

化工原理

上册

苏元复 等编

化 工 原 理

上 冊

蘇 元 復

張 震 旦 王 承 明

編 譯

龍 門 聯 合 書 局 出 版

編譯例言

1. 化學工程是一門比較新興的學科，可認為是講求化學工業生產手段的基本學科。各種化學工業的過程，倘加以分析和整理，均可歸納為若干共通而比較少數的“單元操作”。化工原理即是研究和闡明各種單元操作的原理，並探求實施上的各項有利條件和控制因素，一方面應用於化工設計上，另一方面則應用於實際操作上，以一致導向提高生產效率的最終目的。所以現代的化學工程師，必須是以此項學程為基礎，而兼備其他必要學科的素養的技術工作者。因此，不僅大學的化工系學生，和準備參加生產崗位的化學系學生，必須接受化工原理的嚴格訓練，即對理論素養較差的實際工作者，亦必須充實和熟習有關單元操作的基本原理，以不斷地提高其技術水平。

2. 本書係以 Badger 及 McCabe 二氏合著的 Elements of Chemical Engineering 第二版為底本，參考其他文獻編譯而成。原書體例，理論與實際並重，內容簡明扼要，淺顯易讀，頗適於初學學生修讀及一般參考之用。為了保持這些優點，我們在材料的處理上，極大部分是以逐譯為主，並曾力求譯文之不肯原義。但原書改版，迄今已歷十有餘年，故其內容已有很多似嫌陳舊之處。為了符合目前化工進展的趨勢，我們會儘可能地網羅而增補一些新的材料，並且有些章節是完全重寫了的，但亦處處步趨原書的體例，使仍不失為初級教本的初衷。

3. 主要的增刪，是在流體的流動，熱的流動，蒸餾，氣體的吸收，萃取，混和和過濾等章中。新增的有吸附，浮選（由顆粒離析一章中重寫分出）及固體的流化等三章。在其他各章中，遇有必要也都有適當的修改。附錄各表的數據，都經根據新的資料修正。此外，還新增了若

干新型機械的插圖，這些插圖也都經選用適宜的線插圖，以期與原有的一致。

※

4. 關於單位方面，原書都用英制。我國以往不但商業上慣用英制，即工廠中亦習用英制單位（當然也有少數機構是用公制的）。按照目前的趨勢，我們自有改用公制單位的必要，不過此種改變，似須以漸進的方式推行之。因此本書仍暫製用英制，而於附錄中添列若干英制與公制的基本單位換算表。本來學科學或工程的人，都應熟習各種單位的換算，我們自亦希望讀者對於此種換算，能熟練地運用，以適應實際的需要。

5. 關於術語的譯名方面，大部分係以中國科學院編譯局所主持擬訂的化學名詞草案為依據，但亦有一部分是新擬或改擬的。如試譯 balance 為“清算”，mol 為“衡分子”，head 為“壓頭”，threads 為“牙線”，steam trap 為“蒸汽穿”等等。有些名詞，在西文中有別，但在中文則習慣上不加區別，為了行文謹嚴起見，亦曾勉強分譯：如譯 pipe 為“管”，tube 為“管子”。此外，如流體輸送一章中的各種管件，蒸發一章中的各種加料法，浮選一章中的各種浮選池，以及吸附等章中所用的稱語，也都曾擬定一套系統的譯名。凡此，都祇代表我們三數人的私見，管窺蠡測，概候明教。

6. 在編譯的過程中，我們雖曾黽勉將事，但學力時間，兩有不逮，謬誤之處，究屬難免，倘荷斧正，則片楮隻字，均所拜嘉。顧翼東，據定一，蔣慰孫諸先生，曾於百忙中為我們校閱了若干章節；朱勉鋈，沙必時，王鴻生諸先生，或曾為我們編製了一部分的索引，或曾給我們提供了若干寶貴的意見，都願趁此謹表謝意。

