

张嘉瑾精彩数学系列丛书



HANSHUYUSHULIE

函数与数列

fangfa.jiqiao.xinqile

方法·技巧·新奇乐

编著 张嘉瑾

长 春 出 版 社

全国重点大学教材



FUNCTIONS AND SEQUENCES

函数与数列

Advanced Mathematics

11111 - 1115 - 11111

编者 孙德明

1 1 1 1 1

张嘉瑾精彩数学系列丛书

函数与数列 方法·技巧·新奇乐

张嘉瑾 著

长春出版社

图书在版编目 (CIP)数据

函数与数列 方法·技巧·新奇乐/张嘉瑾著. —长春: 长春出版社, 2004.5

ISBN 7-80664-714-7

I. 函... II. 张... III. 函数与数列 - 解题 IV. 0182.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第(033567)号

责任编辑: 杨爱萍 封面设计: 刘 洋

长春出版社出版

(长春市建设街 1377 号)

(邮编 130061 电话 8569938)

长春市新世纪印业有限公司印刷

新华书店经销

880 × 1230 毫米 32 开本 9.5 印张 1 插页 225 千字

2004 年 6 月第 2 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

印数: 6001—13 000 册 定价: 14.00 元

作者小传

张嘉瑾，男，江苏宜兴人，1982年毕业于江苏师范学院数学系，1996年被评为中学数学特级教师。

2001年出任《高考》杂志主编，以其鲜明的风格，过人的才华将《高考》迅速打造成全国教育杂志中的知名品牌。

多年来致力于初等数学教材教法的研究，颇有心得。在省级以上杂志上先后发表论文、诗歌、散文一百多篇。出版数学专著十册近四百万字。其中《高中数学三部曲》、《高中数学大世界》、《高考试题研究》、《思维·重点·方法》、《考前精彩99》等著作深受全国广大师生的欢迎。论文和著作结构独特，内涵深刻，尤其是散文诗一样的语言在众多数学专著中独树一帜。

课堂教学中善于启发学生的思维，激发学生的学习兴趣，并注重学生心理素质的培养。良好的美学与文学修养形成了他数学课的特殊风格和魅力。

现供职于江苏省宜兴中学。

新奇乐（代序）

一说新。

新世纪开创新天地，新科技迎接新挑战，新的理念，新的兴趣，新的志向，新的活力，把人们的追求推向一个更高更新的境界。

把新天地展示给学生，将新信息传递给学生，拿最新的观念去指导学生的学习和生活。

激活、创新，这应该是现代中学生的主流。

二说奇。

古今中外，奇闻轶事，妙语警句，将在这里一展风采，新题新解，奇思异想，让你激动不已。在奇中求新，在新里探活，在活的引导下创造，这种环环相扣的连锁反应，正是促使我们不断进取，努力攀登的伟大动力。

三说乐。

在“新”与“奇”之中，蕴涵着无穷乐趣，这是大饱眼福之快慰，这是深思熟虑中的喜悦，这是创造丰收后的满足。

乐，学习乐；乐，思考乐；乐，创造乐。

美文，让你乐在其中；好题，使你乐而忘返；更深更远的思考和探求，把你一步步带进知识的乐园。

处处有新的刺激，时时有奇的陶醉。

不亦乐乎！

张嘉瑾

数学到底是怎样一种东西？它是无形的灵魂，它唤起心神，澄清智慧，它给我们内心思想添辉；它涤尽我们有生以来的蒙昧与无知！

第一章 集合与函数	(1)
1. 集合的运算	
欣赏激趣	(2)
好题导航	(3)
智力冲浪	(6)
课余拾零	(11)
2. 集合与映射	
欣赏激趣	(13)
好题导航	(15)
智力冲浪	(17)
课余拾零	(21)
3. 函数定义域与值域	
欣赏激趣	(24)
好题导航	(25)
智力冲浪	(28)
课余拾零	(36)
4. 函数的性质(一)	
欣赏激趣	(39)
好题导航	(41)
智力冲浪	(47)
课余拾零	(56)
5. 函数的性质(二)	
欣赏激趣	(59)
好题导航	(61)
智力冲浪	(64)
课余拾零	(69)

