张嘉瑾精彩数学系列丛书

HANSHUYUSHULIE

# 函数与数列

fangfa.jiqiao.xinqile

## 方法·技巧·新奇乐

编著　张嘉瑾

長春出版社

# 函数与数列

张嘉瑾精彩数学系列丛书

# 函数与数列
# 方法·技巧·新奇乐

张嘉瑾　著

长春出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

函数与数列　方法·技巧·新奇乐/张嘉瑾著．—长春：长春出版社，2004.5

ISBN 7-80664-714-7

Ⅰ．函…　Ⅱ．张…　Ⅲ．函数与数列－解题　Ⅳ．0182.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第(033567)号

**责任编辑：杨爱萍　封面设计：刘　洋**

**长春出版社出版**

**（长春市建设街1377号）**

**（邮编130061　电话8569938）**

**长春市新世纪印业有限公司印刷**

**新华书店经销**

**880×1230毫米　32开本　9.5印张　1插页　225千字**

**2004年6月第2版　2004年6月第1次印刷**

**印数：6001—13 000册　定价：14.00元**

# 作者小传

张嘉瑾，男，江苏宜兴人，1982 年毕业于江苏师范学院数学系，1996 年被评为中学数学特级教师.

2001 年出任《高考》杂志主编，以其鲜明的风格，过人的才华将《高考》迅速打造成全国教育杂志中的知名品牌.

多年来致力于初等数学教材教法的研究，颇有心得.在省级以上杂志上先后发表论文、诗歌、散文一百多篇.出版数学专著十册近四百万字.其中《高中数学三部曲》、《高中数学大世界》、《高考试题研究》、《思维·重点·方法》、《考前精彩 99》等著作深受全国广大师生的欢迎.论文和著作结构独特，内涵深刻，尤其是散文诗一样的语言在众多数学专著中独树一帜.

课堂教学中善于启发学生的思维，激发学生的学习兴趣，并注重学生心理素质的培养.良好的美学与文学修养形成了他数学课的特殊风格和魅力.

现供职于江苏省宜兴中学.

# 新 奇 乐 （代序）

一说新.

新世纪开创新天地，新科技迎接新挑战，新的理念，新的兴趣，新的志向，新的活力，把人们的追求推向一个更高更新的境界.

把新天地展示给学生，将新信息传递给学生，拿最新的观念去指导学生的学习和生活.

激活、创新，这应该是现代中学生的主流.

二说奇.

古今中外，奇闻轶事，妙语警句，将在这里一展风采，新题新解，奇思异想，让你激动不已.在奇中求新，在新里探活，在活的引导下创造，这种环环相扣的连锁反应，正是促使我们不断进取，努力攀登的伟大动力.

三说乐.

在“新”与“奇”之中，蕴涵着无穷乐趣，这是大饱眼福之快慰，这是深思熟虑中的喜悦，这是创造丰收后的满足.

乐，学习乐；乐，思考乐；乐，创造乐.

美文，让你乐在其中；好题，使你乐而忘返；更深更远的思考和探求，把你一步步带进知识的乐园.

处处有新的刺激，时时有奇的陶醉.

不亦乐乎！

张嘉瑾

数学到底是怎样一种东西？它是无形的灵魂，它唤起心神，澄清智慧，它给我们内心思想添辉；它涤尽我们有生以来的蒙昧与无知！

目录

目录

目录

# 第一章　集合与函数

集合与映射是现代数学的基石，是高等数学的启蒙．

函数，中学数学的主线．从这里，展开中学数学的新天地；在这里，学习各种解题方法与技巧．一种全新的感受，激活了中学生的好奇心．对数学的热爱和兴趣，翻开了新的一页．

# 1

# 集合的运算

## 欣赏数趣

### 简单就是美

阿拉伯数字与罗马数字是两个无话不谈的好朋友.

一次，阿拉伯数字瞧见罗马数字望着自己呆呆地发愣，看上去心情有点沉重，便悄悄地问："想什么呢？为什么不开心？"

"我一直在研究你的形体."

"我的形体有什么好研究的？"

"人们喜欢你，到处都看见你，而我却总被大家冷落."

"傻瓜，各有各的用处呗，别生气了，好吗？"阿拉伯数字安慰道.

"今天我才明白了，人们对你情有独钟，是因为你看上去总比我柔美、舒服."