上册目次

編譯例言

第一章 概論	1
第二章 流體的流動	18
第三章 流體的輸送	58
第四章 熱的流動	103
第五章 蒸發	165
第六章 擴散過程的一般機理	222
第七章 濕度及空氣調理	230
第八章 乾燥	257
附錄	

第一章

概論

化學工程是比較新興的行業，因而它所包括的範圍，往往不能明確地規定。四十年前，化學工程師所受的訓練，主要是化學的，他的工作背景仍是化學實驗室，祇是他已有充分的工廠經驗，對於某些類型的機械，能夠熟練地運用而已。他思索一個過程^a，是從它的化學觀點着眼；分析此一過程的操作，則祇從過程的本身着手。所以在此時期中，將化學工程師的領域，按製造過程劃分為諸如硫酸、製碱、橡膠、製皂、紡織等等，是非常自然的。在這些不同的工業之間，不曾看出有什麼共同之點；並且也很少作見解上或機械上的交流。

化學工程的單元操作^b

隨着第一次世界大戰前後十餘年間，化學工業的巨大進展（可能大半由於此項進展的強烈，和其中很多是開拓性的），開始認識有些工程操作，實在是許多前此認為各不相關的製造過程所共有的。例如，認識了液體的輸送和熱的流動，幾乎是一切製造過程的共同操作。過濾工程師發見，爲了從金礦萃取純金所設計的濾機，亦適用於大多數化學工業中的過濾。同時並開始認識對於這類的操作還了解得很少，都需要下一番檢查、發揚和研究的工夫。一開始這種深入的研究，某一操作，不論應用於那一種工業中，都屬於同一原理，就成爲更顯明的事實。這樣就逐漸地認識了，關於這些操作的知識，實在是了解各種製造過程的真正鎖鑰。於是化學工程師的領域，就被公認爲應該包括單元操作在內。此項觀點一經確立，有關單元操作的研究，無論在理論上或應

^a process ^b unit operations

用上，都獲得迅速的進展，而終於從討論個別製造過程的工業化學中分出，成爲一門獨立的學科，也就是本書的討論內容。

雖然在比較老資格的工程部門中，還有許多人對化學工程師的所司有些模糊，但目前在化學工程師與化學師之間，則對於單元操作的涵義，和一方面對於化學工程師與化學師間，以及另一方面對於化學工程師與機械工程師間的分野，大體上都已獲得一致的看法。但在化學工程行業中，關於單元操作的數目，命名和分類，都還未臻標準化，所以在本書中所討論的這些操作的目錄，和其他作者所做類似的目錄，可能相同，亦可能兩樣。但這種命名上或分類上的歧異，是不關重要的。一般而論，幾乎每一個化學製造過程，都不妨認爲可以分割成後文所述的那一串單元操作。

再則，這些同樣的單元操作，對於許多不算真正化學工業的工業，亦極重要。例如，在食鹽的製造過程中，事實上並無一個化學反應，但它包括了一串的單元操作，諸如液體輸送、蒸發、結晶、乾燥及顆粒離析等等。同樣，各種單元操作構成了許多過程的基礎，這些過程的本質雖是化學的，但尋常並不當它們是化學工業。如從鑛石中萃取金屬（特別是用濕法），多種食品的製造，和金屬的處理，都是例子。

基 本 概 念

用一張比較小的單元操作的目錄，來代替各種獨立的製造過程的大單子，就把化學工程的處理方法簡化了一大步，因此也提高了熟諳化學工程者的工作能力。簡化的程度並不即此爲止，因爲單元操作本身，雖然是用各式各樣看上去並無類似之點的機械來實現的，但從它所包含的原理的觀點來看，還祇是極少數幾則基本定律的應用。事實上，這些定律都是物理科學上的基本定律，可說是一切技術的基礎。本書理論部分的依據，就是這些少數基本定律在單元操作上的應用。基本定律有三：第一，質量及能量不滅；第二，各種物理及化學過程的平衡；

