数：1—5500 字数：310 000

ISBN 7-03-004414-2/G・478

定价：12.00 元

序

学习数学不仅学习它的概念、公式、定理、法则，更重要的要学习由这些内容反映出来的数学思想方法．因为数学思想方法反映了数学的本质和发展，反映了数学的发明、发现与创造，它较之数学内容来说，包摄性大且迁移范围广．正由于它如此重要，近年来中学数学教学大纲与高考大纲都明文规定，在学习数学内容的同时，学习、掌握相应的数学思想方法．本书按高考大纲中明确要求考查的数学思想方法，结合具体内容，列章分节详述，对读者是有启示的．

在数学教学中，把某一种具体的解题方法与某一类问题简单地对应起来；无意义地单纯演算习题的训练，都无助于学生对数学的真正理解，无助于对学生独立思考能力的培养．事实上，这种训练把解题方法与具体题目紧紧连在一起，一旦题目稍加变化，学生就会无所适从；这种训练缺乏在数学思想方法方面的概括，迁移范围小，事倍功半．这些都是数学教育工作者在实际教学中总结出来的经验教训，应引以为戒．本书以数学思想方法为主题，讲清实质，注重应用，这在改正上述缺点方面，作了有益的尝试．

一般来说，数学思想方法是隐含在数学内容之中的．有时，有的数学方法与内容溶为一体，特别是一些具体的方法．但不管哪一种情况，都要教师去挖掘其中的数学思想方法，并给学生明确指出．例如，本书中所述的转化思想、分类讨论思想、数形结合的思想等都是隐含在数学内容之中的；又

如数学归纳法、换元法、待定系数法等都是与相关内容溶为一体的．以上这些在本书中都作了很好的反映．

要培养学生的创造力，从数学思维的角度看，一类是用演绎的方法进行的合理推理，另一类是进行经验归纳的合情推理，具体说就是运用观察、实验、类比、联想、猜测、不完全归纳等等，它们在数学发现过程中是起着重要作用的，在数学教学中应该有它相应的位置，高考中也有所反映．本书专列一章（第五章）作了介绍．

心理学中有这样一条原理：只有主体积极地、有目的地指向的对象，也就是在某种活动系统中占有内心或外表活动的直接目的的结构地位的内容，才能被现实地意识到．这条原理告诉我们，要使某一内容被主体意识到，必须使它成为主体活动的目的．为此，必须把数学思想方法以明显的形式列入教学内容，并把对这些思想方法的掌握变成学生活动的目的．其次，数学思想方法的掌握，要学生在数学活动中长期地实践、积累，不断地体验，教师也适时地点拨与指导，到一定阶段（例如学期结束，某一个教学段落，一门学科学习结束，高考复习等）教师作必要的概括提高，使学生对数学思想方法的认识提高到一个新的水平．

为使学生在高考复习时对数学思想方法有个较为全面的认识，本书提供了丰富的材料，可供师生参考．

曹　才　翰

1994 年 5 月 1 日

目　　录

第一章　转化（或化归）的思想

在数学研究中人们总是把待解决或未解决的问题，通过某种转化过程，归结为已经能解决或者比较容易解决的问题，从而使问题得到最终的解决．

§1.1　有关转化思想的基本知识

（1）转化（或化）归思想的含义．

辩证唯物主义认为，任何事物内部都存在着矛盾，一切矛盾着的东西总是相互联系着的，不但在一定条件下共处于统一体之中，而且在一定的条件下可以相互转化，从而推动事物的发展．数学题中的条件与条件、条件与结论之间存在着差异，差异即矛盾，解题过程就是不断有目的地和有效地转化矛盾，最终解决矛盾的过程，从这个意义上来说，解题就是转化．

匈牙利数学家路莎·彼得（Rozsa Peter）对化归的思想作过十分生动而风趣的描述：假设在你面前有煤气炉、水龙头、水壶和火柴，当你要烧水时，你应该怎样去做呢？“往水壶里注满水，点燃煤气，然后把水壶放在煤气灶上．”你对问题的回答是正确的．现在把所说的问题稍作修改，即假设水壶中已经盛满了水，而所说问题中的其他情况都不变，试问，此时你应该怎样去做呢？人们往往会回答：“点燃煤气，再把水壶放上去，”这样的回答是正确的，但是更完善的回答应该

是这样："只有物理学家才会按照刚才所说的办法去做，而数学家们却会回答：只须把水壶中的水倒掉，问题就转化为前面所说的问题了."路莎的比喻虽然有点可笑，但却道出了化归思想的本质含义：在解决一个问题时人们的眼光并不落在结论上，而是去寻觅、追溯一些熟知的结果，由此将问题化难为易，化繁为简，化大为小，各个击破，达到最终解决问题的目的.

