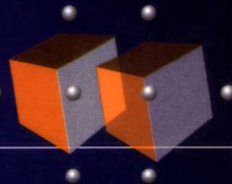


高等学校电子信息科学与工程类专业教材



电磁场与微波工程基础

毛钧杰 刘 荧 朱建清 编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

高等学校电子信息科学与工程类专业教材

电磁场与微波工程基础

毛钧杰 刘 荧 朱建清 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书以电磁场和微波技术的基础理论和基本分析方法为重点。其内容包括：场论、宏观电磁现象的基本实验定律、静态场、时变电磁场、无界均匀媒质中平面电磁波的传播、电磁波在分区均匀媒质中的传播、导行电磁波、传输线理论、微波网络基础、微波元件以及电磁场的数值解法——有限差分法。

本书是为高等学校信息与通信工程、电子科学与技术这两个一级学科中各专业本科教学编写的教材，也可供从事这些专业的工程技术人员参考。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与微波工程基础/毛钧杰等编著. —北京: 电子工业出版社, 2004.5

高等学校电子信息科学与工程类专业教材

ISBN 7-5053-9791-5

I. 电... II. 毛... III. ①电磁场—高等学校—教材②微波技术—高等学校—教材

IV. ①O441.4②TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 025639 号

责任编辑: 韩同平

特约编辑: 王昌铭

印 刷: 北京牛山世兴印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

经 销: 各地新华书店

开 本: 787×980 1/16 印张: 22 字数: 535 千字

印 次: 2004 年 5 月第 1 次印刷

印 数: 5000 册 定价: 28.00 元

凡购买电子工业出版社的图书, 如有缺损问题, 请向购买书店调换; 若书店售缺, 请与本社发行部联系。联系电话: (010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前 言

根据教育部新编制的本科专业目录,许多高等学校都将原有的本科专业进行了调整与合并,并相应调整了培养方案和课程设置,使专业口径面更加宽广。据此,我们在多年本科教学实践的基础上,深入研究了信息与通信工程、电子科学与技术这两个一级学科中本科各专业的内涵,将原有电磁场理论和微波技术基础两门课合并成一门课,编写了《电磁场与微波工程基础》一书,作为信息与通信工程(包括通信与信息系统、信号与信息处理两个二级学科)、电子科学与技术这两个一级学科中各专业的本科生教材。各专业可根据自身的特点对教材中的内容做适当取舍,教学时数以60~80学时为宜。

在编写本教材的过程中,作者力求做到:(1)将电磁场理论和微波技术基础两方面的内容有机地连成一个整体,抹去两门课程拼凑在一起的痕迹;(2)不仅要使电磁场理论体系结构完善,而且要处理好场与路之间的关系,使场、路联系更紧密,使读者更清楚地认识到电磁场的方法和等效电路法是研究电磁场问题的两种既有联系又有区别的重要方法;(3)不追求对基本规律、基本定律的详细推导和严格证明,但应使读者明了提出问题的方法和解决问题的思路;(4)在叙述概念、阐明定理和分析结论时,力求准确、严谨、理论联系实际。