第三,支配不在平衡狀態的物系變化率的各律。

物料清算^a 第一基本律稱:物質不生不滅。具體言之,這條定律要求:參加任何製造過程的物料,必須全部累積在過程中,或則全部離開,在過程中不能有所損益。本書所要考慮的各種過程,將不含有累積或涸竭的現象,所以質量不滅律所取的形式亦極簡單,祇是說“收支必需相抵”。此律通用的形式,就是物料清算,其涵義乃以一切進入過程的物料為借方,一切離開過程的物料為貸方,而借方的和必須等於貸方的和。此種簡單而賅備的說法,其重要性是不容低估的。物料清算必須掌握住整個過程或機械,或其任一部分。物料清算必須應用到一切進入或離開過程的物料上,應用到一切進入或退出過程的化學元素上,或者應用到一切通過過程而不遭受變化的物質上。

熱量清算^b 能量不滅律對於一個製造過程或機械的能量收支,其意義正如質量不滅律之於物料的收支。倘要正確,能量清算中應包括與過程有關的各種形式的能,不管這些能量是熱能,機械能,電能,輻射能,化學能,或其他形式的能。但在許多情況下,所含唯一的能是熱能,所以對於這些情況,表示“熱量收支相抵”的熱量清算就很正確,而且也非常有用。此時的熱量清算,亦必須掌握住整個機械或過程,或其任一部分。

平衡關係^c 物系之自然發生變化者,其變化必向一定的方向進行,假如聽其自然,結果必將達到表面上看去不再起作用的狀態。這種狀態謂之平衡狀態。例如,將一塊熱鐵和一塊冷鐵放在一起,互相接觸,熱鐵會逐漸變冷,而冷鐵亦會逐漸變熱,直至達到一平衡點,此時兩塊鐵的溫度就完全相同。又如取一撒鹽放在一杯水中,祇要有過量的鹽存在,並且保持一定的溫度,鹽就會繼續溶解,直至溶液中的鹽達到一定的濃度為止。此處鹽的溶解作用,於到達平衡點時,亦顯然停止了,而所成的溶液就是所謂飽和溶液。像這類的例子是很普遍的,而平衡

^a material balance ^b heat balance ^c equilibrium relationships

情況所表示的就是各種自然發生的作用的終點，除非支配該物系作用的情況有變，這些終點是不變的。

反應速率^a 實際上，較之作用的終點還更顯得重要的，是此作用以什麼速率趨向平衡的問題。固然，當一正在作用的物系，雖距平衡點尚遠，但趨向該點的速率却極緩時，在一般的實際問題中，我們可以當它是已達到了平衡的狀態；但是，如果希望一個反應發生，則一般都希望反應的速率能相當的大，因為在實際操作中，時間是重於一切的因素。例如，設有一大區^b的粘滯冷液，以汽套^c加熱。倘不加攪動，則液體達到與蒸汽平衡之點（即達到蒸汽的溫度）極慢，說不定會需要多少天。但若將液體劇烈攪動，或將液體用泵以高速送過汽熱的套管中，液體就可以在幾小時甚至幾分鐘內達到了預期的平衡。

惜乎我們對於支配反應速率的各定律，並不像質量或能量不滅或平衡狀態各律那樣地知道得清楚確實。而且不容易將它們寫成數學公式。要獲得一些數據，或根據這些一旦獲得的數據來做一些計算，都需要比較精緻的技術。可是，一般說來，在某一特定時刻趨向平衡的速率，則至少可以近似地用推動力^d除以阻力來表示。推動力的種類視所考慮的過程而異。推動力的必要條件是，在平衡狀態時它必須等於零。關於此項定理的應用，最好舉例以明之。譬如，引起熱體與冷體間的熱流動的推動力，是冷熱二體間的溫度差。溫度差若等於零，則此二物體互成熱平衡，彼此間就不會有熱的流動。使得流體在一水平管路中流動的推動力，是一截面處的流體和另一截面處的流體間的壓力差。倘二截面處的壓力相等，則不會流動，而此過程亦就在平衡狀態中。電流的發生是由於電壓的差異，故在同一電路中的物料，若電壓相同，則決不會有電流通過。鹽和不飽和溶液接觸後就會溶解，所以引起此項作用的推動力，可視為飽和溶液和該溶液間的濃度差。

