

◎ 李健宁 著

# 结构方程模型导论

JIEGOU

FANGCHENG

MOXING

DAOLUN

安徽大学出版社

2  
5

# 结构方程模型导论

◎ 李健宁 著

安徽大学出版社

### 图书在版编目(CIP)数据

结构方程模型导论 / 李健宁著. —合肥: 安徽大学出版社,  
2004.3

ISBN 7-81052-712-6

I. 结… II. 李… III. 线性模型: 统计模型 - 研究  
IV. C8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 103250 号

## 结构方程模型导论

李健宁 著

---

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号 邮编 230039)	印刷	中国科学技术大学印刷厂
联系电话	编辑室 0551-5108348 发行部 0551-5107784	开本	787×960 1/16
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	印张	13.25
责任编辑	谈 菁	字数	212 千
封面设计	孟献辉	版次	2004年3月第1版
		印次	2004年3月第1次印刷

---

ISBN 7-81052-712-6/B·30

定价 21.00 元

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

# 前 言

近几十年内,社会科学研究方法在西方经历了一场空前的变革,伴随着 EM(Expectation Maximization)算法的出现和计算机技术的发展,带来了新一代的统计方法。其中,结构方程模型就是应用统计领域中发展最为迅速的一个分支。结构方程模型(Structural Equation Modeling,简记为 SEM),是一种非常通用的线性统计建模技术,是统计学家整合了生物学中开发的路径分析、计量经济学中的多项联立方程以及验证型因子分析最终形成的。由于它的极大的适用性,国际上一些有名的软件公司一版再版地出版应用软件,从而使这种新的数据分析系统日臻成熟,目前正为广大社会科学研究人员所接受,并成为各类社会科学学科研究生的必修课。甚至不少学者以此为研究专业,也有专门的学术期刊专注于结构方程模型及其相关技术的发展和运用。但它在我国,介绍和使用的人还很少。

众所周知,现代科学特别是社会科学,研究方法的发展在很大程度上能够起到推动整个学科发展的作用。反之,会限制学科的发展。在我国社会科学研究方法的建设和普及与学科专业的建设及发展相比显得相对薄弱,尤其是量化方法,远远落后于世界先进水平,无形中阻碍了社会科学的进一步发展。社会科学研究方法的落后,除了缺乏一大批热心于研究方法的学者,还表现在相关书籍匮乏,很多学科苦于找不到合

适的方法课用书。而在先进国家,每一种主要的统计分析方法在每一学科中都可找到多种专著及更多的普及读物,以供学者、学生选用。针对这种情况,作者动了写作本书的念头。

本书是作者在山西大学为心理学专业研究生讲授研究方法课程的基础上形成的。正文共分六章,介绍结构方程模型的基本原理和方法。另有附录简单介绍 SAS 软件中用于结构方程模型分析的程序 CALIS 和专用分析软件 EQS 的编程方法,并附有书中大部分分析例子的程序,以方便读者学习与练习。但本书主要是论述结构方程模型的数理性质,而不是 CALIS 或 EQS 的应用手册。作者坚信,如果离开了基础原理的学习,在实际研究中是很难正确、灵活地运用结构方程模型的。离开了统计原理,也不可能掌握统计软件。理解了统计原理,却可以容易地掌握统计软件。

结构方程模型的基本原理涉及较为复杂的数学推演。本书力图能以通俗的方式表达其中的统计原理和思想,尽量回避那些过于复杂的数学演算和证明,以方便缺乏数学基础的读者学习。然而,结构方程模型的基础毕竟是概率论和数理统计,不可能完全绕过某些高等数学的知识,有些统计公式的数学表达式本身就较为复杂。其实,表达式的复杂并不一定意味着原理的深奥难懂,有时是复杂的数学符号带来了抽象性,也似乎带来了难度,稍加用心,其原理便不难理解。本书在附录中给出了线性代数的一些基础知识,有兴趣的读者还可以参考线性代数或高等代数的专门教材,以扫清学习道路上的一些拦路虎,就更便于阅读本书了。

感谢我的大学同学安徽师范大学的查小虎和安徽大学出版社在本书写作和出版过程中给予的支持和帮助。在本书第四章第三节模型解释的例 2 中参考了山西大学研究生卢春丽的译文,也在这里表示感谢。