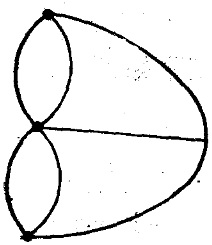
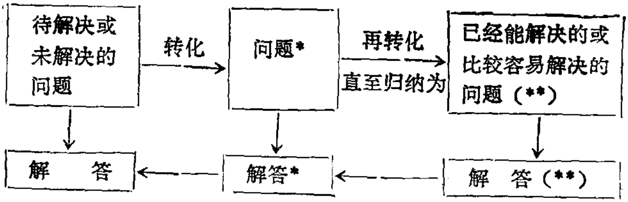


图 1.1

在数学的创造性工作中，化归思想也是一种常用的重要方法. 例如，著名数学家欧拉（Euler）解决哥尼斯堡七桥问题时，就采用了这种方法. 欧拉原来是这样想的：既然岛与半岛无非是桥梁的连接地点，两岸陆地也是桥梁通往的地点，那么就不妨把四处地点转化为四个点，并把七座桥转化为七条线，这样当然并不改变问题的实质. 于是，人们企图一次无重复地走过七座桥的问题就转化为一笔画图 1.1 的图形问题. 接着，欧拉又考察了一笔画的结构特征：一笔画有个起点和终点，除起点与终点外，一笔画中出现的交点处曲线总是一进一出的，故通过交点的曲线总是偶数条. 如此说来，一笔画中至多只有两个交点（即起点与终点）有可能通过奇数条曲线，我们看图 1.1，立即发现四个点都通过奇数条曲线，因此，可以断言它不是一笔能够画出的图形.

这里充分显示了化归思想的神奇魅力. 它是人们寻找真理，发现真理和分析解决问题的一种基本而重要的手段.

（2）用转化思想解题的一般模式（或思维过程）.



(3) 中学数学中转化思想的三种形式.

(i) 化大为小，化繁为简．这里主要指的是把一个大问题化成若干个小问题（大小是指对某个参数的值或取值可能而言，或是依某个可比指标而言分为大小），每个小问题都解决了也就得出了原来大问题的解．例如，用代入法消元或加减法消元，将多元方程化成一元方程，用因式分解将二次方程求解化成两个一次方程求解，依某个参数的各种取值可能将一个问题分成若干个问题分别求解（例如底中含参数的指数或对数不等式，分式不等式，含绝对值不等式的求解等），在解排列组合问题中依是否满足某些给定的条件，而将计数的对象分类求和，即加法原理的应用，依照合乎所有所给条件的对象的产生过程而转化成若干个阶段，计算每阶段所有可能的方法再用乘法原理得出原对象的个数，等等，所有这些方法都是人们遵循“化大为小，化繁为简”的思想方法而具体化得出的实施方法，这一思想贯穿于整个数学教学过程之中．

(ii) 等价转化思想．把一个问题转化成与它等价的另一个问题，用各种方法进行转化可得到一系列等价命题，这其中只要有一个得到解决，则所有这些等价命题都同时得到解决，这也是数学中最常用的方法之一．依转化的方法不同，问题的性质不同而有不同的转化方法，而转化的目的则是化难为易，化未知为已知，即希望在等价命题中发现一个容易

解决的，或发现一个已经解决的．当然等价转化过程要注意转化的条件，保持等价性．例如，法国数学家笛卡儿(Descartes)通过建立坐标系将曲线和方程联系起来，把几何问题化为代数问题，引入待定系数把某些问题化为方程组的解；原命题化成等价的逆否命题；构造一定的数学模型将问题转化成等价命题等．应用这个方法要求对各命题之间的关系有一个准确的了解，对一种数学表达式有多种解释的能力，还要有一定的构造数学模型的能力．

(iii) 不等价的转化思想．这里又分两类，其一是找充分条件，为了证明 A，我们找出命题 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，它们有关系：$A \Leftarrow A_1 \Leftarrow A_2 \Leftarrow \cdots \Leftarrow A_n$，然后证明 A_n，从而断言 A 为真；其二是找必要条件，为了否定 A，我们找出命题 B_1，B_2，B_3，$\cdots, B_n$，它们有关系：$A \Rightarrow B_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n$，然后证明 B_n 不真，从而断言 A 也不真．这两个方面的转化在数学中都发挥了巨大作用，例如，在不等式的证明中有关充分性与必要性的论证过程恰好分属上面两类．又如依据不等式的传递性 $a \leqslant b$，$b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ 而发展出来的放缩法也属于此类，而放与缩恰好分别属于上面两种不同的转化方式．再如在数学中常用构造一个特例来否定某一个对全体情况而作的肯定论断，为了证明某一个命题，在其中选定一个参数让它取任意可能的值而得到另一个更一般的命题，然后再证明这个一般结论 r 从而导致其特例即原命题也成立等等，都属此类思想的应用．