上述的反應速率定律，須寫成微分式的形式，以說明反應速率是等

^a rate of reaction ^b tank ^c steam jacket ^d driving force

於推動力除以阻力。必須用微分式，是因為在操作進行時，推動力變，所以反應速率亦變。關於此點，在以後考慮各種操作的基本原理時，還要詳細地討論。此式的數學式可寫成

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{\Delta F}{R} \quad (1)$$

式中的

Q = 移轉的量(可以是熱量,質量,或任何形式的能量)。

θ = 時間。

ΔF = 推動力。

R = 阻力。

分子單位 在化學反應的物料清算中，採用分子單位要比普通的重量單位簡單些。一衡分子^a的任何純粹物質的定義是：該物質重量在數字上等於其分子量的量。由此定義，即可推知磅衡分子及克衡分子的意義。工程計算中的分子單位，有許多地方，是用磅衡分子。一混合物的平均分子量可用下式求出：

$$\frac{W_A + W_B + W_C + \dots}{\frac{W_A}{M_A} + \frac{W_B}{M_B} + \frac{W_C}{M_C} + \dots} = M_{\text{平均}} \quad (2)$$

式中的

W_A, W_B, W_C = 混合物中各純組成物的個別重量。

M_A, M_B, M_C = 各純組成物的分子量。

$M_{\text{平均}}$ = 平均分子量。

衡分子分率^b 組成的表示法，往往以不用重量分率或重量百分率，而用衡分子分率或衡分子百分率^c，較為方便。衡分子分率是一組成物的衡分子數與混合物中的總衡分子數之比。例如，用式(2)的同樣符號，組成物 A 的衡分子分率是：

^a mol ^b mol fraction ^c mol percent

$$\text{衡分子分率 } A = \frac{W_A/M_A}{\frac{W_A}{M_A} + \frac{W_B}{M_B} + \frac{W_C}{M_C} + \dots} \quad (3)$$

同樣,

$$\text{衡分子分率 } B = \frac{W_B/M_B}{\frac{W_A}{M_A} + \frac{W_B}{M_B} + \frac{W_C}{M_C} + \dots} \quad (4)$$

由此可見，所有組成物的衡分子分率之和必等於一。衡分子百分率，不消說就是衡分子分率乘 100。

氣體定律 除了頁 2 至 5 所討論的各基本定律之外，還有許多定律，雖然準確的範圍比較狹，但有很大的用處。其中的某些條，例如 Raoult 律等，將留在和有關的特殊問題上討論。而在本書中，可能最具一般用途的是普通的氣體律。雖然氣體律不能正確應用到實際氣體的問題上，但對於常溫常壓下多數的氣體或蒸氣，在工程計算上已夠準確。此律的通常形式是：

$$PV = nRT \quad (5)$$

式中的 P = 壓力。

V = 容積。

T = 絕對溫度①。

R = 常數，一切氣體的都相等。

n = 氣體的衡分子數。

此式很少就以這樣的形式應用。但它表示了三項事實：第一，氣體的容積和衡分子數成正比；第二，容積和絕對溫度成正比；第三，容積和壓力成反比。二三兩項，在把氣體的容積從某一溫度及壓力，換算到另一溫度及壓力時，特別具有價值。例如，在某一絕對溫度 T_1 和絕對壓力 P_1 下的氣體容積若為 V_1 [立方呎]，則在另一絕對溫度 T_2 和絕對壓

① 絕對溫度可以開氏度 (degree Kelvin) ($^{\circ}\text{K}$.)，即攝氏度加 273 的溫度計之；亦可以蘭氏度 (degree Rankine) ($^{\circ}\text{R}$.)，即華氏度加 460 的溫度計之。

