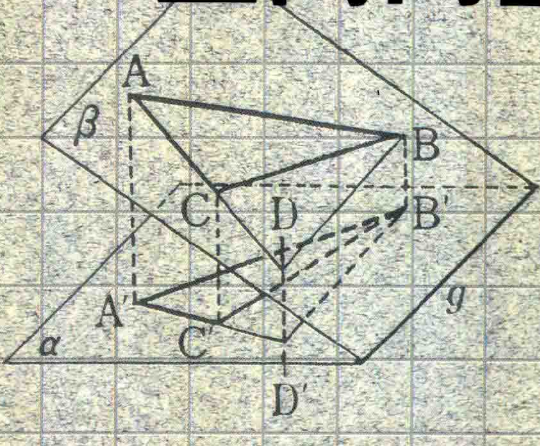
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

高數題庫

3650

空間向量



牛頓出版公司

空　間　向　量

◉ 空間的基本概念(題號1～33)

1. 決定平面的條件

(1)一直線及線外一點　　(2)不共線的三點

(3)二平行線　　(4)恰交於一點的二直線

2. 直線與平面的垂直

直線L垂直平面E於P $\Leftrightarrow$ 在E上過P的任一直線都與L垂直。

3. 兩平面互相垂直

兩平面E_1, E_2互相垂直 $\Leftrightarrow$ E_1, E_2所決定的二面角爲直二面角。

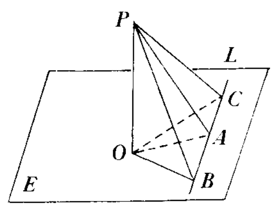
4. 三垂線定理

直線L在平面E上，A在L上，P不在E上，$\overleftrightarrow{PO}$垂直平面E於O

(1)若$\overline{OP}\perp E$，$\overline{OA}\perp L$，則$\overline{PA}\perp L$

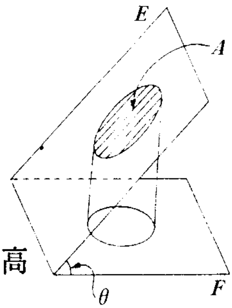
(2)若$\overline{OP}\perp E$，$\overline{PA}\perp L$，則$\overline{PA}\perp L$

(3)若$\overline{OP}\perp\overline{OA}$，$\overline{OA}\perp L$，則$\overline{OP}\perp E$



5. 射影面積

E與F夾角爲θ，平面E上一區域面積A在F上之射影面積爲$A\cos\theta$。



6. 體積

(1)設球半徑爲r，則

①球表面積$=4\pi r^2$

②球體積$=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

(2)錐體體積$=\dfrac{1}{3}\times$（底面積）×高

(3)柱體體積＝底面積×高

(4)設正四面體之稜長爲a ⇒ 體積$=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

◉ 空間坐標(題號34～49)

1. 兩點距離

設$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, x_2, x_2)$，則

$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

2. 分點公式

$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P(x, y, z)$，若P介於P_1, P_2之間，且$\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=m:n$，則

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ y=\frac{ny_1+my_2}{m+n},\ z=\frac{nz_1+mz_2}{m+n}$$

◉ 空間中的向量及內積(題號50～97)

1. 空間向量的基本運算

(1) 設$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$，則

$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

(2) 設$\overrightarrow{OA}=(a, b, c)$，自$x$軸，$y$軸，$z$軸至$\overrightarrow{OA}$的有向角分別以$\alpha$, β, γ表示（規定$0\leq\alpha$, β, $\gamma\leq\pi$)，則稱α, β, γ爲$\overrightarrow{OA}$的方向角，$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$稱爲$\overrightarrow{OA}$的方向餘弦。

(3) 設$\overrightarrow{OA}$ 的方向餘弦爲$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$，則

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

(4) 設$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $r\in R$，則

① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$

③ $r\vec{a}\,(ra_1, ra_2, ra_3)$

(5)空間相異三點P, Q, R共線$\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\,/\!/\,\overrightarrow{PR}\Rightarrow\overrightarrow{PR}=r\overrightarrow{PQ}$