6. 二次函数
- 欣赏激趣 (72)
 - 好题导航 (73)
 - 智力冲浪 (78)
 - 课余拾零 (82)
7. 指数与对数
- 欣赏激趣 (85)
 - 好题导航 (87)
 - 智力冲浪 (91)
 - 课余拾零 (97)
8. 函数综合题(一)
- 欣赏激趣 (100)
 - 好题导航 (102)
 - 智力冲浪 (106)
 - 课余拾零 (112)
9. 函数综合题(二)
- 欣赏激趣 (116)
 - 好题导航 (117)
 - 智力冲浪 (121)
 - 课余拾零 (125)
10. 再说函数的性质
- 欣赏激趣 (129)
 - 好题导航 (130)
 - 智力冲浪 (134)
 - 课余拾零 (141)
11. 函数应用题
- 欣赏激趣 (144)
 - 好题导航 (146)
 - 智力冲浪 (149)
 - 课余拾零 (151)

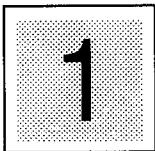
12. 函数最值	
欣赏激趣	(152)
好题导航	(153)
智力冲浪	(157)
课余拾零	(163)
第二章 数列	(166)
13. 等差数列(一)	
欣赏激趣	(167)
好题导航	(168)
智力冲浪	(172)
课余拾零	(180)
14. 等差数列(二)	
欣赏激趣	(183)
好题导航	(184)
智力冲浪	(188)
课余拾零	(195)
15. 等比数列	
欣赏激趣	(197)
好题导航	(198)
智力冲浪	(202)
课余拾零	(207)
16. 数列通项(一)	
欣赏激趣	(212)
好题导航	(213)
智力冲浪	(216)
课余拾零	(225)
17. 数列通项(二)	
欣赏激趣	(228)

好题导航	(229)
智力冲浪	(234)
课余拾零	(241)
18. 数列求和	
欣赏激趣	(243)
好题导航	(244)
智力冲浪	(249)
课余拾零	(255)
19. 数列应用题	
欣赏激趣	(258)
好题导航	(259)
智力冲浪	(262)
课余拾零	(268)
20. 数列综合问题	
欣赏激趣	(271)
好题导航	(272)
智力冲浪	(278)
课余拾零	(285)
第三章 不是多余的话	(287)
数学是美丽的	(288)
数学与艺术	(289)
什么是数学	(290)
数学思想与数学概念	(291)
基本数学思想	(291)
数学思想与数学方法	(292)
数学思维	(293)

第一章 集合与函数

集合与映射是现代数学的基石，是高等数学的启蒙。

函数，中学数学的主线。从这里，展开中学数学的新天地；在这里，学习各种解题方法与技巧。一种全新的感受，激活了中学生的好奇心。对数学的热爱和兴趣，翻开了新的一页。



集合的运算

欣赏激趣

简单就是美

阿拉伯数字与罗马数字是两个无话不谈的好朋友。

一次，阿拉伯数字瞧见罗马数字望着自己呆呆地发愣，看上去心情有点沉重，便悄悄地问：“想什么呢？为什么不开心？”

“我一直在研究你的形体。”

“我的形体有什么好研究的？”

“人们喜欢你，到处都看见你，而我却总被大家冷落。”

“傻瓜，各有各的用处呗，别生气了，好吗？”阿拉伯数字安慰道。

“今天我才明白了，人们对你情有独钟，是因为你看上去总比我柔美、舒服。”

“话不能这样说，我觉得你挺不错，横是横，竖是竖，方方正正，很有男子气。”

“不!”罗马数字把它的好朋友又一次细细端详了一番,恍然大悟,“我彻底搞清楚了,圆,是世界上最完美的形体,而你,十个数字中就有4个是全圆弧:0、6、8、9;还有三个是半圆弧:2、3、5.”

“这也许是理由,”阿拉伯数字说,“其实我觉得我挺简单的.”