全书共分11章。第1章场论,论述研究场的数学方法;在介绍场的基本概念之后,以矢量代数和矢量分析为基础,重点研究了梯度、散度和旋度,并简要介绍亥姆霍兹定理、格林定理和常用正交曲线坐标系。第2章宏观电磁现象的基本实验定律,研究了库仑定律、安培定律和法拉第电磁感应定律,以及由它们引出的几个推论。第3章静态场,重点研究了静电场、恒定电流的磁场和恒定电流场的场方程和边界条件,也讨论了静态场中的位函数,静态场中的导体系统和静态场的能量等问题。第4章时变电磁场,对静态场场方程和法拉第电磁感应定律进行归纳、总结,并将其推广到时变场,得到描述一切宏观电磁现象的麦克斯韦方程组,以此为基础研究了电磁场的基本属性、运动规律和计算方法,并简单讨论了电磁波的辐射。第5章无界均匀媒质中平面电磁波的传播,重点研究了电磁波在无界均匀理想媒质和导电媒质中的传播特性与传播参数,研究了电子工程中有重要实际应用的电磁波极化特性。第6章电磁波在分区均匀媒质中的传播,以反射、折射定律为基础,研究了电磁波向两种不同媒质交界面入射时所出现的各种物理现象及两媒质中波的传播特性。第7章导行电磁波,以纵向场法为基础,重点研究了矩形波导、圆波导和同轴线中导行电磁波的传播特性和传播参数,同时还简要介绍了微带线、介质波导等微波工程中用得较多的导波系统。第8章传输线理论,引入电压和电流的概念,把研究导行电磁波传播特性这样一个本质上是电磁场的问题,转化为研究电压、电流波传播特性的电路问题,然后研究了传输线的工作特性、圆图和阻抗匹配等问题。第9章微波网络基础,将研究非均匀区外特性这样一个本质上是电磁场的问题,转化为微波网络的电路问题,研究了描述非均匀区外特性的各种网络参数。第10章微波元件,介绍了各种常用微波元件的结构,并应用传输线理论、导行波理论和网络理论分析

了这些微波元件的工作原理和基本特性。第 11 章电磁场的数值解法——有限差分法，介绍了电磁场数值解法的基本概念、数学原理以及实际操作都比较简单的有限差分法和时域有限差分法。

本书第 1、2、3、4、5、6、11 章由刘荧执笔，第 7、8、10 章由朱建清执笔，第 9 章由毛钧杰执笔，毛钧杰统编全稿。在编写过程中，国防科技大学电子科学与工程学院唐朝京副院长和该院微波工程教研室的各位老师对本书的编写都给予了大力的支持和帮助，在此对他们的支持、帮助及卓有成效的工作表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编著者
于国防科技大学

目 录

第 1 章 场论	(1)
1.1 矢量的基本运算公式	(1)
1.1.1 矢量的概念	(1)
1.1.2 矢量的基本运算公式	(2)
1.1.3 几个常用矢量	(6)
1.2 场的基本概念	(7)
1.2.1 场的定义	(7)
1.2.2 场的分类	(7)
1.2.3 场的数学表示式	(7)
1.2.4 场的直观表示方法	(8)
1.3 标量场的梯度	(10)
1.3.1 方向导数	(10)
1.3.2 梯度	(11)
1.4 矢量场的散度和旋度	(13)
1.4.1 通量与散度	(13)
1.4.2 环量与旋度	(16)
1.5 格林(Green)定理和亥姆霍兹(Helmholtz)定理	(19)
1.6 常用正交曲线坐标系	(19)
习题	(21)
第 2 章 宏观电磁现象的基本实验定律	(23)
2.1 电荷与电流	(23)
2.1.1 电荷与电荷密度	(23)
2.1.2 电流、电流强度与电流密度	(25)
2.2 库仑定律及电场的基本规律	(27)
2.2.1 库仑定律	(27)
2.2.2 电场和电场强度	(28)
2.2.3 高斯(Gauss)定律与电场强度的散度	(29)
2.2.4 环路定律与电场强度的旋度	(31)
2.3 安培定律及磁场的基本规律	(32)
2.3.1 安培定律	(32)
2.3.2 磁场、磁感应强度和毕奥-萨伐尔(Biot-Savart)定律	(33)
2.3.3 磁通连续性原理与磁感应强度的散度	(33)