2. 空間向量的內積

(1) 定義

設$\vec{a}$, $\vec{b}$爲空間向量，夾角爲$\theta(0\le\theta\le\pi)$，則

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

(2) 定理

設$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$，則

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

(3) 性質

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

③ $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$，其中$\lambda$爲實數

④ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(4) 柯西不等式

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

$\ge(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$

等號成立 $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$

3. 空間向量的線性組合

(1) 設$\vec{i}=(1, 0, 0)$, $\vec{j}=(0, 1, 0)$, $\vec{k}=(0, 0, 1)$爲空間中一組單位基底向量，$\overrightarrow{OP}=(x, y, z)$爲任一向量，則

$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

(2) 設 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 爲空間中一組線性獨立向量，亦即 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量不共平面。若 $\vec{P}$ 爲任一向量，則 $\vec{P}$ 可以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 之線性組合表示之，亦即 $\vec{P}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，其中 α,β,γ 爲待定係數

◉ 空間中的平面（題號98～130）

1. 平面方程式的類型

(1)點向式：過點 (x_0, y_0, z_0) 且其法向量爲 (a, b, c)，則平面方程式爲 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

(2)一般式：法向量爲 (a, b, c)，則平面方程式爲

$ax+by+cz+d=0$

(3)截距式：x 截距爲 a，y 截距爲 b，z 截距爲 c，且 $abc\neq 0$，

則平面方程式爲 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

2. 平面方程式的求法

(1)點向式：平面 E 通過定點 $P(x_0, y_0, z_0)$，且有一法向量

$\vec{N}=(a, b, c)$

$\Rightarrow E: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

※ 已知 E 平面的法向量爲 (a, b, c) 時

$\Rightarrow$ 設平面 $E: ax+by+cz+k=0$

(2)截距式：平面 E 之 x, y, z 軸之截距分別爲 a, b, c

$\Rightarrow E: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

(3)找三個向量共平面，利用三向量的行列式值爲零。

分類：①不共線之相異三點。

②一線及直線外之一點。

③相交二直線。

④平行二直線。

3. 設兩平面E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$與E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，則E_1與E_2之角平分面方程式為

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1z+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2z+d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

4. **平面族方程式**

設E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 及 E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，則經過E_1與E_2交線的平面方程式可表為

$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$

◉ 空間中的直線(題號131～145)

1. **直線方程式的類型**

(1)對稱比例式

已知一線過$P_1(x_1, y_1, z_1)$，方向向量為(l, m, n)，

則方程式為 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$

(2)參數式

①線L通過$P(x_0, y_0, z_0)$，且有一方向向量(a, b, c)

$$\Rightarrow\quad L:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}，t\in R$$

②設$P(a_1, b_1, c_1)$，$Q(a_2, b_2, c_2)$，則直線PQ的參數方程式為

$$\begin{cases}x=a_1+t(a_2-a_1)\\ y=b_1+t(b_2-b_1)\\ z=c_1+t(c_2-c_1)\end{cases}，t\text{ 為任意實數}$$

(3)交面式

E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$與

E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$之交線L

$$\Rightarrow\quad L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$$

2. 空間直線方程式的求法

(1)點向式

設直線L過定點$P(x_0, y_0, z_0)$，且方向向量

$\overrightarrow{D}=(l, m, n)$，則$L$之方程式爲

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt, \quad t\in R \\ z=z_0+nt \end{cases} \text{或} \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

(2)利用交面式

$$\text{由}\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 令$z=t$，得x, y可表爲t之參數式

◉ 空間距離(題號146～150)

1. 點到平面的距離

(1)點$P(x_0, y_0, z_0)$到平面$ax+by+cz+d=0$之距離爲

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(2)兩平行平面$ax+by+cz+d_1=0$與$ax+by+cz+d_2=0$

之距離爲 $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

2. 直線距離問題求法

(1)點至直線的距離

設$P(x_0, y_0, z_0)$, L：$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$

法①：令$Q(x_1+at, y_1+bt, z_1+ct)$

$\Rightarrow$ 求$\overline{PQ}$之最小值。

法②：求過P垂直L之平面

E：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Rightarrow$ 求E與L之交點Q $\Rightarrow$ 求$\overline{PQ}$距離

