

中学数学实用手册

孙涤寰 孙育卿 赵正奇 编译

东北师范大学出版社



中学英语 用手册

孙涤寰 孙育卿 赵正奇 编译

东北师范大学出版社

中学数学实用手册
ZHONGXUE SHUXUE SHIYONG SHOUC
孙涤寰 孙育卿 赵正奇 编译

责任编辑：杨述春 封面设计：一 了 责任校对：禾 女

东北师范大学出版社出版
(长春市斯大林大街 110 号)
(邮政编码: 130024)

吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂制版
长春新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 毫米 1/32

1989年12月第 1 版

印张: 9.25

1990年 6 月第 1 次印刷

字数: 270 千

印数: 0 001—4 000 册

ISBN 7-5602-0363-9/G · 142 (压膜)定价: 3.50 元

编译者的话

本书是根据日本“旺文社”1988年出版的岩瀬重雄所著《高校数学公式活用事典》编译的。

原书内容丰富，叙述详尽，论证严谨，基础知识与应用结合紧密，是供日本高中学生使用的工具书。

原书共21章，我们选译其中符合我国《中学数学教学大纲》内容的13章，并按照我国现行中学数学教材的体系重新编排。

本书可供初、高中学生学习参考，也可供中学数学教师教学参考。

参加本书编译的有孙涤寰、孙育卿、赵正奇。全书由孙涤寰统校。

编译者

1988年12月于长春

目 录

第一章 数 与 式

§1·1 整式····· 1	11 分式·····17
1 整式的加法、减法····· 1	12 比例式 (1) ·····19
2 整式的乘法····· 3	13 比例式 (2) ·····19
3 乘法公式····· 4	§1·3 数与集合·····22
4 因式分解 (1) ····· 5	14 数的分类·····22
5 因式分解 (2) ····· 8	15 整数 (1) ·····23
6 对称式、交代 式 (1) ····· 9	16 整数 (2) ·····23
7 对称式、交代 式 (2) ·····10	17 整数 (3) ·····26
§1·2 整式的除法与分式·····12	18 整数 (4) ·····28
8 整式的除法·····1 ²	19 整数 (5) ·····31
9 余数定理、因数 定理·····12	20 有理数、无理数·····32
10 最高公因式、最 低公倍式·····15	21 平方根、立方 根 (1) ·····34
	22 平方根、立方 根 (2) ·····34
	23 复数·····37

第二章 方程与不等式

§2·1 方程的解法·····40	4 高次方程·····44
1 方程的同解关系·····40	5 二项方程·····46
2 一次方程·····41	6 分式方程 (1) ·····48
3 二次方程·····42	7 分式方程 (2) ·····49

8	无理方程	50	20	方程的整数解 (2)	68
9	一次方程组	51	§2.3	不等式	70
10	二元二次方程组	54	21	不等式的同解关系	70
§2.2	方程的理论	56	22	一元一次不等式的解	71
11	根与系数关系 (1)	56	23	二次不等式的解	72
12	根与系数关系 (2)	58	24	高次不等式	75
13	二次方程根的符号 (1)	60	25	分式不等式	77
14	二次方程根的符号 (2)	61	26	无理不等式	77
15	二次方程根的存在范围 (1)	62	27	不等式组	79
16	二次方程根的存在范围 (2)	63	§2.4	等式、不等式的证明	80
17	公共根 (1)	64	28	等式的证明	80
18	公共根 (2)	66	29	恒等式	83
19	方程的整数解 (1)	67	30	不等式的证明 (1)	84
			31	不等式的证明 (2)	85

第三章 函数与图象

§3.1	二次函数	88	上的应用 (1)	93
1	函数	88	6	二次方程、不等式
2	一次函数	90	上的应用 (2)	95
3	二次函数的图		7	二次函数的最大值、
	象 (1)	91	最小值	96
4	二次函数的图		8	$f(x, y)$ 的最大值、
	象 (2)	92	最小值 (1)	97
5	二次方程、不等式		9	$f(x, y)$ 的最大值、

最小值 (2)	100	11 反函数	104
§3·2 分式函数、无理函数	102	12 无理函数 (1)	106
10 分式函数	102	13 无理函数 (2)	107

第四章 三角函数 (一)

§4·1 三角函数	111	§4·2 三角函数和图形	115
1 锐角三角函数	111	4 正弦定理	115
2 钝角三角函数	113	5 余弦定理	116
3 三角函数间的基 本关系	113	6 三角形的形状	117
		7 三角形的面积	118

第五章 三角函数 (二)

§5·1 任意角的三角函数	122	7 三角函数的图 象 (2)	131
1 弧度制	122	§5·2 加法定理	132
2 任意角的三角函 数 (1)	123	8 加法定理 (1)	132
3 任意角的三角函 数 (2)	124	9 加法定理 (2)	134
4 三角函数的性 质 (1)	127	10 积和公式、和积 公式	136
5 三角函数的性 质 (2)	128	11 合成公式、简谐 振动	138
6 三角函数的图 象 (1)	130	12 三角方程、三角 不等式	140