限于作者水平,书中难免会有各种不足,真诚欢迎广大读者批评指正。

李健宁

2003 年 6 月

# 目 录

<b>第一章</b>	<b>引言</b> .....	( 1 )
1.1	结构方程模型的基本特征 .....	( 1 )
1.2	结构方程模型的应用 .....	( 6 )
1.3	多元数据的组织 .....	( 7 )
<b>第二章</b>	<b>回归分析</b> .....	( 24 )
2.1	一元线性回归分析 .....	( 24 )
2.2	多元线性回归分析 .....	( 27 )
<b>第三章</b>	<b>结构方程的基本模型</b> .....	( 34 )
3.1	潜在变量与测量方程式 .....	( 34 )
3.2	观测变量的结构方程式 .....	( 46 )
3.3	结构方程式模型 .....	( 57 )
<b>第四章</b>	<b>结构方程模型的估计、评价与解释</b> .....	( 74 )
4.1	结构方程模型的估计 .....	( 74 )
4.2	结构方程模型的评价 .....	( 78 )
4.3	结构方程模型的解释 .....	( 87 )
<b>第五章</b>	<b>结构方程的扩展模型</b> .....	( 95 )
5.1	考虑平均数的结构方程模型 .....	( 95 )
5.2	多总体的比较 .....	( 104 )

## 2 结构方程模型导论

第六章 因子分析·····	(114)
6.1 探索型因子分析·····	(114)
6.2 验证型因子分析·····	(119)
6.3 2次(高次)因子分析·····	(121)
附一 结构方程模型的表现·····	(124)
附二 SAS 程序说明·····	(138)
附三 EQS 编程要点·····	(151)
附四 数学知识·····	(157)
附五 结构方程模型的程序例·····	(168)
附六 希腊字母·····	(205)
参考文献·····	(206)

# 第一章 引言

## 1.1 结构方程模型的基本特征

结构方程模型是研究社会、自然现象因果关系的统计方法。探索和检验因果关系是所有研究领域的重要目标。治疗和预防某种疾病,确定其病因是非常必要的;知道了大气流动和气候的关系使天气预报成为可能;看到夕阳推断第二天是晴天。人们为了达到预测的目的,努力地探索因果关系。还有,对农民来说,通过施肥和浇水来培育农作物不是盲目的,是在了解一定季节和一定程度与农作物关系的基础上进行的。结构方程模型对因果关系的认识正是建立在以上对现象的观测基础上的。

炮弹飞行的距离与炸药量的多少有关,二者之间的关系是可以测量的;人体摄取的热量与体重之间的关系也是可以测量的。这些变量,我们称之为观测变量(observed variable)。可是,在社会中许多事物是不能够直接测量的,特别是社会、人文、行为科学领域,许多我们感兴趣的现象都不能够直接测量。例如,心理学中的计算能力、经济学中的购买力以及社会学中的社会地位等,我们称其为构成概念(construct)。也就是在社会、人文、行为科学研究中,为了便于理解复杂现象而首先假定存在的概念。计算能力是构成概念,计算测验的成绩不是构成概念。因为测验成绩会受测验参加者的身体状况、情绪等计算能力之外的许多因素的影响。也就是说,测验成绩不能完全反映计算能力。当然,计算测验成绩并不是与计算能力之间没有关系,我们很容易预想到,计算能力强,是直接影响计算测验成绩高的原因。二者之间虽然不完全是因果关系,可是,将测验成绩作为可以直接观测的数据,能够间接地测量计算能力这个构成概念。在社会、人文、行为科学研究中应用测验法的主要目的之一,就是通过选择能够敏感地反映构成概念程度差异的事物进行观测、分析,来认识不能直接观测的构成概念的性质。在结构方程模型中,将计算能力、人格、动机、社会地位、购买力等表示构成概念的变量称为潜在变量(latent vari-