(2)二平行線之距離：$L_1: \dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$

$L_2: \dfrac{x-x_2}{a}=\dfrac{y-y_2}{b}=\dfrac{z-z_2}{c}$

法①：令$P(x_1+at, y_1+bt, z_1+ct)\in L_1$,

$Q(x_2+ak, y_2+bk, z_2+ck)\in L_2$

$\Rightarrow$ 求$\overline{PQ}$最小值。

法②：作垂直L_1之平面

$E: a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

$\Rightarrow$ 求E與L_1及L_2之交點P, Q $\Rightarrow$ 求$\overline{PQ}$距離

(3)二歪斜線之距離：$L_1: \dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$

$L_2: \dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$

法①：同(2)之法①

法②：令$\overrightarrow{L_1}=(a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{L_2}=(a_2, b_2, c_2)$,

$\overrightarrow{P}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

$\Rightarrow$ 求$\overrightarrow{L_1}$, $\overrightarrow{L_2}$, $\overrightarrow{P}$爲邊之平行六面體之體積。

$$V=\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\|$$

$\Rightarrow$ 次求$\overrightarrow{L_1}$, $\overrightarrow{L_2}$爲邊之平行四邊形面積

$$M=\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{V}{M}$爲所求。

1 Ⅲ 一 ★

試述：決定一平面、一直線及一點的條件。

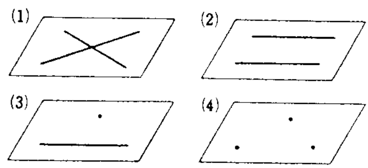
【詳解】 (1)決定平面的條件（圖一）：

①相交的兩直線。

②平行的兩直線。

③一直線及線外一點。

④不在一線上的三點。

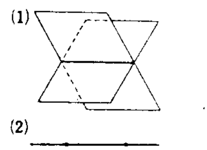


圖一

(2)決定直線的條件（圖二）：

①相交的兩平面。

②相異的兩點。



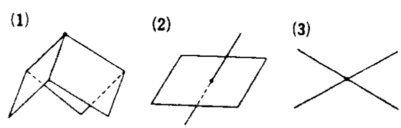
圖二

(3)決定點的條件（圖三）：

①交線不平行的三個兩兩相交的平面。

②相交的平面和直線。

③兩相交直線。



圖三

2 Ⅲ 一 ★

列舉平面與平面、平面與直線及直線與直線的位置關係。

【詳解】(1)平面與平面

①相交

②平行（即不相交）

(2)平面與直線

①直線包含於平面

②相交

③不相交（平行）

(3)直線與直線

①相交

②同在一平面而不相交（平行）

③不在同一平面上（歪斜）

3 Ⅲ 一 ★★

不在同一平面上的兩個三角形ABC及$A'B'C'$，三條對應頂點的連線AA'、BB'、CC'交於一點O，對應邊$\overline{AB}$與$\overline{A'B'}$,$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$及$\overline{AC}$與$\overline{A'C'}$分別交於X、Y及Z。

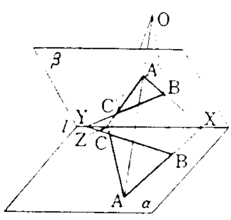
證明 X、Y、Z三點共線。

【證明】如圖，設$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$所在的平面分別爲α及β。

$\because$ X爲$\overline{AB}$和$\overline{A'B'}$的交點

$\therefore$ X同時在平面α和β上

$\therefore$ X在α和β的交線上



同理，Y、Z也在此交線上

$\therefore$ X、Y、Z三點共線。

4 Ⅲ 一 ★★

設空間中四點A, B, C, D，若$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$的中點分別爲K、L、M、N。

證明 四邊形$KLMN$爲平行四邊形。

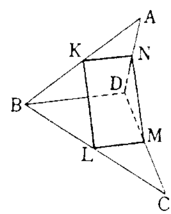
【證明】 如圖，

$\because$ $\overline{KN} \parallel \overline{BD}, \overline{KN}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$

$\because$ $\overline{LM} \parallel \overline{BD}, \overline{LM}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$