(4) 转化思想的原则与特征．

人类在研究数学的长期实践中，获得了大量的成果，并积累了丰富的经验，许多问题的研究已经形成了固定的方法和约定俗成的步骤．我们把这种有既定解决方法和程序的问

题叫做规范问题，而把一个问题转化为规范问题的过程称为问题的规范化．转化思想的核心就是实现问题的规范化，以便应用已知的理论、方法及技术达成问题的解决．熟悉化、简单化和直观化是一切转化应遵循的基本原则，而化未知为已知、化一般为特殊、化特殊为一般、化抽象为具体和化繁为简是转化的方向．

转化思想具有多向性、层次性和重复性的特征．为了实施有效的化归，既可以变更问题的条件，也可以变更问题的结论；既可以变换问题的内部结构，又可以变换问题的外部形式，这就是多向性；转化思想既可以用于沟通数学各分支学科的联系，从宏观上实现学科间的转化，又能调动各种方法和技术，从微观上解释多种具体问题，这是层次性；而解决问题时可以多次使用转化思想，使问题逐次达到规范化，这是重复性．

（5）常用的几种转化方法．

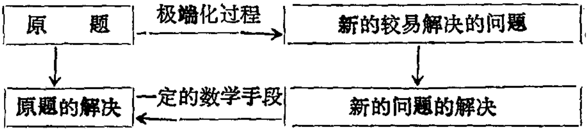
（i）分类讨论的方法（将在第三章作详细论述）．

（ii）极端化的方法．

我们先看一个古老的数学问题：鸡兔同笼不知数，三十六头笼中露，看足却有一百整，不知多少鸡和兔？著名数学家波利亚对这个问题提出了一个有趣的思路：如果鸡都缩起了一只脚，而兔子都竖起了前腿，仅用两只后腿着地，那又怎样呢？”很显然，那样的话，“看足只剩 50 整了”，而对 36 个头来说：$50-36=14$，那么多余的 14 只脚当然是 14 只兔子的了．分析一下这个思维过程：当原题不易思考时，我们可以转而研究它的相对容易解决的极端情况（当然这个极端情况要有意义，比如前面的问题，并没有假定兔子也用一只脚着地），解决了极端情况之后，再通过一定的数学手段往往

可通向解决原题之路.

极端化方法解题的模式（步骤）如下：



例如：已知两个定圆$\odot_{01}$，$\odot_{02}$，$R_1>R_2$，求作两圆的一条外公切线.

解题步骤为：①以R_1-R_2为半径作大圆O_1的同心圆O_3；②自O_2点作O_3的切线；③平移这条切线，使其成为两圆的公切线．事实上，步骤①，②“以R_1-R_2为半径作大圆的同心圆，自O_2点作$\odot_{03}$的切线，”就是原题极端化情况的解决，在这个极端化过程中，我们想象小圆逐步缩小至一点而大圆也以相同的“速率”缩小着，这时原问题就化归为自圆外一点作圆的切线这样一个简单的问题，而步骤③“平移这条切线，使其成为两圆的公切线”就是通向原题之解的“一定的数学手段”.

(iii) 特殊与一般互相转化的方法.

“从特殊到一般”与“由一般到特殊”乃是人类认识客观世界的一个普遍规律，一方面，由于事物的特殊性中包含着普遍性，即所谓的共性存在于个性之中，而相对于“一般”而言，特殊的事物往往显得简单、直观和具体，并为人们所熟知，因而当我们处理问题时，若能注意到问题的普遍性存在于特殊性之中，进而去分析考虑有没有可能把待解决的问题转化为某个特殊问题的思考方式，不仅是可行的，而且是必要的；另一方面，由于“一般”概括了“特殊“普遍”比“特殊”更能反映事物的本质，因而当我们处理问题时，若能置