第六章 指数函数与对数函数

§6·1 指数函数与对数 函数	144	2 指数的推广	145
1 方根	144	3 指数函数的图象	147
		4 对数	148

5 对数函数的图象	149	不等式	151
§6.2 指数函数、对数函数的应用	151	7 对数方程、对数不等式	152
6 指数方程、指数		8 常用对数	154

第七章 平面图形与方程

§7.1 点、直线	156	7 圆与直线 (1)	168
1 点的坐标	156	8 圆与直线 (2)	169
2 直线的方程	158	9 圆与圆	171
3 二直线的关系 (1)	161	10 公共弦、极线	172
4 二直线的关系 (2)	161	§7.3 轨迹、区域	174
5 点与直线	164	11 轨迹	174
§7.2 圆	167	12 不等式的区域 (1)	176
6 圆的方程	167	13 不等式的区域 (2)	177

第八章 二次曲线

§8.1 二次曲线的方程	180	8 二次曲线的标准化	194
1 抛物线的方程	180	9 二次曲线的分类	196
2 椭圆的方程 (1)	182	§8.3 二次曲线与切线	200
3 椭圆的方程 (2)	185	10 抛物线的切线	200
4 双曲线的方程 (1)	187	11 椭圆的切线	201
5 双曲线的方程 (2)	188	12 双曲线的切线	202
§8.2 图形的移动、一般二次曲线	191	13 二次曲线与切线的性质	204
6 图形的移动	191	§8.4 二次曲线与轨迹、不等式的区域	205
7 坐标轴的移动	193	14 二次曲线与轨迹	205
		15 二次曲线与不等式	

的区域 (1)	206
16 二次曲线与不等式	

的区域 (2)	207
---------------	-----

第九章 数 列

§9.1 等差数列、等比数列	211	6 阶差数列	218
1 数列	211	7 其他数列	220
2 等差数列	211	§9.3 数列的归纳定义	221
3 等比数列	213	8 数学归纳法	221
§9.2 杂数列	215	9 数列的归纳定义	223
4 Σ 计算的基本式	215	10 递推公式 (1)	223
5 分式型数列的和	217	11 递推公式 (2)	226

第十章 排列、组合、二项式定理

§10.1 排列、组合	230	3 组合	235
1 情况的个数	230	§10.2 二项式定理	237
2 排列	232	4 二项式定理	237

第十一章 整式函数的微分法

§11.1 导数与导函数	241	6 函数的增减	247
1 函数的极限	241	7 极大、极小	248
2 平均变化率	243	8 最大、最小	249
3 导数	243	9 导数在方程、不等式上的应用	250
4 导函数	245	10 速度与加速度	252
§11.2 导函数的应用	246		
5 切线、法线	246		

第十二章 集合、映射、逻辑

§12.1 集合	254	2 包含关系	255
1 集合的表示方法	254	3 并集、交集	256

4	直积、元素的个数	257	11	逆、否、逆否	266
5	集合与运算	258	12	必要条件、充分条件	267
§12·2	映射	259	13	条件命题与真值集合	267
6	集合与映射	259	14	全称命题、特称命题	268
7	平面上点的变换	260	15	证明方法	269
8	置换	262			
§12·3	命题与集合	263			
9	命题与合成	263			
10	命题间的关系	264			

第十三章 平面几何、立体几何

§13·1	平面几何	271	11	圆与四边形	279
1	几何公理	271	12	圆与比例	280
2	角	271	13	两个圆	281
3	三角形	272	14	轨迹	282
4	平行线与比例	273	§13·2	立体几何	283
5	四边形	274	15	直线与平面的平行	283
6	面积、比例	275	16	直线、平面的垂直关系	284
7	勾股定理	276	17	平面与平面、直线与平面所成的角	285
8	圆的弧与弦	277	18	多面体、球	286
9	圆周角、弓形角	277			
10	圆与直线	278			