“这正是你的另一个本质的特点,你的十个数字中,有8个数字只要一笔画就能写成:0、1、2、3、6、7、8、9;其余两个也只要两笔:4、5.”

“是的,世界上再也找不到比我阿拉伯数字形体更完美、书写更简单的数字了.”阿拉伯数字有点飘飘然.

“美学家说得好:‘世界上最完美的东西,其形式往往简单得惊人.’老兄,我的确无法与你媲美.”罗马数字舒展了眉头,从此便坦坦荡荡,摆正了自己的位置.

好题导航

以下两道选择题,相当一部分读者一做即错,反复查看,还是不知错在何处,你来试试,做对了,还是也错了?

例1 (1) 集合 $M = \{0, 2, 3, 7\}$, 集合 $N = \{x \mid x = a \cdot b, a, b \in M\}$, 则集合 N 的子集最多有 ()

(A) 16个 (B) 32个 (C) 64个 (D) 128个

(2) 集合 $M = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y > 0\}$, 集合 $N = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y = |x|\}$, 则下列关系正确的是 ()

(A) $M \subsetneq N$

(B) $N \subsetneq M$

(C) $M = N$

(D) M 与 N 之间无包含关系

解析 先看第(1)小题.

你选(A), 认为 N 中有4个元素, 它们是0, 6, 14, 21.

再想一想, 查一查, 结论有没有问题?

$a, b \in M, a = b$ 也是可以的, 因此 N 中的元素还有4, 9, 49, (D) 是对的.

若添加条件 $a \neq b$, 选(A)是天经地义了.

再来看第(2)题. 相当一部分读者选(B).

我们来考虑特殊的点： $(0,0) \in N$ ，而 $(0,0) \notin M$ ， $(0,2) \in M$ ，而 $(0,2) \notin N$ ，当然是选(D)了。

一个小条件，一个特殊点，它往往决定着解题的全过程。我们能不能、会不会在这些细小的地方去寻找解题的突破口，这肯定是一种能力的体现。

微细之处见精神。

例2 已知集合 $A \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ ， A 中至少有一个奇数，则这样的集合 A 共有 ()

(A) 11个 (B) 12个 (C) 15个 (D) 16个

解析 思路一 集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 共有 2^4 个子集，去掉 $\{0\}$ ， $\{2\}$ ， $\{0, 2\}$ ， \emptyset 及全集 $\{0, 1, 2, 3\}$ ，满足题意的集合共有 11 个。

思路二 可以把满足条件的集合 A 逐一排出来，但这样做显然比较麻烦。

思路三 满足 $\{1\} \subseteq A \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ 的集合 A 有 7 个，满足 $\{3\} \subseteq A \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ 的集合有 7 个，其中 $\{1, 3\}$ 、 $\{1, 0, 3\}$ 、 $\{1, 2, 3\}$ 重复，所以满足题意的集合 A 有 $14 - 3 = 11$ (个)。

一题多解，培养思维的广阔性。当我们从高一开始便有目的地去培养一题多解的能力的时候，首先要养成一个良好的习惯：凡事多想想，左想想，右想想，想条件，想结论，想解答过程是否完整，想还有没有其他更简便的方法。日积月累，思维的素质必定能提高。

联想类比 已知三个集合 $A = \{0, 1\}$ ， $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $C = \{x \mid A \subseteq x \subseteq B\}$ ，则集合 C 中元素共有 _____ 个；集合 A 与 C 的关系是 _____。

解析 集合 C 中元素是 B 的真子集。

注意，集合 C 的元素是集合！而集合 A 与集合 C 的关系如何呢？ A 是 C 中的元素。

集合是集合中的元素。

以上这些关键问题弄清之后，问题可以解决了。 C 中共有 7 个元素，显然 $A \in C$ 。

例3 已知 $A \subseteq B$ ， $A \subseteq C$ ， $B = \{1, 2, 3, 5\}$ ， $C = \{0, 2, 4, 8\}$ ，则

$A = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析 $A \subseteq B, A \subseteq C$, 则等价于 $A \subseteq B \cap C$.