待解决的问题于更为普遍的情形之中，进而通过对一般情形的研究而去处理特殊情形的思考方式，同样也是可行的和必要的．这两方面是相辅相成的，缺一不可，它们互相制约，互相补充，使我们在处理问题时既不失之偏颇，又不致无所适从．我们以判断命题真假来看看“特殊”与“一般”的这种关系，“若命题 P 在一般条件下为真，则在特殊条件下 P 也真”，把这称为关系 A，它的逆否命题称为关系 B，即“若命题 P 在特殊条件下为假，则在一般条件下亦假”．凭借关系 A 可由“一般”确定“特殊”，凭借关系 B 可以利用“特殊”而否定“一般”，从而实现转化，就其过程来说可有如下模式：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{原问题}} \arrow[r, "\text{一般化}"] \arrow[d] & \boxed{\text{一般原型}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{原问题结论}} & \boxed{\text{一般原型的结论}} \arrow[l, "\text{特殊化}"']
\end{tikzcd}$$

如：方程、不等式与函数相比较，前者是特殊形式，后者是一般形式，一方面可把方程、不等式置于函数之中，另一方面把函数问题化为方程、不等式求解．

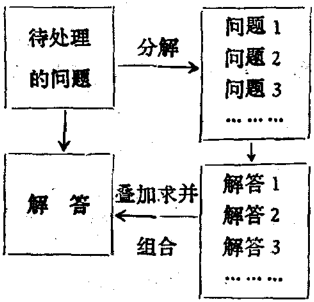
(iv) 分解与组合的方法．

要认识一个事物，必须通过分解，深入其内部，才能把握问题的本质．通过分解，才能清晰地了解待处理问题内部的各种制约关系，从而找到一个解决问题的办法，也只有分解，才能弄清问题的外延，从而知道我们应该从哪些方面入手去解决问题；分解是数学概念由低级向高级逐步推进的重要手段；就化归的本义来说，我们处理问题也不能总是依靠“把一个问题转化为一个熟悉的问题”的模式，实际上既是一个极简单的问题，也往往在处理过程中伴随着分解，即把一个问题分解成几个熟悉的问题．为使转化过程的完全实

现，往往还要求助于“组合”，事实上，分解与组合密切相关，相辅相成，它们的有机结合即是求解问题的最后结论所必需的，而且更为主要的是此种结合将导致待处理的问题的关系结构重新搭配，这正是分解与组合在转化中的活力所在．

在用分解和组合去实现转化时，对于待处理的问题，通常有四个方面作为分解对象：①问题本身，②问题的条件，③问题的外延，④实现目标的过程．

分解和组合实现转化的模式（或过程）如下：

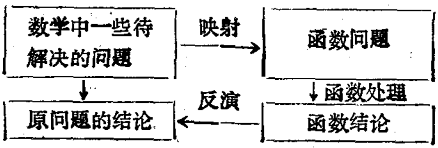


把问题本身作为分解对象时，有两种重要方法，其一是把问题分解成几个局部之和（称为局部法），其二是把问题分解成整体与局部之差（称为补集法）．

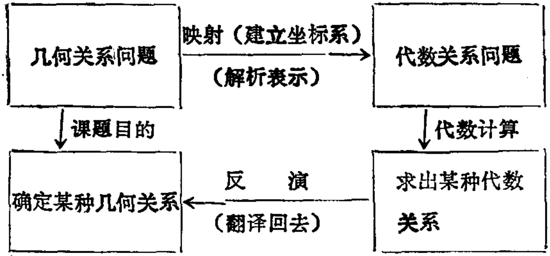
(v) 关系-映射-反演原则（RMI）．

关系映射反演原则是一种分析解决问题的普遍方法与准则，在中学数学中也是基本而重要的．下面是两个典型的例子：

①函数法．



②解析法.



（vi）构造模型与变换的方法.

数学模型是针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系，采用形式化数学语言，概括地或近似地表述出来的一种数学结构，如实数、向量、绝对值、坐标系等都可以说是数学模型.构造数学模型包含四个方面：理解实际问题，抽象分析问题，运用数学工具，通过实践加以验证等.构造与变换紧密相联，共处于一个统一体中.

§1.2　高考数学中的转化思想

转化（或化归）的思想是数学科高考中明确要求考查的数学思想之一.它是在处理问题时把那些待解决的或难解决的问题，通过某种转化过程，归结为一类已经解决或比较容易解决的问题，最终求得原问题的解答的一种数学思想.它在数学中的应用比比皆是，如未知向已知的转化，新知识向旧知识的转化，实际问题向数学问题的转化等等.

例 1　（1）解方程 $\lg(x^2+4x-26)-\lg(x-3)=1$.

（2）解不等式　$2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+\log_2\frac{1}{x}>0$.