## 2 结构方程模型导论

able 或 unobserved variable)。<sup>[1]</sup>

过去,在社会、人文、行为科学领域研究构成概念的代表方法是因子分析法。可是因子分析法有两个较大的缺陷,阻碍了构成概念的研究。一是因子分析作为多元统计分析中的一种降维方法,其主要目的是通过研究相关矩阵或协方差矩阵的内部依赖关系,将多个变量综合为少数几个因子,以再现原始变量与因子之间的相关关系,它不能分析构成概念之间的因果关系。因此,它只是为我们进一步讨论因果关系提供一些基本规律方面的有价值的信息,指出进一步的研究方向。回归分析和路径分析是认识因果关系的统计方法。在回归分析中,研究者虽然可以规定因变量和自变量之间的因果关系,加以量化描述,但是,研究方法论告诉我们,因果关系是不可能完全依据回归分析所证明的。在回归模型中表述的变量之间的因果关系即使很好地拟合了数据,也不能完全肯定它实际上存在,因为在模型中将因变量和自变量互换,也同样可能很好地拟合数据。因此严格地说,回归分析在研究中所起的作用不是确证因果关系,而是确认因变量和自变量的关系是否存在。路径分析是回归分析的一种延伸,它与一般的多元线性回归分析不同之处在于克服了回归分析未能考虑变量间时间先后的缺点,将变量按客观事物发生的先后顺序建立关系,加入了中间变量,间接推论变量之间的因果关系(实际上路径分析模型可看成几个一般回归分析的组合)。也就是说,回归分析和路径分析只是处理观测变量之间的因果关系,而不涉及构成概念之间的因果关系。二是因子分析法不具有假说验证机能或学习机能。因子分析法在分析之前不能明确反映数据性质,不能充分表现测量设计;分析结果解释常常受数据本身制约,要体现理论构想比较困难;有些数学前提假设不利于建构理论模型。在分析之前我们往往不知道究竟有多少个主要的潜在变量影响着观察变量,潜在变量之间的关系怎样也不清楚,在这种无奈的情况下,对数据的拟合模型我们总是千篇一律地假设:①所有潜在变量要么都相关,要么都不相关,过于绝对,缺乏灵活性;②所有的潜在变量都直接影响所有观测变量,两者关系不清晰;③特定性误差之间均无相关;④所有潜在变量与所有特定性误差间无相关。很明显,这些强加在模型上的约束条件对于许多实际问题并不合适。因此,分析的结果有时候会偏离实际的真实情况。正是基于因子分析的不足,Jöreskog(1969)在因子

---

[1] 潜在变量和构成概念是两个略有区别的用语。构成概念是为了便于理解复杂现象导入的思辨性概念。潜在变量是根据统计模型定义的数理性概念。潜在变量是依据统计模型对于构成概念的具体表现。

分析中导入了假设验证机能,称为验证型因子分析(confirmatory factor analysis),而把以前传统的因子分析称为探索型因子分析(exploratory factor analysis)。

研究构成概念的结构方程模型(Structural Equation Modeling,简记为SEM),<sup>[1]</sup>是一种非常通用的线性统计建模技术,最初是由Bock & Bargmann(1969)倡议的,Jöreskog(1970)撰文论述了其建构的可能性,并在Psychometrika做了理论分析;而后,是由Jöreskog(1978)整合了生物学家开发的路径分析、计量经济学中的多项联立方程以及验证型因子分析最终形成的。

由于进行结构方程模型分析的运算十分复杂,对SEM进行分析必须依赖于统计软件才能进行,同时也正是由于相应的软件的开发和利用,才使这种方法得以广泛的应用和发展。第一个用于SEM分析的软件包是由K. G. Jöreskog和M. Von Thillo在1972年研制开发的LISREL(Linear Structural RELationsr的简称)软件。该软件在SEM的推广和应用方面所起的作用如此巨大以至于人们通常称SEM为“LISREL模型”(Long, Scott 1987),这里的LISREL不仅是对SEM进行分析的统计软件,还是指一种统计模型和数据分析方法,所以SEM又称做LISREL模型。另外用于结构方程模型分析的软件还有由Pater Bentler于1985年开发的EQS,由R. McDonald于1980年开发的COSAN软件,由Ronald Schoenberg开发的MILS,以及由Muthen于1987年开发的LISCOMP软件。此外SAS软件系统从6.04开始也导入专门进行SEM分析的程序CALIS,最新版本的SPSS也已经不再套装LISREL而换用了另一个结构方程模型分析软件AMOS。