2.3.4 安培环路定律与磁感应强度的旋度	(34)
2.4 法拉第电磁感应定律	(37)
习题	(38)
第3章 静态场	(41)
3.1 静电场	(41)
3.1.1 静电场的电位	(41)
3.1.2 静电场中的导体	(45)
3.1.3 静电场中的介质	(45)
3.1.4 静电场的场方程和静电场的性质	(50)
3.2 静磁场	(51)
3.2.1 静磁场的磁矢位	(51)
3.2.2 磁标位	(54)
3.2.3 静磁场中的媒质	(55)
3.2.4 静磁场的场方程和性质	(59)
3.3 恒定电流场和恒定电场	(60)
3.3.1 恒定电流场及其电流连续性方程	(60)
3.3.2 欧姆(Ohm)定律	(61)
3.3.3 焦耳(Joule)定律	(62)
3.3.4 电源及其电动势	(63)
3.3.5 恒定电场的概念	(63)
3.3.6 恒定电流场与恒定电场的场方程	(63)
3.4 静态场的边界条件	(64)
3.4.1 静电场的边界条件	(64)
3.4.2 静磁场的边界条件	(67)
3.4.3 恒定电流场与恒定电场的边界条件	(69)
3.5 静态场中的双导体系统	(70)
3.5.1 双导体系统的电容	(70)
3.5.2 导体回路的自感和双导体回路的互感	(72)
3.6 静态场的能量	(75)
3.6.1 静电场的能量	(75)
3.6.2 静磁场的能量	(76)
3.7 静态场的比拟	(77)
3.7.1 静电场与恒定电场的比拟	(77)
3.7.2 静电场与静磁场的比拟	(77)
3.8 静态场的边值问题及镜像法	(78)
3.8.1 静态场的边值问题	(78)

3.8.2	惟一性定理	(79)
3.8.3	镜像法	(80)
3.8.4	分离变量法	(83)
	习题	(86)
第 4 章	时变电磁场	(90)
4.1	位移电流与全电流定律	(90)
4.2	涡旋电场与法拉第定律	(93)
4.3	电磁场的基本方程——麦克斯韦方程组	(95)
4.3.1	麦克斯韦方程组	(95)
4.3.2	麦克斯韦方程组的物理意义	(95)
4.3.3	辅助方程——结构方程	(96)
4.3.4	边界条件	(97)
4.3.5	时变电磁场的惟一性定理	(99)
4.3.6	麦克斯韦方程组的历史意义	(100)
4.3.7	洛伦兹(Lorentz)力	(100)
4.4	时谐电磁场	(100)
4.4.1	时谐电磁场的定义	(100)
4.4.2	时谐电磁场的复数表示式	(101)
4.4.3	时谐电磁场的频域麦克斯韦方程组及边界条件、结构方程	(103)
4.5	时变电磁场的能量与能流	(104)
4.5.1	时变电磁场的能量密度	(104)
4.5.2	坡印廷矢量和坡印廷定理	(105)
4.5.3	复坡印廷矢量和复坡印廷定理	(107)
4.6	时变电磁场的波动性	(109)
4.6.1	波动方程	(109)
4.6.2	波动性	(110)
4.7	时变电磁场的位函数	(112)
4.7.1	标量位 ϕ 与矢量位 A 的引入	(112)
4.7.2	位函数满足的方程	(113)
4.7.3	位函数的解	(114)
4.8	电磁波的辐射	(116)
	习题	(120)
第 5 章	无界均匀媒质中平面电磁波的传播	(123)
5.1	无界理想介质中的平面电磁波	(123)
5.1.1	波动方程的解	(123)
5.1.2	均匀平面电磁波的传播参数和传播特性	(124)

