中学数学实用手册

孙涤寰　孙育卿　赵正奇　编译

东北师范大学出版社

中学数[illegible]用手册

孙涤寰 孙育卿 赵正奇 编译

东北师范大学出版社

中学数学实用手册

ZHONGXUE SHUXUE SHIYONG SHOUCE

孙涤寰 孙育卿 赵正奇 编译

责任编辑：杨述春 封面设计：一 了 责任校对：禾 女

东北师范大学出版社出版 吉林省新华书店发行
(长春市斯大林大街 110 号) 长春新华印刷厂制版
(邮政编码：130024) 长春新华印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/32 1989年12月第1版
印张：9.25 1990年6月第1次印刷
字数：270 千 印数：0 001—4 000 册

ISBN 7-5602-0363-9/G・142 (压膜)定价：3.50 元

编译者的话

本书是根据日本“旺文社”1988年出版的岩濑重雄所著《高校数学公式活用事典》编译的。

原书内容丰富，叙述详尽，论证严谨，基础知识与应用结合紧密，是供日本高中学生使用的工具书。

原书共21章，我们选译其中符合我国《中学数学教学大纲》内容的13章，并按照我国现行中学数学教材的体系重新编排。

本书可供初、高中学生学习参考，也可供中学数学教师教学参考。

参加本书编译的有孙涤寰、孙育卿、赵正奇。全书由孙涤寰统校。

编译者

1988年12月于长春

目　录

第一章　数 与 式

第二章　方程与不等式

第三章　函数与图象

第四章　三 角 函 数 （一）

第五章　三 角 函 数 （二）

第六章　指数函数与对数函数

第七章　平面图形与方程

第八章　二次曲线

第九章 数　列

第十章 排列、组合、二项式定理

第十一章 整式函数的微分法

第十二章 集合、映射、逻辑

第十三章 平面几何、立体几何

第一章　数　与　式

§1·1　整　式

《1. 整式的加法、减法》

1　**单项式**　由数与若干个字母的积所表示的代数式叫做单项式。

单项式中的数字因数叫做单项式（或字母因数）的数字系数，简称系数。

单项式中含有两个或两个以上字母时，把其中某一特定字母的指数叫做关于该字母的次数。

单项式中所有字母的次数之和，叫做这个单项式的次数。

2　**整式**　单项式或若干个单项式的和叫做整式，也叫做多项式。

整式中的每个单项式叫做该整式的项。

整式中，字母部分相同的项叫做同类项。

在整式中，把次数最高的项叫做这个整式的次数；把不含字母的项叫做常数项。

把一个整式中的各项按某一字母的次数，从高到低的顺序进行排列，叫做关于该字母的降幂排列。反之，从次数低的项到次数高的项进行排利，叫做升幂排列。

3　**运算的基本法则**

交换法则　$A+B=B+A$　$AB=BA$

结合法则　$(A+B)+C=A+(B+C)$　$(AB)C=A(BC)$

分配法则　$A(B+C)=AB+AC$

4　**整式的整理**

(1) 合并同类项；

(2) 按某一字母进行降幂或升幂排列整理。

5　**整式的加法、减法**

关于两个整式A，B

(1) 加法　$A+B$是把A、B中的各项相加。

(2) 减法　$A-B$是把A的各项与B的各项变号后相加。

【1. 说明与运用】

【1】* 例　单项式$-2ax^2$含$a\times x\times x$，因此它是三次式，系数是-2. 关于字母a是一次式，系数是$-2x^2$；关于字母x是二次式，系数是$-2a$。

【2】例　关于整式　$xy-x^2+3xy+4y^3+1-x+3y+2x$

(1) 按x的降幂排列整理。

(2) 按y的升幂排列整理。

解　(1) $-x^2+(4y+1)x+4y^3+3y+1$（关于x的二次式）

(2) $1+x-x^2+(4x+3)y+4y^3$（关于y的三次式）

【3】利用交换、结合、分配法则进行整式运算。

$$4x-5x^2-2x+1+x^2=-5x^2+x^2+4x-2x+1 \text{（交换法则）}$$
$$=(-5x^2+x^2)+(4x-2x)+1 \text{（结合法则）}$$
$$=(-5+1)x^2+(4-2)x+1 \text{（分配法则）}$$
$$=-4x^2+2x+1$$

【5】例　当$A=-x^2+3x-4$，$B=-3x^2-x+1$，$C=3+4x^2-x$时，计算$A-2B-3C$。

解　$A-2B-3C$

$$=(-x^2+3x-4)-2(-3x^2-x+1)-3(3+4x^2-x)$$
$$=-x^2+3x-4+6x^2+2x-2-9-12x^2+3x$$
$$=(-1+6-12)x^2+(3+2+3)x-4-2-9$$
$$=-7x^2+8x-15$$

---

* “说明与运用”的【　】中的序数与前面正文中的序数相对应，全书都如此。

带括号的运算法则

+（　　）时，（　　）内的各项原封不动相加。

-（　　）时，（　　）内的各项变号后相加。

另解

$$
\begin{array}{rr}
A\cdots\cdots & -x^2+3x-4 \\
-2B\cdots\cdots & 6x^2+2x-2 \quad \text{（降幂排列）} \\
-3C\cdots\cdots & -12x^2+3x-9 \\
\hline
A-2B-3C\cdots\cdots & -7x^2+8x-15 \quad \text{（各项系数相加）}
\end{array}
$$

《2．整式的乘法》

1　**指数法则**　单项式的乘法，利用下面的指数法则。

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{mn},\ (ab)^n=a^nb^n$$

2　**整式的乘法**　整式A，B的积AB是把A的各项与B的各项之积相加。（分配法则）

根据乘法的运算法则

$$
\begin{aligned}
(P+Q+R)(S+T)&=(P+Q+R)S+(P+Q+R)T\\
&=PS+QS+RS+PT+QT+RT
\end{aligned}
$$