第一章 数 与 式

§1.1 整 式

〈 1. 整式的加法、减法 〉

1 单项式 由数与若干个字母的积所表示的代数式叫做单项式。

单项式中的数字因数叫做单项式（或字母因数）的数字系数，简称系数。

单项式中含有两个或两个以上字母时，把其中某一特定字母的指数叫做关于该字母的次数。

单项式中所有字母的次数之和，叫做这个单项式的次数。

2 整式 单项式或若干个单项式的和叫做整式，也叫做多项式。

整式中的每个单项式叫做该整式的项。

整式中，字母部分相同的项叫做同类项。

在整式中，把次数最高的项叫做这个整式的次数；把不含字母的项叫做常数项。

把一个整式中的各项按某一字母的次数，从高到低的顺序进行排列，叫做关于该字母的降幂排列。反之，从次数低的项到次数高的项进行排列，叫做升幂排列。

3 运算的基本法则

交换法则 $A + B = B + A$ $AB = BA$

结合法则 $(A + B) + C = A + (B + C)$ $(AB)C = A(BC)$

分配法则 $A(B + C) = AB + AC$

4 整式的整理

(1) 合并同类项；

(2) 按某一字母进行降幂或升幂排列整理。

5 整式的加法、减法

关于两个整式 A, B

(1) 加法 $A+B$ 是把 A, B 中的各项相加。

(2) 减法 $A-B$ 是把 A 的各项与 B 的各项变号后相加。

【1. 说明与运用】

【1】* 例 单项式 $-2ax^2$ 含 $a \times x \times x$, 因此它是三次式, 系数是 -2 .

关于字母 a 是一次式, 系数是 $-2x^2$; 关于字母 x 是二次式, 系数是 $-2a$.

【2】4例 关于整式 $xy - x^2 + 3xy + 4y^3 + 1 - x + 3y + 2x$

(1) 按 x 的降幂排列整理。

(2) 按 y 的升幂排列整理。

解 (1) $-x^2 + (4y+1)x + 4y^3 + 3y + 1$ (关于 x 的二次式)

(2) $1 + x - x^2 + (4x+3)y + 4y^3$ (关于 y 的三次式)

【3】利用交换、结合、分配法则进行整式运算。

$$4x - 5x^2 - 2x + 1 + x^2 = -5x^2 + x^2 + 4x - 2x + 1 \quad (\text{交换法则})$$

$$= (-5x^2 + x^2) + (4x - 2x) + 1$$

(结合法则)

$$= (-5+1)x^2 + (4-2)x + 1 \quad (\text{分配法则})$$

$$= -4x^2 + 2x + 1$$

【5】例 当 $A = -x^2 + 3x - 4$, $B = -3x^2 - x + 1$,

$C = 3 + 4x^2 - x$ 时, 计算 $A - 2B - 3C$.

解 $A - 2B - 3C$

$$= (-x^2 + 3x - 4) - 2(-3x^2 - x + 1) - 3(3 + 4x^2 - x)$$

$$= -x^2 + 3x - 4 + 6x^2 + 2x - 2 - 9 - 12x^2 + 3x$$

$$= (-1+6-12)x^2 + (3+2+3)x - 4-2-9$$

$$= -7x^2 + 8x - 15$$

* “说明与运用”的【】中的序数与前面正文中的序数相对应, 全书都如此。

带括号的运算法则

+ () 时, () 内的各项原封不动相加。

- () 时, () 内的各项变号后相加。

$$\begin{array}{rcl} \text{另解} & A \cdots & -x^2 + 3x - 4 \\ & -2B \cdots & 6x^2 + 2x - 2 \quad (\text{降幂排列}) \\ & -3C \cdots & -12x^2 + 3x - 9 \\ \hline & A - 2B - 3C \cdots & -7x^2 + 8x - 15 \quad (\text{各项系数相加}) \end{array}$$

〈 2. 整式的乘法 〉

1 指数法则 单项式的乘法, 利用下面的指数法则。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, (ab)^n = a^n b^n$$

2 整式的乘法 整式 A , B 的积 AB 是把 A 的各项与 B 的各项之积相加。(分配法则)

根据乘法的运算法则

$$\begin{aligned} (P+Q+R)(S+T) &= (P+Q+R)S + (P+Q+R)T \\ &= PS + QS + RS + PT + QT + RT \end{aligned}$$

【 2. 说明与运用 】

$$\begin{aligned} \text{【 1 】 例} \quad (3xy^2) \cdot (-2x^2y)^2 \cdot (-y) &= 3xy^2 \cdot 4x^4y^2 \cdot (-y) \\ &= -12x^{1+4}y^{2+2+1} = -12x^5y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【 2 】 例} \quad (2x^2 - 3xy + 4y^2)(3x - 2y) &= (2x^2 - 3xy + 4y^2) \cdot 3x + (2x^2 - 3xy + 4y^2) \cdot (-2y) \\ &= 6x^3 - 9x^2y + 12xy^2 - 4x^2y + 6xy^2 - 8y^3 \\ &= 6x^3 - 13x^2y + 18xy^2 - 8y^3 \end{aligned}$$

3. 乘法公式

1 乘法公式 (I)

- (1) $m(a \pm b) = ma \pm mb$ (符号同序)
- (2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (符号同序)
- (3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- (4) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- (5) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
- (6) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (符号同序)

2 乘法公式 (II)

- (1) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- (2) $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ (符号同序)
- (3) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$
- (4) $(x+a)(x+b)(x+c)$
 $= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
- (5) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