"话不能这样说，我觉得你挺不错，横是横，竖是竖，方方正正，很有男子气."

“不!”罗马数字把它的好朋友又一次细细端详了一番，恍然大悟，“我彻底搞清楚了，圆，是世界上最完美的形体，而你，十个数字中就有4个是全圆弧：0、6、8、9；还有三个是半圆弧：2、3、5.”

“这也许是理由，”阿拉伯数字说，“其实我觉得我挺简单的.”

“这正是你的另一个本质的特点，你的十个数字中，有8个数字只要一笔就能写成：0、1、2、3、6、7、8、9；其余两个也只要两笔：4、5.”

“是的，世界上再也找不到比我阿拉伯数字形体更完美、书写更简单的数字了.”阿拉伯数字有点飘飘然.

“美学家说得好：‘世界上最完美的东西，其形式往往简单得惊人.’老兄，我的确无法与你媲美.”罗马数字舒展了眉头，从此便坦坦荡荡，摆正了自己的位置.

## 好题导航

**以下两道选择题，相当一部分读者一做即错，反复查看，还是不知错在何处，你来试试，做对了，还是也错了？**

**例1** (1) 集合 $M=\{0,2,3,7\}$，集合 $N=\{x\mid x=a\cdot b,\ a、b\in M\}$，则集合 $N$ 的子集最多有 ( )

(A) 16个 (B) 32个 (C) 64个 (D) 128个

(2) 集合 $M=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},\ y>0\}$，集合 $N=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},\ y=|x|\}$，则下列关系正确的是 ( )

(A) $M\subsetneqq N$ (B) $N\subsetneqq M$

(C) $M=N$ (D) $M$ 与 $N$ 之间无包含关系

**解析** 先看第(1)小题.

你选(A)，认为 $N$ 中有4个元素，它们是0，6，14，21.

再想一想，查一查，结论有没有问题？

$a、b\in M$，$a=b$ 也是可以的，因此 $N$ 中的元素还有4，9，49，(D)是对的.

若添加条件 $a\neq b$，选(A)是天经地义了.

再来看第(2)题. 相当一部分读者选(B).

我们来考虑特殊的点：$(0,0)\in N$，而$(0,0)\notin M$，$(0,2)\in M$，而$(0,2)\notin N$，当然是选(D)了.

一个小条件，一个特殊点，它往往决定着解题的全过程.我们能不能、会不会在这些细小的地方去寻找解题的突破口，这肯定是一种能力的体现.

微细之处见精神.

**例2**　已知集合$A\subsetneqq\{0,1,2,3\}$，$A$中至少有一个奇数，则这样的集合$A$共有　　(　　)

(A) 11个　　(B) 12个　　(C) 15个　　(D) 16个

**解析**　思路一　集合$\{0,1,2,3\}$共有$2^4$个子集，去掉$\{0\}$，$\{2\}$，$\{0,2\}$，$\varnothing$及全集$\{0,1,2,3\}$，满足题意的集合共有11个.

思路二　可以把满足条件的集合$A$逐一排出来，但这样做显然比较麻烦.

思路三　满足$\{1\}\subseteq A\subsetneqq\{0,1,2,3\}$的集合$A$有7个，满足$\{3\}\subseteq A\subsetneqq\{0,1,2,3\}$的集合有7个，其中$\{1,3\}$、$\{1,0,3\}$、$\{1,2,3\}$重复，所以满足题意的集合$A$有$14-3=11$(个).

一题多解，培养思维的广阔性.当我们从高一开始便有目的地去培养一题多解的能力的时候，首先要养成一个良好的习惯：凡事多想想，左想想，右想想，想条件，想结论，想解答过程是否完整，想还有没有其他更简便的方法.日积月累，思维的素质必定能提高.

**联想类比**　已知三个集合$A=\{0,1\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{x\mid A\subseteq x\subsetneqq B\}$，则集合$C$中元素共有________个；集合$A$与$C$的关系是________.

**解析**　集合$C$中元素是$B$的真子集.

注意，集合$C$的元素是集合！而集合$A$与集合$C$的关系如何呢？

$A$是$C$中的元素.

集合是集合中的元素.

以上这些关键问题弄清之后，问题可以解决了.$C$中共有7个元素，显然$A\in C$.

**例3**　已知$A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{1,2,3,5\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则

$A=$ ________.