【2．说明与运用】

【1】**例**　$(3xy^2)\cdot(-2x^2y)^2\cdot(-y)=3xy^2\cdot4x^4y^2\cdot(-y)$

$=-12x^{1+4}y^{2+2+1}=-12x^5y^5$

【2】**例**　$(2x^2-3xy+4y^2)(3x-2y)$

$=(2x^2-3xy+4y^2)\cdot3x+(2x^2-3xy+4y^2)\cdot(-2y)$

$=6x^3-9x^2y+12xy^2-4x^2y+6xy^2-8y^3$

$=6x^3-13x^2y+18xy^2-8y^3$

《3．乘法公式》

1　乘法公式（Ⅰ）

（1）$m(a\pm b)=ma\pm mb$（符号同序）

（2）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$（符号同序）

（3）$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

（4）$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

（5）$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

（6）$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$（符号同序）

2　乘法公式（Ⅱ）

（1）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

（2）$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$（符号同序）

（3）$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

（4）$(x+a)(x+b)(x+c)$

$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

（5）$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

【3．说明与运用】

【1】（5）**例**　$(4x+3y)(5x-2y)$

$=4\cdot 5x^2+(-8+15)xy+3y\cdot(-2y)$

$=20x^2+7xy-6y^2$

$$\begin{array}{cccc} 4x & & +3y & 15xy \\ & \times & & \\ 5x & & -2y & -8xy \\ \hline 20x^2 & & -6y^2 & 7xy \end{array}$$

【2】（1）**例**　$(x-2y-1)^2$

$=[x+(-2y)+(-1)]^2$（利用$(a+b+c)^2$的公式）

$=x^2+(-2y)^2+(-1)^2+2x(-2y)+2(-2y)(-1)$

$\qquad +2(-1)\cdot x$

$=x^2-4xy+4y^2-2x+4y+1$

【2】（3）的证明　$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$$=[(a^2+b^2)+ab][(a^2+b^2)-ab]$$

$$=(a^2+{}^2)^2-(ab)^2$$

$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4$$

【2】(4) **例** $(x-1)(x+2)(x-3)\quad(a=-1,b=2,c=-3)$

$$=x^3+(-1+2-3)x^2+[(-1)\cdot2+2\cdot(-3)$$

$$+(-3)(-1)]x+(-1)\cdot2\cdot(-3)$$

$$=x^3-2x^2-5x+6$$

〈 由乘法公式导出的重要公式 〉

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,\quad (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

③ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

④ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax\pm by)+(bx\mp ay)^2$ （符号同序）

《 4. 因式分解(1) 》

1 因式分解的基本公式

(1) $ma+mb+mc=m(a+b+c)$ （提取公因式）

(2) $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$ （符号同序）

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(5) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(6) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$（符号同序）

(7) $a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$ （符号同序）

(8) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

2 因式分解的重要公式

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(2) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(3) $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

$=(x+a)(x+b)(x+c)$

(4) 当n为正整数时

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})$

(5) 当n为奇数时

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})$

当n为偶数时

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-b^{n-1})$

3 因式分解方法

(1) 多项式的各项如果有公因式应首先提出。

(2) 选用适当的公式。

(3) 没有直接可用的公式的情况

① 按次数最低的字母进行整理。

② 对每部分进行因式分解，提出它们的公因式。

③ 变更项的顺序，加减适当的式子，再利用公式。

④ 利用因式定理（见9.因式定理）。

【4. 说明与运用】

【1】例 (1) $2x^3-32x$　　(2) $2x^2+xy-6y^2$

(3) $8x^3-y^3$

(4) $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$

解 (1) 原式$=2x(x^2-16)=2x(x+4)(x-4)$

(2) 原式$=(2x-3y)(x+2y)$　$\begin{array}{ccc} 2x & & -3y \\ & \times & \\ x & & 2y \end{array}$

(3) 原式$=(2x)^3-y^3$

$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

(4) 原式$=x^2+(-2y)^2+(3z)^2+2\cdot x\cdot(-2y)$

$+2(-2y)\cdot(3z)+2(3z)x$

$=(x-2y+3z)^2$　(利用$(a+b+c)^2$的公式)

【2】(1) 的证明 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$\begin{aligned}&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\&=[(a+b)^3+c^3]-[3ab(a+b)+3abc]\\&=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]\\&\qquad -3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

【2】(1) **例** $x^3+y^3+3xy-1=x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)$

$$=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$$

【2】(4)(5)**例** (1) x^5-1 (2) x^5+y^5 (3) $x^{2n}-1$

解 (1) $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

(2) $x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$

(3) $x^{2n}-1=(x+1)(x^{2n-1}-x^{2n-2}+x^{2n-3}-\cdots\cdots-1)$

注 (3) $x^{2n}-1=(x-1)(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots\cdots+1)$

> 对于a^n-b^n不论n是偶数或是奇数都可用公式（4）分解因式。
>
> 对于a^n+b^n仅当n是奇数时可用公式（5）分解因式。

【3】(3) **例** (1) $ab+2bc-b^2-ac-c^2$

(2) $x^3+x^2-8x-12$

解 (1) 按次数较低的字母 a 整理

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(b-c)a-(b^2-2bc+c^2)\\&=(b-c)a-(b-c)^2\\&=(b-c)(a-b+c)\end{aligned}$$

(2) 设 $f(x)=x^3+x^2-8x-12$，则有 $f(3)=0$，由因式定理可知$f(x)$有因式$x-3$。

$f(x)=(x-3)(x^2+4x+4)=(x-3)(x+2)^2$