5.2	电磁波的极化	(128)
5.2.1	极化的定义	(128)
5.2.2	线极化	(129)
5.2.3	圆极化	(130)
5.2.4	椭圆极化	(131)
5.2.5	三种极化类型的相互关系	(132)
5.2.6	电磁波极化的工程应用	(133)
5.3	向任意方向传播的均匀平面电磁波	(134)
5.4	无界均匀有损耗媒质中的平面电磁波	(136)
5.4.1	无界均匀导电媒质中的平面电磁波	(136)
5.4.2	无界均匀有损耗介质中的平面电磁波	(138)
	习题	(139)
第 6 章	电磁波在分区均匀媒质中的传播	(141)
6.1	电磁波反射与折射的基本定律	(141)
6.1.1	研究所用坐标系及入射波的极化分类	(141)
6.1.2	反射、折射定律	(142)
6.1.3	反射、折射系数	(143)
6.1.4	垂直入射时的反射系数和折射系数	(144)
6.2	电磁波在理想介质与理想导体的交界平面的反射与折射	(144)
6.2.1	垂直入射情况	(144)
6.2.2	斜入射情况	(147)
6.3	电磁波在两种理想介质交界平面的反射与折射	(150)
6.3.1	垂直入射情况	(150)
6.3.2	斜入射情况	(153)
6.3.3	全透射与全反射	(155)
6.4	电磁波在理想介质与有损耗媒质交界平面的反射与折射	(158)
6.4.1	垂直入射情况	(158)
6.4.2	斜入射情况	(162)
	习题	(164)
第 7 章	导行电磁波	(167)
7.1	传输线中导行波的分析方法	(167)
7.1.1	传输线中电磁场的基本形式	(167)
7.1.2	纵向场法	(169)
7.2	传输线中导行波的一般传播特性	(171)
7.2.1	波导中的模式	(171)
7.2.2	TEM 模的一般传播特性	(172)

7.2.3	TE、TM 模的一般传输特性	(173)
7.3	矩形波导中的导行波	(179)
7.3.1	矩形波导中 TE 模和 TM 模场的表示式	(179)
7.3.2	矩形波导中 TE 模、TM 模的特点	(182)
7.3.3	矩形波导中 TE_{10} 模的场结构与壁电流	(184)
7.3.4	TE_{10} 模的传输功率	(188)
7.3.5	矩形波导截面尺寸的选择	(189)
7.4	圆柱形波导中的导行波	(189)
7.4.1	圆波导中的 TE 模	(190)
7.4.2	圆波导中的 TM 模	(193)
7.4.3	圆波导中导行波的一般特性	(194)
7.4.4	圆波导中常用的三种模式	(195)
7.4.5	圆波导尺寸的选择	(197)
7.5	同轴传输线	(197)
7.5.1	同轴线中的主模(TEM 模)	(198)
7.5.2	同轴线中的高次模及其尺寸选择	(199)
7.6	带状线、微带线、槽线及共面波导简介	(201)
7.6.1	带状线	(201)
7.6.2	微带线	(202)
7.6.3	槽线	(205)
7.6.4	共面波导	(206)
7.7	介质波导与光波导	(207)
7.7.1	介质波导	(207)
7.7.2	光波导	(208)
	习题	(212)
第 8 章	传输线理论	(214)
8.1	传输线方程及其时谐稳态解	(215)
8.1.1	电压、电流的引入及传输线上的分布参数	(215)
8.1.2	传输线方程及其时谐稳态解	(217)
8.1.3	传输线的工作特性参数和工作状态参数	(220)
8.2	无损耗传输线的工作状态	(224)
8.2.1	无反射工作状态	(224)
8.2.2	全反射工作状态	(224)
8.2.3	部分反射工作状态	(229)
8.2.4	传输功率	(232)
8.3	阻抗圆图和导纳圆图	(233)