力 P_2 時，必將佔有 V_2 [立方呎] 的容積，而 V_2 之值即可從下式算出：

$$V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \quad (6)$$

要決定每一分數中應以那一項為分子，並不需要記住式(6)。通常祇要記住容積隨壓力的增大而減小，又隨溫度的增高而加大，這一點性質上的概念即可。

衡分子容積^a 由式(5)可知，一衡分子的氣體，在一定的溫度和壓力的情況下，恆佔有一定的容積，而與氣體的種類無關。此項容積稱為衡分子容積。一克衡分子的氣體，在 0°C . 和 760 [毫米] 汞柱的壓力下，佔有 22.41 [呎]。一磅衡分子的任何氣體，在 760 [毫米] 和 32°F . 的溫度下，佔有 359 [立方呎]；或在 30 [吋] 汞柱的壓力和 60°F . 下，佔有 378 [立方呎]。在任何其他溫度或壓力情況下的一磅衡分子的容積，都易由式(6)算出。

另一有關氣體的重要定律，是 Dalton 氏分壓律。此律的內容是：混合氣體所呈的總壓力，可以看做是每一組成氣體彷彿單獨存在並佔有總容積時所呈壓力的總和。所以混合氣體可視為各個別氣體的分容積之總合，每個分容積都是在總壓力下的容積；亦可視為各氣體的總合，而每一氣體都在它本身的分壓下佔有總的容積。

衡分子容積的概念，可適用於混合氣體，正如它之適用於純粹氣體。一般地說，一磅衡分子的混合氣體，是在 760 [毫米] 汞柱的壓力和 32°F . 時，能佔有 359 [立方呎] 的該氣體的重量。這個數量，亦就代表氣體的平均分子量。

理想氣體混合物各律的最實用的形式是：

$$\text{容積}\% = \text{壓力}\% = \text{衡分子}\% \quad (7)$$

例如，空氣含有 79 [容積%] 的氮和 21 [容積%] 的氧。故於 P [大氣壓] 的壓力下 1 [立方呎] 的空氣，可視為一種含有在 P [大氣壓]

^a mol volume.

下 0.21 [立方呎] 的氧,和在 P [大氣壓] 下 0.79 [立方呎] 的氮的混合氣體。亦可視為一種由 1 [立方呎] 在 $0.21 P$ [大氣壓] 的氧,和 1 [立方呎] 在 $0.79 P$ [大氣壓] 的氮所組成的混合氣體,因此其中 21% 的總壓力是由於氧,而 79% 的總壓力則由於氮。最後,亦可以說在任何溫度和壓力的條件下,1 [衡分子] 的空氣總是含有 0.21 [衡分子] 的氧和 0.79 [衡分子] 的氮。

例題 1 某處溶劑回收時,得一種為苯蒸氣所飽和的氣體,按減苯基^a分析的結果,在 70°F . 和 750 [毫米] 壓力的情況下,內含 15% CO_2 , 4% O_2 , 和 81% N_2 。若將此氣體壓縮至 5 [大氣壓],且於壓縮後冷卻至 70°F 。問由此過程,每 1000 [立方呎] 的原混合氣體可凝縮得若干磅的苯? 苯的蒸氣壓在 70°F . 時是 75 [毫米]。

解 因容積%等於壓力%,惰氣的容積是 $1000 \times \frac{750-75}{750} = 900$ [立方呎]。此容積可換算為衡分子數如下:

$$\frac{900 \times \frac{460+32}{460+70} \times \frac{750}{760}}{359} = 2.30 \text{ [衡分子] 的惰氣。}$$