结构方程模型是针对传统统计方法的不足提出来的,其目的:一是完善变量结构的探讨;二是在考虑复杂概念测量误差的同时,建立变量间的关系,特别是因果关系,这是过去所有传统统计方法难以达到的技术高度。从统计思路上,它的优点是:①引入潜在变量使研究更加深入。虽然传统的因子分析也允许对潜在变量设立多元标识,但是,它不能分析潜在变量之间的关系。只有SEM可以将多个潜在变量及其标识置于同一模型中分析,研究它们之间的结构关系。②SEM虽然也类似于多元回归、路径分析等利用联立方程组求解,

---

[1] 根据该方法的不同属性,统计学家给其不同的名字,如根据数据结构,称之为协方差结构模型(Covariance Structure Models,简记为CSM);根据其功能,称之为因果建模(Causal Modeling)等。结构方程模型是近几十年内应用统计领域中发展最为迅速的一个分支。由于它的极大的适用性,因此国际上一些有名的软件公司一版再版地出版应用软件,它首先应用于心理学、社会学,以后几乎应用于一切学科,但它在国内,介绍和使用的人还很少。

但是又不像多元回归、路径分析那样只能处理有观察值的变量,并且还要假定其观察值不存在测量误差。也就是说,SEM 没有很严格的假定限制条件,同时允许自变量和因变量存在测量误差。③发展了路径分析的优势。SEM 应用路径图使多变量之间的复杂关系一目了然,又克服了路径分析基本假设过多、无法包含潜在变量、不能处理互逆因果关系等缺陷。另外,路径分析采用标准的 OLS(最小二乘法)对各个方程分别进行估计,而 SEM 则是用 ML(最大似然法)将模型中所有参数同时进行估计,也只有这样同时考虑多个变量之间的关系,才能排除其他因素的影响,比较准确地估计两个变量之间的因果关系。SEM 除了可以计算变量的直接效应外,还能推导出间接效应和总效应,表达中介变量的作用;通过增加乘积项或乘方项变量,表达变量间的交互作用与非线性关系。④遵循多变量分析的一般线性模式进行验证型分析,可以把方差分析、回归分析、路径分析、因子分析等传统统计方法包含在 SEM 的亚模型中,因而更具有广泛的适用性。

图 1-1 是一个有代表性的结构方程模型,称为多重指标模型。图形称为路径图,用路径图定义模型并表示分析结果是结构方程模型的一般方法。模

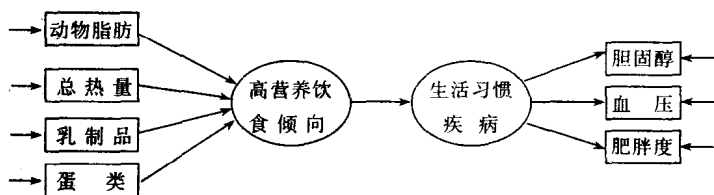


图 1-1 代表性结构方程模型与路径图

型研究的目的是分析高营养饮食倾向与生活习惯疾病之间的因果关系。这里高营养饮食倾向和生活习惯疾病都是构成概念,不能够直接测量。可是反映高营养饮食倾向的总热量(calorie)和动物脂肪能够测量,与生活习惯疾病相关的血中胆固醇也是可以测量的。各个构成概念与观测变量之间的关系是因子分析(1 因子)模型,高营养饮食倾向与生活习惯疾病之间的关系是一元回归模型。这种将因子分析与回归分析有机地整合在一起统一分析,正是结构方程模型最主要的特征。从这个模型中取出一部分进行因子分析或回归分析也是适用的。另外,再引入影响生活习惯疾病的一个构成概念“体育运动”,又可以构建更为复杂的模型。总之,这种探讨复杂因果关系的分析方法,对于许多传统的统计分析模型也都能够适用。

结构方程模型的建模有五个主要步骤:

(1) 模型设定。研究者首先根据先前的理论和已有的知识,经过推论和假设形成一个关于一组变量之间相互关系(常常是因果关系)的模型。也就是可以用路径图明确指定变量间的因果联系。

(2) 模型识别。设定 SEM 模型时的一个基本考虑是模型识别。如果假设的模型本身不能识别,则无法得到系统各个自由参数的惟一估计值。检查模型识别的基本规则是,模型的自由参数不能多于观察数据的方差和协方差总数。

