国家自然科学基金资助项目

陶然 齐林 王越 著

分数阶 Fourier 变换的原理与应用

THEORY AND APPLICATIONS OF THE FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM

清华大学出版社

国家自然科学基金资助项目

分数阶 Fourier 变换的原理与应用

THEORY AND APPLICATIONS OF THE FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM

陶 然 齐 林 王 越 著

清华大学出版社

北 京

内容提要

本书运用现代信号处理的理论，系统地介绍了分数阶 Fourier 变换的定义与特性，分数阶 Fourier 分析的基本原理与方法及其典型的应用。内容包括：分数阶 Fourier 变换的起源与发展、定义与基本特性；分数阶 Fourier 变换与其他时频分析工具的关系；分数阶 Fourier 变换的快速算法；分数阶 Fourier 变换在信号的检测与参数估计、雷达信号处理、时频域滤波以及通信信号处理中的应用。

本书可供信号与信息处理、通信与信息系统、信息安全与对抗等学科的专业人员以及高等院校相关专业的教师和研究生阅读和参考，又因书中全面系统地介绍了分数阶 Fourier 变换的原理，因此亦可供其他领域的研究人员在从事与分数阶 Fourier 变换有关的科研工作时参考。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶 Fourier 变换的原理与应用/陶然，齐林，王越著. —北京：清华大学出版社，2004.7

ISBN 7-302-08657-5

I. 分… II. ①陶… ②齐… ③王… III. 傅里叶变换-应用-信号处理 IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 046189 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969

组稿编辑：曾　刚
文稿编辑：崔军英
封面设计：秦　铭
版式设计：郑铁文
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：北京国马印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：170×230　印张：12　字数：260 千字
版　　次：2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-08657-5/TN・187
印　　数：1～3000
定　　价：29.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770175-3103 或(010)62795704

前　言

在信号处理领域中，传统的 Fourier 变换是一个研究最为成熟、应用最为广泛的数学工具。Fourier 变换的分数幂理论最早是由 V.Namias 建立的。1980 年 V.Namias 从特征值与特征函数的角度，以纯数学的方式提出了分数阶 Fourier 变换（Fractional Fourier Transform，FRFT）的概念，紧接着 A.C.McBride 和 F.H.Kerr 对分数阶 Fourier 变换作了更加严格的数学定义，使之具备了一些很重要的性质。随后又有研究人员从光学的角度提出了 FRFT 的概念。1994 年，L. B. Ameida 又将其解释为时频平面上的旋转算子，尽管研究者提出的这几种 FRFT 的出发点不同，但可以证明，这几种定义是完全等价的。由于分数阶 Fourier 变换具有很多 Fourier 变换所不具备的性质，它的提出引起了各类研究人员和工程人员的重视，在短短的二十几年里，它已经被应用到包括量子力学、微分方程求解、光信号传输、光图像处理、电信号处理、人工神经网络、小波变换和时频分析等很多领域中。由于 FRFT 可以采用简单的光学设备实现，因此首先在光信号的处理上得到了应用。直到最近几年，国内外的学者找到了几种 FRFT 研究的快速算法，使得其在信号处理等多个领域的应用中受到了重视。随着对 FRFT 研究的进一步深入，其应用将会越来越广泛。

近年来，FRFT 在信号处理领域的研究已经掀起了一个不小的高潮，国内学者对分数阶 Fourier 变换的关注始于 1995 年，近年来也陆续发表了一些研究成果，但总的看来，尚处于起步阶段，对于初涉这一领域的研究人员，还缺乏一部能够系统地介绍分数阶 Fourier 变换及其应用的学术专著。针对这一情况，本书作者收集了自 1980 年以来有关分数阶 Fourier 变换的大量文献资料，并与国内外同行进行了广泛的交流和探讨；在国家自然科学基金的资助下，作者对分数阶 Fourier 变换的理论与应用进行了广泛和深入的研究并取得了多项成果；在此基础上，作者将多年来研究分数阶 Fourier 变换所取得的成果、体会以及所掌握的资料融入本书，其目的在于为国内的研究人员和大专院校师生提供一部能够用较为浅显的语言，系统、全面地介绍分数阶 Fourier 变换原理与应用的专著，使之能够在较短的时间内掌握分数阶 Fourier 变换基本原理和方法，也为有兴趣的读者进行进一步的研究提供一些有益的帮助。

周思永教授在本书的写作过程中提出了一些很好的建议。曾在或正在北京理工大学电子工程系信息系统实验室学习和工作的博士生董永强、赵兴浩、邓兵，硕士生平先军、曹彦川等，结合学位论文对分数阶 Fourier 变换的理论及应用进行了广泛而深入的研究，他们所取得的有关成果对完成本书起到了重要的作用。博士生辛怡和硕士生马雅莉在本书的写作过程中承担了部分具体工作，作者在此一并向他们表示感谢。