$\therefore$ $\overline{KN}=\overline{LM}, \overline{KN} \parallel \overline{LM}$

$\therefore$ 四邊形$KLMN$爲平行四邊形。



5 Ⅲ 一 ★

若直線a與平面α平行，包含a的平面β與α的交線爲b。

證明 a和b平行。

【證明】 $\because$ $a \parallel \alpha$

$\therefore$ a和α不相交

$\therefore$ a和α上的直線b不相交

$\because$ a和b又同在平面β上。

$\therefore$ $a \parallel b$

6 Ⅲ 一 ★

設兩直線a, b平行，若平面α包含a，不包含b。

證明 b和α平行。

【**證明**】 設b和α不平行

$\Rightarrow$ b和α交於一點P

$\therefore$ P在α上

同時，P在a與b所決定的平面β上

$\therefore$ P是α與β的交線a上的點

$\therefore$ a, b交於一點P

與假設矛盾(已知$a \parallel b$)

$\therefore$ $b \parallel \alpha$

7 Ⅲ 一 ★

設兩直線a與b平行，若包含a的平面α和包含b的平面β交於直線c。

證明 c和 a, b 均平行。

【**證明**】 $\because$ $a \parallel b$

$\therefore$ $a \parallel \beta$

$\therefore$ $a \parallel c$ ($\because$ a, c在同一平面上)

同理：$b \parallel c$

8 Ⅲ 一 ★

三直線a, b, c，若c和a, c和b均平行。

證明 $a \parallel b$。

【證明】 (1)若a, b, c在同一平面上，$a \parallel b$是很明顯的。

(2)若a, b, c不在同一平面上

$\because \quad c \parallel a$

$\therefore \quad c$和a決定一平面α

設a上一點A和b決定一平面β，且設α和β的交線爲a'

$\because \quad c \parallel b$且$c \parallel a$($A$不在$c$上)

$\therefore \quad c \parallel \beta$

$\because \quad c$和a'同在α上

$\therefore \quad c \parallel a'$

但在平面α上，過A而與c平行的直線只有一條

$\therefore \quad a = a'$ ……………………………… ①

$\because \quad b \parallel c$且$b$不在$\alpha$上

$\therefore \quad b \parallel \alpha$

$\therefore \quad b \parallel a'$ (b和a'同在β上) ………… ②

由①, ②得

$a \parallel b$

9 Ⅲ 一 ★★

已知交於點O的兩直線a及b；交於O'的兩直線a'及b'。若a與a'，b與b'均互相平行。

證明 a與b的夾角和a'與b'的夾角相等。

【**證明**】 只須考慮a、b、a'、b'不在同一平面上的情形(否則，結果是很明顯的)。

$\because \quad a \,/\!/\, a'$

$\therefore \quad a, a'$ 可決定一平面

過a上一點A作與$\overline{OO'}$平行的直線$\overline{AA'}$(A'在a'上)

同理，作$\overline{BB'} \,/\!/\, \overline{OO'}$(如圖)

則四邊形$AOOA'$, $BOOB'$爲平行四邊形

$\therefore \quad \overline{AA'}=\overline{OO'}=\overline{BB'}, \overline{AA'} \,/\!/\, \overline{OO'} \,/\!/\, \overline{BB'}$

$\Rightarrow \quad \overline{AA'}=\overline{BB'}, \overline{AA'} \,/\!/\, \overline{BB'}$