(3) 模型估计。SEM 模型的基本假设是,观察变量的方差、协方差矩阵是一套参数的函数。固定参数值和自由参数的估计将被代入结构方程,然后推导出一个方差协方差矩阵  $\Sigma$ ,使矩阵  $\Sigma$  中的每一个元素尽可能地接近于样本中观察变量的方差协方差矩阵  $S$  中的相应元素,即使  $\Sigma$  与  $S$  之间的差异最小化。尽管参数估计的数学运算方法很多,其中最常用的估计方法还是最大似然法(ML)和广义最小二乘法(GLS)。

(4) 模型评价。就是在已有的证据与理论范围内,考察所提出的模型拟合样本数据的程度。关于模型的总体拟合程度的测量指标主要有  $\chi^2$  检验、拟合优度指数(GFI)、校正的拟合优度指数(AGFI)、均方根残差(RMR)等。关于模型每个参数估计值的评价可以用给出的“ $t$ ”值。评价单个模型参数的指标还有标准化残差、修正指数(MI)等。

(5) 模型修正。模型修正是为了改进初始模型的适合程度。当尝试性初始模型不能拟合观察数据时,即这个模型被数据所拒绝时,就需要将模型进行修正,再用同一组观察数据来进行检验。

当然我们也要看到,结构方程模型本身还是不够完善的。<sup>[1]</sup>比如它在模型设定、模型拟合、拟合检验以及对结果的解释等方面都还存在或多或少的问题:如现有理论不能准确提出有说服力的因果模型;在模型设定与模型识别过程中所做的比较,可能有损于最初的理论假设;可能没有充分的定性和定量数据以保证模型的拟合等等。简言之,其他统计模型中存在的问题,都有可能在结构方程模型中存在。

结构方程模型也只是一种研究思路,一种统计方法,要恰当地使用它还必须依赖于正确的理论构想,这是研究的前提条件。而且研究要得到科学的结论,就必须有正确的理论构想,结构关系模型只能在理论构想的前提下去说明关系,而不能通过它来发现事物之间的因果关系,换句话说,SEM 只能判定一

[1] 武洁琼,李健宁.基于因果关系的教育研究方法思考[J].苏州科技学院学报,2003(2).

个模型是不合理的,或者是判定一个模型在理论前提下该是怎样的,却不能发现和证明因果关系。

结构方程模型研究所需要的样本容量也是应该注意的问题。一般来说,样本容量不得少于 150,否则,样本容量太小,可能违反了变量的正态分布假设。因此,要取得较为稳定的结果必须有较大的样本容量。另外,如果使用的样本不具有代表性,或者是有偏样本,那么结构方程模型所得的结论是不可靠的,不能推广到更大的总体中去。

结构方程模型的广泛应用反映了统计分析方法的进步,这种分析因果关系的新方法,为我们全面认识和深入研究各种社会现象奠定了方法论基础。目前,国外许多大学的博士课程都开设了 SEM 训练。SEM 应该引起我国社会科学界的关注、应用和研究。

### 1.2 结构方程模型的应用

结构方程模型的应用是伴随着计算机软件 LISREL 的不断改进(Jöreskog & Sorbom, 1976, 1978, 1981, 1984)逐步增加的。20 世纪 80 年代以来,在社会、人文和行为科学领域得到广泛的应用。最初,ETS(Educational Testing Service)研究者 Jöreskog 是在教育学、心理学领域倡导应用结构方程模型(Jöreskog & Sorbom, 1979),所以,在这两个领域的应用是非常盛行的。

首先,在教育学领域,社会教育学中的成人教育(Nelson *et. al.*, 1984; Tuijnman, Chinapah & Fagerlind, 1988)、青少年犯罪(McCarthy & Hoge, 1984),教育社会学中的大学差异研究(Werts, Linn & Jöreskog, 1978),健康教育学中的吸毒调查(Bentler, 1978; Bentler & Newcomb, 1986; Kennedy, Starrfield & Baffi, 1983)、饮酒(Nesselroad & McArdle, 1985)、戒烟(Prochaska *et. al.*, 1988)、虫牙的预防(Chen & Land, 1986),体育教育学中的运动训练(Deeter, 1989),学校教育学中的课程评价(Wesson *et. al.*, 1986),教育测量学中的信度分析(Werts, Linn, 1986)、测验理论(Jöreskog, 1971)等。