在壓縮前後的苯蒸氣衡分子和惰氣衡分子之比是:

$$\text{壓縮前,} \quad \frac{75}{750-75} = 0.1111$$

壓縮後,

$$\frac{75}{(760 \times 5) - 75} = 0.0201$$

故由每衡分子的惰氣中,可凝縮得

$$0.1111 - 0.0201 = 0.091 \text{ [衡分子] 的苯;}$$

而此凝縮的苯的重量是

$$0.091 \times 2.30 \times 78 = 16.3 \text{ [磅]}$$

單 位

雖然關於英制^b和公制^c單位的優劣,衆論紛紜,迄無定議,但在我國的化工界中,可說大都還沿用着英制單位。所以本書亦全部採用這些單位。誠然,在有些化學工業中,工廠操作是用攝氏溫度,而且亦有少數的工廠計算和設計,是用公制的重量和度量單位,但後述的情形較少,姑置不論;而用攝氏溫度的工廠數目確乎增加得很快,所以化學工

^a benzene-free basis

^b English system

^c metric system

程師要能對攝氏和華氏二種溫度自由活用，不要完全拘泥於一種制度。因此，雖然本書大部分用的是華氏溫度，但偶而亦用攝氏溫度，却並不註明與之相當的華氏度數。

反之，化學工程師所需用的數據，有很多須取之於研究室的工作，而研究報告所用的單位，則以公制為常。所以必須能作二種制度單位的換算，要算得快，算得準。即使是完全根據英制來做計算，有時亦需要把一組的單位換算成另一組的單位。換算的方法是簡單的，祇包括了一些比例；但往往很麻煩，不僅學生感覺如此，即作實際工作的工程師亦感覺如此。關於各種基本單位的換算，具見附錄 XI 中的各表。下列的祇是若干普通最需用的換算因數：

$$1 [\text{吋}] = 2.540 [\text{厘米}]$$

$$1 [\text{呎}] = 0.3048 [\text{米}]$$

$$1 [\text{磅}] = 0.4536 [\text{仟克}]$$

$$1 [^{\circ}\text{C.}] = 1.8 [^{\circ}\text{F.}]$$

$$1 [\text{仟瓦}] = 1.341 [\text{馬力}]$$

$$1 [\text{仟卡}] = 3.968 [\text{英熱單位}]$$

$$1 [\text{卡/克}] = 1.8 [\text{英熱單位/磅}]$$

$$1 [\text{大氣壓}] = 760 [\text{毫米}]\text{汞柱}$$

$$= 29.92 [\text{吋}]\text{汞柱}$$

$$= 1,033.3 [\text{克/平方厘米}]^{\text{①}}$$

$$= 14.696 [\text{磅/平方吋}]$$

$$1 [\text{英熱單位}] = 778.6 [\text{呎磅}]$$

$$1 [\text{加侖}] = 231 [\text{立方吋}]$$

$$\text{氣體常數}(R) = 1,543 [\text{呎磅}/(\text{磅衡分子}) \times (^{\circ}\text{R.})]$$

例題 2 設某導熱係數的値，係以 $[(\text{仟卡}) \times (\text{米}) / (\text{平方米}) \times (^{\circ}\text{C.}) \times (\text{秒})]$ 計，問應如何換算為英制，即以 $[(\text{英熱單位}) \times (\text{呎}) / (\text{平方呎}) \times (^{\circ}\text{F.}) \times (\text{小時})]$ 計？解法祇要把原單位用公式寫出來，再將必要的換算因數代入即可：

$$\left(\frac{\text{仟卡} \times \text{米}}{\text{平方米} \times ^{\circ}\text{C.} \times \text{秒}} \right) = \left(\frac{3.968 \times \frac{1}{0.3048}}{\left(\frac{1}{0.3048} \right)^2 \times 1.8 \times \frac{1}{3600}} \right) \left(\frac{\text{英熱單位} \times \text{呎}}{\text{平方呎} \times ^{\circ}\text{F.} \times \text{小時}} \right)$$

$$1 [\text{公制單位}] = 2,420 [\text{英制單位}]$$

① 在歐洲的工程文獻中，一大氣壓往往是以 1000 [克/平方厘米] 計算的，所以往往不易判明，一大氣壓究竟指的是這樣的壓力，或是相當於 760 [毫米] 汞柱的壓力。