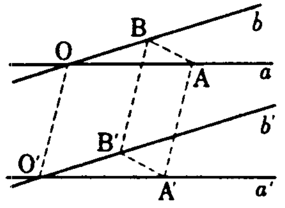
$\therefore$ 四邊形$ABB'A'$爲平行四邊形

$\therefore \quad \overline{AB}=\overline{A'B'}$

$\because \quad \overline{AO}=\overline{A'O'}, \overline{BO}=\overline{B'O'}$

$\therefore \quad \triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$

$\therefore \quad \angle AOB = \angle A'O'B'$



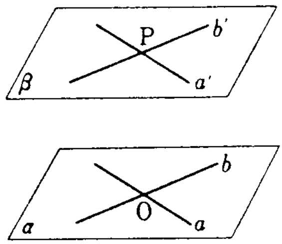
10 Ⅲ 一 ★★

不在平面α上的一點P。

證明 恰可作一平面通過P且與α平行。

【證明】 (1)存在性

如圖一，設α上交於點O的兩直線a與b，通過P，作與a, b平行的兩直線a'，b'，則a'與b'所決定的平面即爲所求。



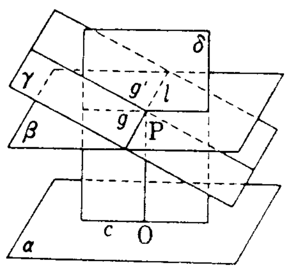
(2)唯一性

設平面β和γ均合於所求(如圖二)。

∵ β和γ有交點P

∴ β和γ有通過P的交線l。

設β上通過P而且異於l的一直線g, g與$\overline{PO}$所決定的平面設爲δ。



∵ γ與δ交於一點P

∴ γ與δ交於過P的一直線g'，

設α與δ交於過O的一直線c

∵ $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$, $\alpha \mathbin{/\!/} \gamma$

∴ $c \mathbin{/\!/} g$, $c \mathbin{/\!/} g'$ ⇒ 矛盾

∴ 過P且與α平行的平面是唯一的。

11 Ⅲ 一 ★★

三平面α, β, γ, γ與α及β均平行。

證明 $\alpha \,/\!/\, \beta$。

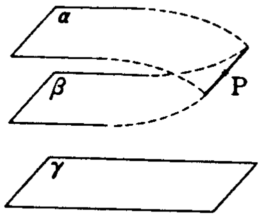
【證明】 設α與β不平行

則α與β有一交點P，

$\because$ 過P且與γ平行的平面是唯一的

$\therefore$ $\alpha=\beta \Rightarrow$ 矛盾

$\therefore$ $\alpha \,/\!/\, \beta$



12 Ⅲ 一 ★

兩直線a, b平行。

證明 與a相交的平面α必與b相交。

【證明】 如圖，

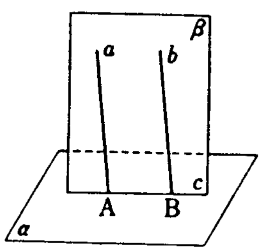
設a, b所決定的平面β與α的交線爲c

$\Rightarrow$ a, b, c同在平面β上

$\because$ $a \,/\!/\, b$，且c與a交於一點A

$\therefore$ c與b交於一點B

$\therefore$ b與α相交



13 Ⅲ 一 ★

設三平面α, β, γ均平行，若直線a與三平面交於A, B, C，直線a'與三平面交於A'、B'、C'。

證明 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{A'B'}:\overline{B'C'}$。

【證明】 設直線$\overline{A'C}$與β的交點爲P

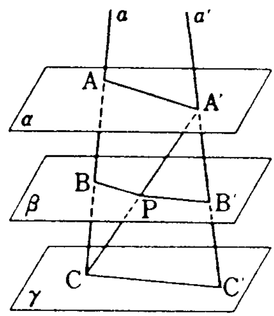
$\Rightarrow$ 兩直線$\overline{AA'}$和$\overline{BP}$在同一平面上

$\Rightarrow$ $\overline{AA'}\,/\!/\,\overline{BP}$

$\therefore$ $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{A'P}:\overline{PC}$

同理：$\overline{A'B'}:\overline{B'C'}=\overline{A'P}:\overline{P'C}$

$\therefore$ $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{A'B'}:\overline{B'C'}$



14 Ⅲ 一 ★

試述兩直線的交角的定義。

【詳解】 通過點P，而與a及b分別平行的兩直線a'及b'

則a'和b'的夾角等於a和b的夾角，而與P點的位置無關。

15 Ⅲ 一 ★

敍述下列的定義：

(1)與平面垂直的直線　　(2)與平面垂直的平面

【詳解】 (1)若直線a與平面α的交點爲P，平面α上通過P的任意直線b，b均與a垂直，則a即爲α的垂線。