【3. 说明与运用】

【1】 (5) 例 $(4x+3y)(5x-2y)$
 $= 4 \cdot 5x^2 + (-8+15)xy + 3y \cdot (-2y)$
 $= 20x^2 + 7xy - 6y^2$

$$\begin{array}{rcccl}
 & 4x & + 3y & & \\
 \downarrow & \diagdown & \diagup & \downarrow & \\
 & 5x & - 2y & & \\
 \hline
 & 20x^2 & - 6y^2 & + 7xy &
 \end{array}$$

【2】 (1) 例 $(x-2y-1)^2$
 $= [x + (-2y) + (-1)]^2$ (利用 $(a+b+c)^2$ 的公式)
 $= x^2 + (-2y)^2 + (-1)^2 + 2x(-2y) + 2(-2y)(-1)$
 $\quad \quad \quad + 2(-1) \cdot x$
 $= x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y + 1$

【2】 (3) 的证明 $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
 $= [(a^2+b^2)+ab][(a^2+b^2)-ab]$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

【2】(4) 例 $(x-1)(x+2)(x-3)$ ($a = -1, b = 2, c = -3$)

$$= x^3 + (-1+2-3)x^2 + [(-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-3)(-1)]x + (-1) \cdot 2 \cdot (-3)$$

$$= x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

〈由乘法公式导出的重要公式〉

① $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

② $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

③ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

④ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax \pm by)^2 + (bx \mp ay)^2$ (符号同序)

〈4. 因式分解(1)〉

1 因式分解的基本公式

(1) $ma + mb + mc = m(a + b + c)$ (提取公因式)

(2) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ (符号同序)

(3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(4) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

(5) $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

(6) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ (符号同序)

(7) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ (符号同序)

(8) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$

2 因式分解的重要公式

(1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

(2) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$$(3) \quad x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc \\ = (x+a)(x+b)(x+c)$$

(4) 当 n 为正整数时

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

(5) 当 n 为奇数时

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

当 n 为偶数时

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1})$$

3 因式分解方法

(1) 多项式的各项如果有公因式应首先提出。

(2) 选用适当的公式。

(3) 没有直接可用的公式的情况

① 按次数最低的字母进行整理。

② 对每部分进行因式分解，提出它们的公因式。

③ 变更项的顺序，加减适当的式子，再利用公式。

④ 利用因式定理（见9.因式定理）。

【4. 说明与运用】

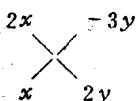
【1】例 (1) $2x^3 - 32x$ (2) $2x^2 + xy - 6y^2$

(3) $8x^3 - y^3$

(4) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 12yz + 6zx$

解 (1) 原式 $= 2x(x^2 - 16) = 2x(x+4)(x-4)$

(2) 原式 $= (2x-3y)(x+2y)$



(3) 原式 $= (2x)^3 - y^3$

$$= (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

(4) 原式 $= x^2 + (-2y)^2 + (3z)^2 + 2 \cdot x \cdot (-2y)$

$$+ 2(-2y) \cdot (3z) + 2(3z)x$$

$$= (x-2y+3z)^2 \quad (\text{利用}(a+b+c)^2\text{的公式})$$

【2】(1) 的证明 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$\begin{aligned} &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \\ &= [(a+b)^3 + c^3] - [3ab(a+b) + 3abc] \\ &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] \\ &\quad - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab] \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

【2】(1) 例 $x^3 + y^3 + 3xy - 1 = x^3 + y^3 + (-1)^3 - 3xy(-1)$
 $= (x+y-1)(x^2 + y^2 + 1 - xy + yx)$

【2】(4)(5) 例 (1) $x^5 - 1$ (2) $x^5 + y^5$ (3) $x^{2^n} - 1$

解 (1) $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
(2) $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
(3) $x^{2^n} - 1 = (x+1)(x^{2^{n-1}} - x^{2^{n-2}} + x^{2^{n-3}} - \dots - 1)$

注 (3) $x^{2^n} - 1 = (x-1)(x^{2^{n-1}} + x^{2^{n-2}} + \dots + 1)$

对于 $a^n - b^n$ 不论 n 是偶数或是奇数都可用公式 (4) 分解因式。

对于 $a^n + b^n$ 仅当 n 是奇数时可用公式 (5) 分解因式。

【3】(3) 例 (1) $ab + 2bc - b^2 - ac - c^2$

(2) $x^3 + x^2 - 8x - 12$

解 (1) 按次数较低的字母 a 整理

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (b-c)a - (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= (b-c)a - (b-c)^2 \\ &= (b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

(2) 设 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$, 则有 $f(3) = 0$, 由因式定理可知 $f(x)$ 有因式 $x-3$ 。

$$f(x) = (x-3)(x^2 + 4x + 4) = (x-3)(x+2)^2$$