而 $B \cap C = \{2\}$. 因此 $A = \{2\}$.

这个答案有疑问吗?

遗漏了 $A = \emptyset$.

遗漏 \emptyset , 这是常见的疏忽.

联想类比 (1) 已知集合 $A, B (A \neq B)$ 满足 $A \cup B = \{a, b\}$, 则 A, B 的不同组数共有 种.

解析 $\because A \neq B$, 且 $A \cup B = \{a, b\}$,

$\therefore A \subseteq \{a, b\}$.

当 $A = \emptyset$ 时, $B = \{a, b\}$;

当 $A = \{a\}$ 时, $B = \{b\}$ 或 $\{a, b\}$;

当 $A = \{b\}$ 时, $B = \{a\}$ 或者 $\{a, b\}$;

当 $A = \{a, b\}$ 时, $B = \emptyset$ 或 $\{a\}$ 或 $\{b\}$.

\therefore 满足 $A \cup B = \{a, b\}$ 的 A, B 不同的组数共有 8 种.

(2) $A \supseteq B$ 是 $(A \cap C) \supseteq (B \cap C)$ 的 ()

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分条件又非必要条件

解析 $A \supseteq B$, 则必有 $(A \cap C) \supseteq (B \cap C)$.

反之则不然, 若 $C = \emptyset, A = \{0\}, B = \{0, 1\}$, 则 $A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$, 满足 $(A \cap C) \supseteq (B \cap C)$, 但不能推出 $A \supseteq B$, 因此选(A).

(3) 已知集合 $A = \{x | x^2 + tx + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求实数 t 的集合 T .

解析 A 中元素是方程 $x^2 + tx + 1 = 0$ 之实根, 满足条件 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$ 可能有两种情况:

① 方程 $x^2 + tx + 1 = 0$ 之根为负数(不可能有根为 0);

② $A = \emptyset$.

而不考虑 A 为空集的情况是最易犯的毛病.

当方程之根为负数时,

$$\begin{cases} \Delta = t^2 - 4 \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t \geq 2.$$

当 $A = \emptyset$ 时, 方程无实根, $\Delta < 0 \Rightarrow -2 < t < 2$,

因此, $T = \{t \mid t > -2, t \in \mathbf{R}\}$.

智力冲浪

(一) 活题速算

对于高一学生来说, 快算与速答以下各题确实是较高的要求, 但能力是培养出来的, 要相信自己不比别人差, 别人能做到的, 我肯定也能! 志气、毅力、信心, 是成功的前提.

尝试一下吧, 鼓足勇气!

1~7题, 心算口答.

1. 给出下列选项: ① $\{\emptyset, \{0\}, 0\}$; ② $\{\text{那张桌子, 这只狗}, \sqrt{2}\}$; ③ $\{\text{校园里的小树}\}$; ④ $\{-\pi, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, \dots\}$, 其中可以构成集合的选项是 ()

(A) ①、②、④ (B) ① (C) ②、③ (D) ①、②

2. 非空集合 P 、 Q 、 N 满足 $P \cup Q = Q$, $Q \cap N = \emptyset$, 则 P 、 N 之间的关系是 ()

(A) $P = N$ (B) $P \subsetneq N$ (C) $P \supsetneq N$ (D) $P \cap N = \emptyset$

3. 已知 $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} \subsetneq A \subseteq \{-1, 0, 1, 2\}$, 则符合条件的集合 A 的个数是 ()

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8

4. 已知 $A = \{1, x^2\}$, $B = \{1, 3, x\}$, 且 $A \cup B = \{1, 3, x\}$, 则 x 的不同值有 ()

(A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

5. 已知集合 $M = \{\text{直线}\}$, 集合 $N = \{\text{圆}\}$; 则 $M \cap N$ 中的元素个数是 ()

(A) 0 (B) 0或1 (C) 0或2 (D) 0或1或2

6. 已知集合 $M = \{2, \frac{1}{2}\}$, $N = \{(x, y) \mid xy = \frac{1}{4}, x \in M\}$, 则集合 N 的子集个数是 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4