**解析**　$A\subseteq B$，$A\subseteq C$，则等价于 $A\subseteq B\cap C$.

而 $B\cap C=\{2\}$. 因此 $A=\{2\}$.

这个答案有疑问吗?

遗漏了 $A=\varnothing$.

遗漏$\varnothing$，这是常见的疏忽.

$\boxed{\text{联想类比}}$　(1) 已知集合 $A$、$B$ $(A\neq B)$满足 $A\cup B=\{a, b\}$，则 $A$、$B$ 的不同组数共有________种.

**解析**　$\because A\neq B$，且 $A\cup B=\{a, b\}$，

$\therefore A\subseteq\{a, b\}$.

当 $A=\varnothing$时，$B=\{a, b\}$；

当 $A=\{a\}$时，$B=\{b\}$或$\{a, b\}$；

当 $A=\{b\}$时，$B=\{a\}$或者$\{a, b\}$；

当 $A=\{a, b\}$时，$B=\varnothing$或$\{a\}$或$\{b\}$.

$\therefore$满足 $A\cup B=\{a, b\}$的 $A$、$B$ 不同的组数共有 8 种.

(2) $A\supseteq B$ 是$(A\cap C)\supseteq(B\cap C)$的　　(　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

**解析**　$A\supseteq B$，则必有$(A\cap C)\supseteq(B\cap C)$.

反之则不然，若 $C=\varnothing$，$A=\{0\}$，$B=\{0, 1\}$，则 $A\cap C=\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，满足$(A\cap C)\supseteq(B\cap C)$，但不能推出 $A\supseteq B$，因此选(A).

(3) 已知集合 $A=\{x\mid x^2+tx+1=0, x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 $t$ 的集合 $T$.

**解析**　$A$ 中元素是方程 $x^2+tx+1=0$ 之实根，满足条件 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$可能有两种情况：

①方程 $x^2+tx+1=0$ 之根为负数(不可能有根为 0)；

②$A=\varnothing$.

而不考虑 $A$ 为空集的情况是最易犯的毛病.

当方程之根为负数时，

$$\begin{cases}\Delta=t^2-4\geqslant 0\\ t>0\end{cases}\Rightarrow t\geqslant 2.$$

当 $A=\varnothing$ 时，方程无实根，$\Delta<0 \Rightarrow -2<t<2$，

因此，$T=\{t \mid t>-2,\ t\in\mathbf{R}\}$.

## 智力冲浪

### (一) 活题速算

对于高一的学生来说，快算与速答以下各题确实是较高的要求，但能力是培养出来的，要相信自己不比别人差，别人能做到的，我肯定也能！志气、毅力、信心，是成功的前提.

尝试一下吧，鼓足勇气！

**1~7题，心算口答.**

1. 给出下列选项：①$\{\varnothing,\ \{0\},\ 0\}$；②{那张台子，这只狗，$\sqrt{2}$}；③{校园里的小树}；④$\{-\pi,\ -\sqrt{2},\ -1,\ 0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \cdots\cdots\}$，其中可以构成集合的选项是　(　　)

(A) ①、②、④　(B) ①　(C) ②、③　(D) ①、②

2. 非空集合 $P$、$Q$、$N$ 满足 $P\cup Q=Q$，$Q\cap \mathbf{N}=\varnothing$，则 $P$、$N$ 之间的关系是　(　　)

(A) $P=\mathbf{N}$　(B) $P\subsetneqq\mathbf{N}$　(C) $P\supsetneqq\mathbf{N}$　(D) $P\cap\mathbf{N}=\varnothing$

3. 已知 $\{x \mid x^2-1=0\}\subsetneqq A\subseteq\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，则符合条件的集合 $A$ 的个数是　(　　)

(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 8

4. 已知 $A=\{1,\ x^2\}$，$B=\{1,\ 3,\ x\}$，且 $A\cup B=\{1,\ 3,\ x\}$，则 $x$ 的不同值有　(　　)

(A) 1个　(B) 2个　(C) 3个　(D) 4个

5. 已知集合 $M=$ {直线}，集合 $N=$ {圆}；则 $M\cap N$ 中的元素个数是　(　　)

(A) 0　(B) 0或1　(C) 0或2　(D) 0或1或2

6. 已知集合 $M=\left\{2,\ \frac{1}{2}\right\}$，$N=\left\{(x,y) \mid xy=\frac{1}{4},\ x\in M\right\}$，则集合 $N$ 的子集个数是　(　　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4