8.3.1	阻抗圆图	(233)
8.3.2	等电阻圆和等电抗圆	(235)
8.3.3	导纳圆图	(238)
8.3.4	圆图应用举例	(240)
8.4	阻抗匹配	(241)
8.4.1	微波源的阻抗匹配	(241)
8.4.2	负载阻抗匹配	(243)
8.5	广义传输线理论	(248)
8.5.1	推广的可行性分析	(249)
8.5.2	等效电压和等效电流、特性阻抗	(249)
8.5.3	归一化参量	(252)
8.5.4	矩形波导 TE_{10} 模式的等效阻抗	(253)
	习题	(255)
第 9 章	微波网络基础	(258)
9.1	微波元件等效成网络的原理	(258)
9.2	微波网络的阻抗参数和导纳参数	(261)
9.2.1	阻抗参数	(261)
9.2.2	导纳参数	(263)
9.2.3	阻抗参数和导纳参数的性质	(264)
9.2.4	归一化阻抗参数与归一化导纳参数	(265)
9.3	微波网络的散射参数	(266)
9.3.1	散射参数	(266)
9.3.2	散射参数与阻抗参数和导纳参数间的关系	(269)
9.3.3	散射参数的基本性质	(269)
9.4	转移参数与二端口网络	(271)
9.4.1	转移参数	(271)
9.4.2	二端口网络的级联	(273)
9.4.3	几个基本二端口网络的转移参数	(274)
	习题	(277)
第 10 章	微波元件	(278)
10.1	基本电抗元件	(278)
10.1.1	矩形波导中的简单不均匀结构	(278)
10.1.2	同轴线中的简单不连续性	(283)
10.1.3	微带线中的简单不连续性	(285)
10.2	终端元件	(287)
10.2.1	匹配负载	(287)

10.2.2	短路活塞	(289)
10.3	连接元件	(289)
10.3.1	同轴接头	(289)
10.3.2	波导法兰	(290)
10.4	衰减器与移相器	(291)
10.4.1	衰减器	(291)
10.4.2	移相器	(293)
10.5	分支元件	(293)
10.5.1	矩形波导分支接头	(293)
10.5.2	微带线三端口功率分配器	(298)
10.6	定向耦合器	(300)
10.6.1	定向耦合器的技术指标	(301)
10.6.2	双孔定向耦合器的工作原理	(302)
10.6.3	矩形波导裂缝电桥	(303)
10.6.4	分支定向耦合器	(306)
10.7	微波谐振器	(306)
10.7.1	微波谐振器的基本电参数	(307)
10.7.2	圆柱谐振腔	(310)
10.7.3	同轴谐振腔	(314)
10.7.4	谐振器的激励与耦合	(316)
10.8	传输线的激励与耦合装置	(317)
10.8.1	传输线激励的基本原则和基本形式	(318)
10.8.2	传输线的激励装置	(319)
10.9	隔离器与环行器	(321)
10.9.1	磁化铁氧体特性简介	(321)
10.9.2	隔离器	(323)
10.9.3	环行器	(325)
习题		(326)
第 11 章	电磁场的数值解法——有限差分法	(328)
11.1	数值解法简介	(328)
11.2	有限差分法	(329)
11.2.1	求解静态场的有限差分法	(329)
11.2.2	求解时变场的时域有限差分法	(332)
参考文献		(337)

第 1 章 场 论

在许多科学和技术问题中，常常要研究某种物理量的空间分布状况、时间变化规律，以及该物理量与产生它的源的相互关系。人们将某种物理量的时空分布定义为“场”，并总结了一套研究场与源的数学语言和方法，称为“场论”。应用场论工具，可导出描述物理本质的数学公式，便于研究物理量的特性和规律。

在分析电磁现象时，会遇到许多矢量，如电场矢量、磁场矢量。这些矢量具有一定的时空分布，构成了电磁矢量场。因此，矢量的运算、分析知识和场论知识都是电磁理论的数学基础。

本章先介绍矢量运算公式，再介绍场论的基本概念，重点研究直角坐标系下标量场的梯度、矢量场的散度和旋度，最后给出其他常用正交曲线坐标系下的梯度、散度、旋度公式。

1.1 矢量的基本运算公式

1.1.1 矢量的概念

只有大小的量称为**标量(scalar)**，如温度、密度、电位等；既有大小又有方向的量称为**矢量(vector)**，如力、速度、动量等。

用有一定长度、带箭头的有向线段来表示矢量最为直观，箭头方向就是矢量的方向，线段的长短表示矢量的大小(或称矢量的**模(mode)**)，图 1-1(a)中三个带箭头的有向线段分别表示三个矢量，我们用黑体字母来表示矢量，如 \mathbf{A} ，其模记为 $|\mathbf{A}|$ 或 A 。模为 1 的矢量称为**单位矢量(unit vector)**，用带上标“ \wedge ”的黑体字母表示，如 $\hat{\mathbf{a}}$ 、 $\hat{\mathbf{b}}$ 。