分数阶 Fourier 变换是一种较新的时频分析工具，国内外对于分数阶 Fourier 变换的理论与应用的研究也仅有二十余年的时间，可以说，分数阶 Fourier 变换的理论体系尚不十分完备，加之作者水平有限，本书中出现漏误是难免的，恳请专家、同行和读者予以指正。

作者・谨识于

2004 年 6 月 28 日

目　　录

Table of Contents

第1章 绪 论

1.1 分数阶 Fourier 变换的起源与发展

Fourier 分析在连续时间和离散时间信号处理中占有极其重要的地位。传统的 Fourier 变换是分析和处理平稳信号的一种标准和有力的工具，而对于分析和处理时变的非平稳信号则显得乏力，这是由于 Fourier 变换采用的全局性的基函数所决定的。Fourier 变换的数学基础是 Fourier 级数，其数学定义表示，任一非正弦周期函数（信号）可以分解为无穷多个频率为其基本频率整数（包括零）倍的正弦波之和。而 Fourier 变换则是将其积分周期拓展至无穷形成的。法国科学家 Fourier 提出的这种把一个事物从一个“域”变换到另一个“域”，从而从新的角度或尺度对其进行分析或表示的分析方法，在科学史上具有划时代的意义，至今仍在科学研究与工程技术的几乎所有的领域发挥着重要的作用。但是，人们也早就发现，Fourier 变换将信号是在整体上分解为具有不同频率的正弦（复指数）分量，得到的是信号的整体频谱，不能获得信号的局部特性。因此，Fourier 变换只能用来处理确定性的平稳信号，对于时变的非平稳信号则无能为力。而随着信息科学的发展，非平稳信号的处理逐渐引人注目，Fourier 分析的局限性也显得愈发突出。针对这一问题，自 20 世纪 40 年代以来，人们不断地对 Fourier 分析的理论和方法进行推广和改进，提出并发展了一系列新的信号分析理论与方法，分数阶 Fourier 变换即为其中一种近年来引起信号处理界广泛关注的数学工具。

作为 Fourier 变换的一种广义形式，FRFT 可以解释为信号在时频平面内坐标轴绕原点逆时针旋转任意角度后构成的分数阶 Fourier 域上的表示方法。如果信号的 Fourier 变换可看成将其在时间轴上逆时针旋转$\pi/2$ 到频率轴上的表示，则 FRFT 可以看成将信号在时间轴上逆时针旋转任意角度到 u 轴上的表示（u 轴被称为分数阶 Fourier 域）。从本质上讲，信号在分数阶 Fourier 域上的表示，同时融合了信号在时域和频域的信息，因此被认为是一种时频分析方法，与其他时频分析工具有着极其密切的联系。目前，分数阶 Fourier 变换作为一种崭新的时频分析工具和旋转算子为信号处理领域的研究人员所广泛接受。这种新的数学工具不仅与 Fourier 变换有着紧密联系，并且具有 Fourier 变换所不具备的优点，其应用更灵活。

FRFT 的概念很早就被提出来了，但是直到近年它的重要性才受到信号处理界的关注。最早开始研究分数阶 Fourier 变换的是 Wiener。众所周知，Fourier 变换的特征函数是 Hermite 函数乘以 $\exp(-t^2)$，相应的特征值是 $(-j)^m$。1929 年 Wiener 开始寻找这样一种变换核，它的特征函数是希尔伯特－高斯函数，但是它的特征值形式又比普通 Fourier 变换更完备[1]。Wiener 最终将这一特征值修正为 $\exp(-jm\alpha)$，这是我们所知道的与分数阶 Fourier 变换有关

的最初的工作。Wiener 所作的努力为量子力学中与群论和算符代数有关的一些研究提供了基本理论。

1937 年 Condon 也独立地研究了 FRFT 的基本定义[2]。尽管他没有使用 FRFT 这一术语，也没有讨论它的基本属性，但是他可能是第一个直接研究其定义的人。1961 年 Bargmann 参考了 Condon 所提出的 FRFT 定义，在一个更为广泛的背景下，更为深入地探讨了其基本定义[3]。

必须提到的一个对 FRFT 的早期发展做出了较大贡献的人是 Kober.，1939 年他提出了另一种不同于 Winer 形式的定义。Kober 用类似于 Fourier 变换的分数幂形式的理论定义了 FRFT。1956 年，Guinand 引用 Kober 的结论讨论了整数与分数 Fourier 变换的关系。1973 年 De Bruijn 也针对 Kober 的理论简要地在更广泛的范围讨论了这个变换[4]。