其次,在心理学领域,临床心理学中的生活指导(Alwin & Tessler, 1974)、DMS III (Schonfeld, Shaffer, O'Connor & Portnoy, 1988)、精神健康量表(Zautra, Guarnaccia & Reich, 1988)、心理不安测量(Newton *et. al.*, 1984)、精神分裂症(Tanaka & Bentler, 1983),发展心理学中的双胞胎研究(Hauser, 1988; La Buda & Fulker, 1987),同一性(Kamptner, 1988)、个案追踪研究(Jöreskog & Sorbom, 1977; Lindsay & Knox, 1984),社会心理学中的

归属理论(Platt, 1988)、态度(Thornton, Alwin & Camburn, 1983; Bagozzi, 1981; Judd & Milburn, 1989)、性别差异(Bielby & Bielby, 1984; Rown, Rodgers, Meseck - Bushey & St. John, 1989)、灾害心理(Hirose & Ishizuka, 1983)、学习心理学中的遗忘(Kyllonen & Tirre, 1988)、白鼠的行为分析(Stanislaw & Brain, 1983)、实验心理学中的知觉(Hunt, Pellegrino, Farr & Alderton, 1988)、棒框测验(Jöreskog, 1981)、认知心理学中的阅读研究(Wilkinson, Wardrop & Anderson, 1988; Lomax, 1982; Jackson, Donaldson & Cleland, 1988)、人格心理学中的自我概念(Byrne & Shavelson, 1987; Marsh & Hocevar, 1985)、智力研究中的记忆(Hultsch, Hertzog & Dixon, 1984)、斯坦福—比纳智力测验(Keith, Cool, Novak, White & Pottebaum, 1988)、WISC—R(O'Grady, 1983)等。

其他学科领域的研究也很多,简单列举如下:社会学中的反社会行为(Baldwin & Skinner, 1989)、社会阶层模型(Hauser, Tsai & Eewell, 1983)、家族研究(Thomson & Williams, 1982)、近邻研究(Bielby, 1981)、职业意识(白仓, 1988)、人种比较(Acock & Fuller, 1985)、对核试验的不安心理(Newcomb, 1986)等。市场学中的消费者行为(Punj & Staelin, 1983)、经营学(Fritz, 1986)、犯罪学(Smith & Patterson, 1984)、人口学(Beckman *et. al.*, 1983; Thomson, 1983)、经济学(Aigner & Goldberger, 1977; Jöreskog & Wold, 1982a, 1982b)中应用研究也已经出现了。

### 1.3 多元数据的组织

对两个以上变量进行观察,得到  $N$  个( $N$  组)数据,这种数据称为多元数据(multi-dimensional data)。例如,表 1-1 是对 10 名大学生性格测量数据(部分数据)。

表 1-1 10 名大学生性格测量数据(部分)

编号	社交性	活动性	进取性	持久性	规律性	神经质
1	12	3	6	2	1	0
2	14	14	19	12	20	16
3	7	9	14	12	15	8
4	4	8	16	10	8	2
5	5	7	16	18	11	4

续表 1-1

编号	社交性	活动性	进取性	持久性	规律性	神经质
6	11	8	13	10	15	11
7	12	9	14	2	0	8
8	10	10	15	18	18	11
9	4	1	6	11	9	2
10	10	10	12	15	13	16

### 1.3.1 平均数

对数据的量化描述主要有两个方面的指标:一是描述数据的中心位置;另一是描述数据的分散(变异)程度。这里介绍平均数(算术平均数)。它是从一组数据中抽象出来的一个数,是一组数据的代表值,表明事物的数量方面在一定时间、地点和条件下的共同性质的一般水平。对于单一变量可以用向量  $x$  表示。例如,对 10 名大学生性格测量数据的社交性用向量表示,其中,第  $i$  个测量值表示为  $x_i$ 。

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_8 \ x_9 \ x_{10}) = (12 \ 14 \ 7 \ \cdots \ 10 \ 4 \ 10) \quad (1.1)$$