有用的數學方法

本書所述各項單元操作的理論，所需計算上的數學技術，祇是微積分最基本部分的應用。茲假定讀者對於這些基本運算都已熟習。但尚有二種數學方法，雖然非常簡單，但在化工計算上極有用處，值得扼要地加以討論。第一種方法是圖解積分法^a的應用，第二種是冪函數^b的圖解法。

圖解積分法 根據積分法的基本原理，應知定積分

$$\int_{x_a}^{x_b} f'(x) dx$$

之值，是 $f'(x)$ 對 x 的曲線，與縱軸 $x=x_a$ ， $x=x_b$ 及 X 橫軸間所包括的面積。所以一切定積分，都可無須用積分表以求其值，祇要以 $f'(x)$ 對 x 標繪，畫出兩條相當於極限的垂直線，然後測量這條曲線和兩極限及 X 橫軸間所包括的面積。例如在圖 1 中，假定 $abcde$ 曲線代表 $f'(x)$ 對 x 的標繪，並假定 af 和 eg 線各相當於 x_a 和 x_b 之值，則 $abcdegf$ 的整個面積就是所要求的積分之值。

面積的測量法，是把它割裂成許多長方形，如圖 1 中的斜線部分所示。長方形的高度應選擇得當，務使在此長方形和曲線間所略去的小三角形的面積，和曲線之上長方形中所闖入的小三角形（有斜線的）的面積，約略相等。若曲線的曲率不十分大，且若 Δx 選擇得夠小，則長方形的高度即使全憑眼力估出，亦必能非常準確地符合上述的條件。於是所要求的面積，就是所有這些長方形的總和，圖 1 僅畫出其中的一個。

任何函數與一導函數的乘積的積分，一般的規則是：不論函數本身如何複雜，總是將導函數的變數沿 X 軸，此函數沿 Y 軸而標繪，然後測定所得曲線和 X 軸在所定的極限間所包含的面積。

^a graphical integration ^b exponential functions

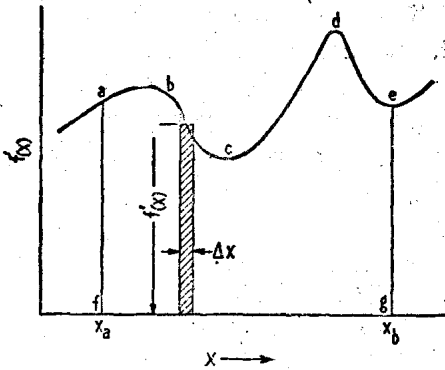


圖 1 圖解積分法的原理

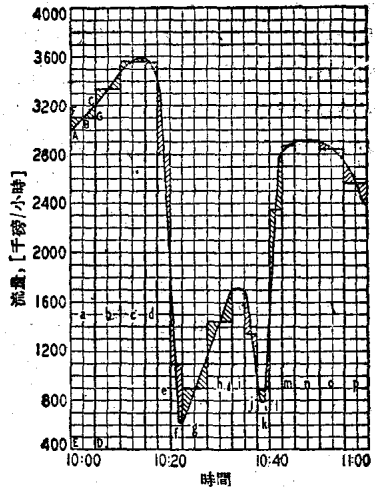


圖 3 例題3的解法

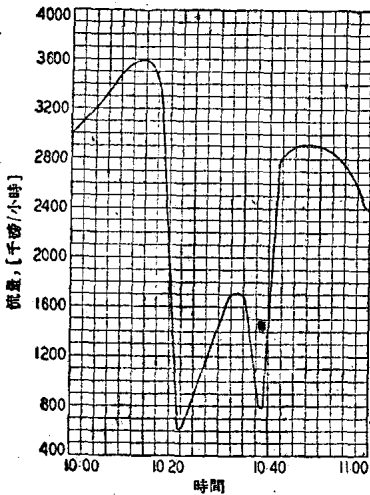


圖 2 例題3的數據

此項積分法特別有用，因在許多實例中， $f'(x)$ 的量不能用數學式直接表示出來。在許多實例中，可能有的祇是 y 對 x 的實驗標繪，所以無法寫成簡單的數學式。想用正規的方法，從這些數據求出積分 $\int_{x_a}^{x_b} y dx$ 之值，非常困難，因為先須根據這些數據寫出一個經驗式來。