另一个有杰出贡献的早期研究者是 Patterson。他在 1959 年提出的广义变换工具中就包括 FRFT。他的理论于 1974 年被 Knare 证明。

尽管 FRFT 的概念很早就被导出了，但是它的重要性是直到 1980 年 Namias 的理论推出后才引起人们的注意的。Namias 显然是在不知道前人工作的前提下，从特征值与特征函数的角度，以纯数学的方式重新提出了 FRFT 的概念并并将它用于求解偏微分方程[5]。他把 FRFT 定义为传统 Fourier 变换的分数幂形式，并揭示了 FRFT 的几个特性，即它的高阶微分形式和它与某些微分方程式的关系。其不足之处是没有得出这种时频表示的变换关系。之后几年里 McBride 和 Kerr 分别继承了 Namias 的工作[6]，他们用积分形式为 FRFT 做了更加严格的数学定义，为后来一些研究人员从光学的角度提出 FRFT 的概念奠定了一定的基础。

Mustand 后来又发现了几个有趣的不同结论[7]，他证明了 Condon 和 Bargmann 的结论，同时还证明了 1984 年 Taylor 在伪微分算子方面得出的结论。此外，他还讨论了 FRFT 与 Wigner 分布的以及某些在分数阶 Fourier 变换时保持时不变特性的不确定性关系。

1992 年 Mendlovic 和 Ozaktas 再次开始研究 FRFT。之后 Lohamann 也加入这项工作，他根据 Wigner 分布重新定义了 FRFT 并将其物理意义解释为信号的表示轴在时频平面的旋转。他们三人最终证明了彼此所下的定义及早期的定义尽管出发点不同但都是等价的[8]。他们的研究工作还包括分数阶 Fourier 变换的光学实现，分数阶 Fourier 变换的计算机仿真算法以及分数阶 Fourier 域的滤波等。自此，分数阶 Fourier 变换的研究与应用开始引起各国学者的广泛关注。

此外，Almeida 在 1993—1994 年期间也再次分析了这种变换并且最终将 FRFT 解释成是一种“角”Fourier 变换，即信号在时频平面内坐标轴绕原点逆时针旋转任意角度后构成的分数阶 Fourier 域上的表示方法[9]。同时，在一系列的学术报告中，Wood 和 Rary 分析了 Radon－Wigner 变换及其应用[10]。尽管他们当时还没有意识到这种变换和 FRFT 的关系，但在后来的研究中就很快注意到了这种关系。

由于 FRRT 能从很多种不同的定义导出，因而事实上不可能追溯出所有曾参与过 FRFT 的研究并对其发展做出杰出贡献的人，例如 Howe 于 1988 年提出的所谓的“半群振荡器”本质上和 FRFT 非常相似。Mustand 形容说：“在 Miller（1968）、Vilenkin（1965）和 Weissler（1979）所发表的有关论文中都有着 FRFT 的影子”[4]。

20 世纪 90 年代早期发表的有关 FRFT 的学术论文多数是关于信号处理和光学方面。研究者之间在时间和空间上的距离导致了 FRFT 被重新定义了好几次。1995 年 *Status Report on the Fractional Fourier Transform* 的发表是一个里程碑，它使研究这个科目的研究人员彼此更透明。自此，分数阶 Fourier 变换的研究与应用开始引起各国学者的广泛关注。

分数阶 Fourier 变换之所以受到很多研究人员和信号处理领域的工程人员的重视，是因为它具有很多传统 Fourier 变换所不具备的性质。近十年来，关于分数阶 Fourier 变换的理论与应用的研究已经掀起了一个不小的高潮，据文献检索，至 2004 年 6 月，在 IEEE 的期刊和国际会议上发表的与 FRFT 有关的论文及研究报告共有 120 余篇，其中以土耳其 Bilkent 大学的 Haldun M Ozaktas 教授的成果最为显著。2001 年 Ozaktas 出版了专著 *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and signal processing*，就笔者所知，这是关于 FRFT 的第一部学术专著，也是对 FRFT 的研究及成果的第一次全面的介绍和总结。