这时平均数为

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.2)$$

其中,  $N$  是观测对象的数目,称为样本容量。计算出 6 个观测变量的平均数见表 1-2。

表 1-2 10 名大学生性格测量数据的平均数

社交性	活动性	进取性	持久性	规律性	神经质
8.900	7.900	13.100	11.000	11.000	7.800

### 1.3.2 方差与标准差

描述差异程度的指标有很多,这里我们介绍方差与标准差。方差有样本方差(sample variance)与无偏样本方差(unbiased sample variance)两种。分别定义为

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.3)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.4)$$

标准差定义为方差的平方根,有样本标准差  $s$  与无偏样本标准差  $\hat{\sigma}$ 。

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.5)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.6)$$

观察表 1-3,规律性的离散程度最大,其次是持久性,离散程度最小的是社交性。

表 1-3 10 名大学生性格测量数据的离散度

	社交性	活动性	进取性	持久性	规律性	神经质
$s^2$	11.890	12.090	15.890	36.100	40.000	29.760
$\hat{\sigma}^2$	213.211	13.433	17.656	40.111	44.444	33.067
$s$	3.448	3.477	3.989	6.008	6.325	5.455
$\hat{\sigma}$	3.635	3.665	4.202	6.333	6.667	5.750

### 1.3.3 随机变量

我们定义一个变量  $X$ , 所求随机事件可以表示为  $X$  的取值。这种把随机事件“数字化”的思想导致了“随机变量”这一概念的诞生,极大地推动了概率论的发展。

在一些随机试验中,试验的结果本身就是由数量来表示的。例如,投掷一枚骰子,观察其出现的点数,可能的结果可分别由 1,2,3,4,5,6,来表示;观察一个灯泡的使用寿命,实际使用寿命可能是  $[0, +\infty]$  中的任何一个实数。在另一些随机试验中,我们可能根据问题的需要对每一个可能结果指定一个数量。比如,投掷一枚硬币进行打赌时,如果规定投掷者在硬币出现正面时赢一元钱,出现反面时输一元钱,则可对“出现正面”指定一个数——1,对出现反面指定一个数——-1。无论哪种情况,其共同点是:对每一个可能结果,有惟一一个实数与之对应。这种对应关系实际定义了样本空间  $\Omega$  上的函数,通常记做

$$X = X(\omega), \omega \in \Omega \quad (1.7)$$

随机变量  $X$  的值与其概率  $p_k$  组合形成概率分布。随机变量的期望值为

$$E[X] = \sum_{k=1}^l P_k x_k \quad (1.8)$$



利用  $P_k$  的估计值  $\hat{P}_k$

$$\sum_{k=1}^l \hat{P}_k x_k = \sum_{k=1}^l \frac{N_k}{N} x_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^l N_k x_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \quad (1.9)$$

可见, 随机变量  $X$  的期望值与平均数是一致的。

对于随机变量的期望值下面 3 个公式是很重要的。

$E[a] = a$  (常量的期望值是常量)

$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$  (和的期望值是期望值的和)

$aE[X] = E[aX]$  (期望值与常量的倍数是常量倍数的期望值)

随机变量的方差为

$$V[X] = \sum_{k=1}^l P_k (x_k - E[X])^2 = E[(X - E[X])^2] \quad (1.10)$$

利用  $P_k$  的估计值  $\hat{P}_k = N_k/N$

$$\sum_{k=1}^l \hat{P}_k (x_k - E[X])^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^l N_k (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.11)$$

可见, 随机变量  $X$  的方差与样本方差是一致的。也就是说, 随机变量的期望值与方差是样本平均数与方差的扩展概念。

对于随机变量的方差下面的公式是重要的。

$V[aX + b] = a^2 V[X]$  ( $a$  与  $b$  是常量)

#### 1.3.4 随机向量

$n$  个观测变量  $x_i (i=1, \dots, n)$  形成一个纵的向量

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)' \quad (1.12)$$

称为随机向量或随机变量向量。随机向量的元素  $x_i$  表示第  $i$  个随机变量。

大学生性格测量数据  $n=6$ , 变量名与内容表示为

变量名	变量内容
$x_1$	社交性
$x_2$	活动性
$x_3$	进取性
$x_4$	持久性
$x_5$	规律性
$x_6$	神经质

#### 1.3.5 多元数据

结构方程模型所分析的数据, 采用矩阵的形式将表 1-1 的数据转置表示为