例題 3 圖 2 示蒸汽在管路中的流速，以 [千磅/小時] 計。(a) 問在 10:00 與 11:00 時之間，蒸汽流過的總重量應為若干？(b) 繪一曲線以表示蒸汽總流量對時間的關係。

解 設以 R 為在任何時間 θ 的流速，則在極短時間 $d\theta$ 內蒸汽的流量應為 dW [磅]，即 $dW = R d\theta$ 。在全時間內的總流量 W_T ，必為上式的積分值，即

$$\int_0^{W_T} dW = \int_{10:00}^{11:00} R d\theta = W_T \quad (8)$$

如欲用正規方法求積分 $\int_{10:00}^{11:00} R d\theta$ 之值，則須先將 R 用 θ 來表示。一個能與圖 2 的曲線符合的方程式，顯然是極難求的，即使求出了也一定非常複雜。但此積分可用圖

解法很容易地解出，因為所需要的積分值，就等於曲線，時間軸和兩條相當於 $\theta=10:00$ 及 $\theta=11:00$ 之值的垂直線間所圍入的面積。此項面積可分成許多類似 a, b, c 等等的細長條，(圖3)。細長條 a 的正確面積是 $ABCDEA$ 。若細長條的寬度取得夠小，則可添置一條 FG 線，以使三角形 AFB 的面積，大致和三角形 BCG 的面積相等。 $FBGDEF$ 的面積就易於求出，因為它是一個長方形。照這樣做下去，整個所要求的面積

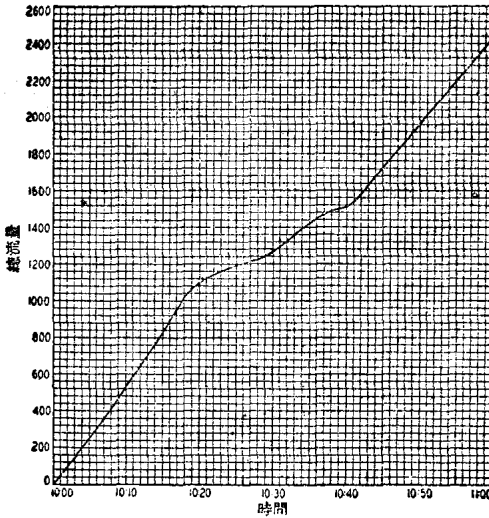


圖 4 例題 3 的積分曲線

都可改成一連串的長方形。長方形的高度 a, b, c, \dots, p 應該妥為選擇，務使原曲線上部的斜線面積，適等於曲線下部的斜線面積。為了要使這些面積代表以 [磅] 計算的流量，長方形的高度必須以 [磅/小時] 來表示，而長方形的底則用 [小時] 來計算，因為

$$\frac{\text{磅}}{\text{小時}} \times \text{小時} = \text{磅}。$$

由下表即可明瞭計算的方法，並可看出總面積是代表 2,412 [磅]，亦就是從 10:00 到 11:00 蒸汽流過管子的總重量。

由這樣的積分，不僅可獲知該全部時間內的總流量，亦可獲知從 10:00 開始，到以後任何時間的總流量，直至 11:00 為止。例如，由表的項 6，可以查出 10:20 (在長方形 c 的終點) 時，已有 1,098 [磅] 的蒸汽流過管子；在 10:35，流過了 1,410 [磅]，等等。由項 1 和項 6 的數據，可以作成圖 4，表示到任何時間為止的總流量。此一曲線，稱為式(8)的積分曲線。