归纳起来，公开发表的关于 FRFT 主要研究成果包括：

（1）FRFT 的基本性质，如时移性质、频移性质、旋转相加性、Parseval 关系式等；

（2）FRFT 与其他时频分析工具的关系；

（3）FRFT 的光学实现及其在光学信号处理中的应用；

（4）FRFT 的数值计算与快速算法；

（5）FRFT 在信号处理中的应用，主要包括信号的检测与参数估计，时变滤波，多路传输，信号的重建与恢复，通信系统中的干扰抑制等。

（6）高维分数阶 Fourier 变换的定义，性质，离散实现及应用。

尽管如此，分数阶 Fourier 变换的理论与应用在很多方面并不像 Fourier 变换那样成熟，尤其是其快速算法仍然不十分完善，也不便于操作。它和其他时频分析工具之间的联系还有待进一步研究，其应用的领域也有待进一步开拓。

国内科研人员最早开始关注分数阶 Fourier 变换始于 1995 年[11]，近年来也陆续发表了一些研究成果[12-16]，但总的情况看来，还处于起步阶段。到目前为止，还只有很少的单位和研究人员在进行相关的研究，尚未取得较大的研究成果。

1.2　分数阶 Fourier 变换在信号处理中的应用

分数阶 Fourier 变换之所以受到很多研究人员和信号处理领域的工程人员的重视，是因为它有很多传统 Fourier 变换所不具备的性质。目前，分数阶 Fourier 变换已经被用在科学研究和工程技术的很多方面，如扫频滤波器[9, 17]、人工神经网络[18]、小波变换[9,18,19]、时频分析[20]、时变滤波和多路传输[14, 20]等。另外，它还在解微分方程[5, 21]、量子力学[5, 22]、衍射理论和光学传输、光学系统和光信号处理[23-25]、光图像处理[21,25]等众多方面有较为广泛的应用。由于采用光学设备很容易实现分数阶 Fourier 变换，所以分数阶 Fourier 变换首先在光信号处理中得到了广泛的应用。然而，由于一直没有找到分数阶 Fourier 变换的快速算法，使得其在电信号处理应用领域中一直没有能占据其应有的位置。直到 20 世纪 90 年

代中期，研究人员才提出了几种 FRFT 的离散化方法[26-28]，其中最具应用价值的是 Ozaktas 提出的分解型的快速算法。Ozaktas 将分数阶 Fourier 变换分的离散化过程分解为离散卷积的运算，并借助于 FFT 来实现，从而使离散 FRFT 的计算具有可以和 DFT 的计算相比拟的运算量。至此，分数阶 Fourier 变换的理论和方法才能够在电信号处理领域中真正的具有工程应用的价值。

作为一种新的数学工具，FRFT 在信号处理中的应用前景十分广泛，新的研究成果也不断地出现。从方法上来看，国内外关于分数阶 Fourier 变换的应用研究大都遵循着以下几条思路：

1．将 Fourier 变换的某些应用直接推广到分数阶 Fourier 域。传统 Fourier 变换通常用来分析和处理平稳信号，而 FRFT 对于分析某些非平稳信号具有十分优良的特性。传统的 Fourier 变换是信号在一组正交完备的正弦基上的展开，所以一个正弦信号的 Fourier 变换是一个δ函数；FRFT 是信号在一组正交的 chirp 基上的展开，一个 chirp 信号的某一阶次的 FRFT 也是一个δ函数。因此，FRFT 对 chirp 信号具有很好的聚焦性。这种聚焦性对分析和处理 chirp 信号是十分有用的，它的一个直接的应用就是单分量和多分量 chirp 信号的检测和参数估计。由于 chirp 信号广泛应用于雷达系统中，基于分数阶 Fourier 变换的信号检测算法已被应用于雷达信号处理中的目标识别、SAR 与 ISAR 成像、运动目标检测等技术中。Mendlovic，Ozaktas 和 Lohamann 提出的分数阶相关的概念则将时域的相关运算推广到分数阶 Fourier 域，这种广义的相关可以方便地用于 chirp 信号的检测及参数的识别。此外，将扩频系统中基于 DET 的频域窄带干扰抑制技术的原理引入到分数阶 Fourier 域，则可以利用 FRFT 来抑制扩频通信中的宽带非平稳干扰。

2．将 FRFT 视为一种时频平面的旋转算子。信号的 WVD 与该信号的（α 阶）FRFT 的 WVD 相同，只是旋转了一定角度（α）。对信号进行 FRFT 等同于将信号在时频平面进行旋转，这一特性对于处理非平稳信号是非常有利的。在工程应用中，信号分离与噪声抑制是信号处理中的一个重要问题。从时频分析的观点来看，经典的滤波方法大都只限于在频域的加窗或遮隔运算，但当信号分量之间和信号与噪声之间存在有较强的时频耦合时，经典的滤波方法难以实现有效的信噪分离。这时，如果将观测信号在时频平面旋转一个特定的角度后，则信号在新的分数阶 Fourier 域上不再存在时频耦合，从而可以实现有效的滤波或信号分离。这就是分数阶 Fourier 域滤波或扫频滤波的基本原理。Fourier 域中的滤波可以解释为时域卷积，而分数阶 Fourier 域滤波相当于复杂的时频运算。在此基础上，Ozaktas 进一步提出了分数阶 Fourier 域最优滤波的概念。尽管不能证明这种最优滤波器的输出就是信号的最小均方误差估计，但 Ozaktas 还是认为用这种方法在很多情况能得到一个比用传统 Fourier 域滤波更低的均方误差。

将分数阶 Fourier 域滤波的原理应用到多路复用技术中，则可实现分数阶 Fourier 域的多路复用方案，在某些情况下，这种多路复用方法可能比时分复用和频分复用的效率更高。文献[29]中，M. Martone 提出了分数阶 Fourier 域的 OFDM 系统的原理与实现方案，基于分数阶 Fourier 域最优滤波的原理，这一方案在快衰落无线信道的环境中具有比传统的频域 OFDM 系统更加优越的性能。

3．分数阶 Fourier 变换与其 Wigner-Ville 分布（WVD）、小波变换、短时 Fourier 变换、

Radon－Wigner（RW）变换，模糊函数等时频分析工具有着密切的联系。而这些时频分析工具在理论与应用上相对来说更为成熟，人们对它们也相对更为熟悉。因此，采用联系的观点分析和研究分数阶 Fourier 变换有重要的指导意义。其中，各种基于 RW 变换的应用最具有研究价值。RW 变换经常被用作一种对时变信号进行分析的有力工具，被认为是一种在噪声背景中对线性调频信号进行最大似然检测与估计的方法。RW 变换与信号去线性调频是等价的。分数阶 Fourier 变换与 RW 变换的关系式表明：信号分数阶 Fourier 变换的模平方正好是该方向上的 RW 变换。利用这一关系式，关于 RW 变换的性质和许多研究成果可以直接应用到分数阶 Fourier 变换上来，因为很多场合下我们更关心分数阶 Fourier 变换的模值情况。深入研究它们之间的联系也是一种十分重要的思路。在某些场合，用分数阶 Fourier 变换来替代其它的时频分析工具可以带来一些好处，如分数阶 Fourier 变换可以借助于 FFT 来实现，因此其计算简便；另一方面，FRFT 是一种一维的线性变换，在处理多分量信号时可避免交叉相的困扰。

1.3 本书的内容安排

本书包括 9 章。第 2 章介绍了信号的正交变换与时频分析的一些基本知识，正交变换的定义与性质，常用的时频分析工具，如短时 Fourier 变换、Wigner-Ville 分布、模糊函数、小波变换等的原理与特性。由于分数阶 Fourier 变换在本质上也是一种时频分析工具，必然与其他的时频分析方法具有内在的联系，因此，第 2 章的内容对于读者理解分数阶 Fourier 变换的定义、性质和应用是非常有帮助的。如果读者对这部分内容比较熟悉，则可略去不读。

第 3 章介绍了分数阶 Fourier 变换的定义与性质。首先利用算子的概念导出了分数阶 Fourier 变换的基本定义方式，即它是一种线性积分变换，是 Fourier 变换的定义的一种推广。随后，给出了分数阶 Fourier 变换的其他几种定义及其相互关系，并总结了分数阶 Fourier 变换的基本性质。在此基础上，介绍了分数阶卷积与分数阶相关的基本概念。最后还介绍了分数阶 Fourier 变换的光学实现。

第 4 章介绍分数阶 Fourier 变换的离散化方法及快速算法。对于一个信号处理工具而言，没有相应的数值计算方法则很难将其应用到实际问题中。本章主要介绍了离散分数阶 Fourier 变换的定义及性质，目前已存在的分数阶 Fourier 变换的几种主要的离散化算法，包括矩阵因子幂方法、分解法、GSA 方法和 OPA 方法以及直接离散化方法等。并从定义原理、计算复杂度以及与连续分数阶 Fourier 变换的相似性等方面对这些算法的性能进行了分析和比较，总结了各种离散化方法的特性和优缺点。

在信号处理领域中，传统 Fourier 变换是一个研究最为成熟、应用最广泛的数学工具。Fourier 变换是一种线性算子，若将其看作从时间轴逆时针旋转$\pi/2$ 到频率轴，则分数阶 Fourier 变换算子就是可旋转任意角度α 的算子，并因此得到信号新的表示。分数阶 Fourier 变换在保留传统 Fourier 变换的性质和特点的基础上又添加了其特有的新优势，可认为分数