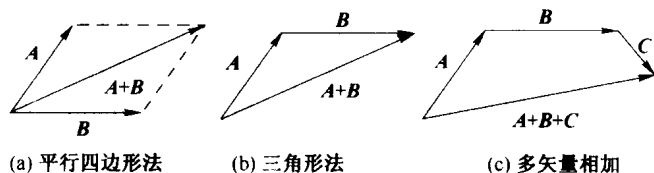


图 1-1 矢量的加法

若 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的模相等、方向相同，我们就说 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 。根据这个定义可知，将矢量在空间平移不会改变该矢量。若将 \mathbf{A} 的起点与终点位置对调，就得到与 \mathbf{A} 方向相反、模相等的**逆矢量**($-\mathbf{A}$)。如图 1-2 中将 \mathbf{B} 的首尾对调再平移，就得到 $-\mathbf{B}$ 。

在某种空间坐标系下，与坐标轴正向同方向的单位矢量称为**坐标单位矢量**(简称坐标矢

量), 该坐标系中的其他矢量可以表示为坐标矢量的线性组合。例如, 某坐标系的坐标轴为 a 轴、 b 轴、 c 轴, 坐标矢量为 \hat{a} 、 \hat{b} 、 \hat{c} , 该坐标系下任意矢量 A 可表示为

$$A = A_a \hat{a} + A_b \hat{b} + A_c \hat{c} \quad (1-1)$$

式中, 系数 A_a 、 A_b 、 A_c 分别是 A 在 a 、 b 、 c 三个坐标轴上的投影, 分别称为 A 的 a 分量、 b 分量和 c 分量。

直角坐标系是最简单、最常用的坐标系, 其坐标矢量为 \hat{x} 、 \hat{y} 、 \hat{z} 。直角坐标系下, 任意矢量 A 表示为

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (1-2)$$

A_x 、 A_y 、 A_z 分别称为 A 的 x 分量、 y 分量和 z 分量。 A 的模的计算公式为

$$|A| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-3)$$

下文中若无特别声明, 采用的都是直角坐标系。

1.1.2 矢量的基本运算公式

1. 加法和减法

$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ 、 $B = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$ 、 $C = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z}$ 为任意矢量, 加法、减法运算法则如下

$$A \pm B = (A_x \pm B_x) \hat{x} + (A_y \pm B_y) \hat{y} + (A_z \pm B_z) \hat{z} \quad (1-4a)$$

$$A+B=B+A \quad (1-4b)$$

$$A-B=A+(-B) \quad (1-4c)$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad (1-4d)$$

还可以用图解法来做矢量加法运算。以 A 、 B 为邻边作平行四边形, 与 A 、 B 起点相同的对角线矢量就是 $A+B$, 如图 1-1(a)所示。若 A 、 B 的起点不重合, 则可将其中任意一个平移到与另一个起点重合。如图 1-1(b)中所示的三角形法更常用, 将 A 、 B 首尾相连, 从 A 的起点指向 B 的终点的有向线段就是 $A+B$ 。此法特别适于多矢量相加, 如图 1-1(c)所示, 将相加的多个矢量依次首尾相连, 形成矢量链条, 从链条起点指向终点的有向线段就是这些矢量之和。

求 $A-B$ 时, 先求出 B 的逆矢量 $-B$, 再将 $-B$ 与 A 相加, 即得如图 1-2 所示的 $A-B$ 。

2. 数乘

以实数 ξ 乘以矢量 A 称为矢量的数乘。当 $\xi > 0$ 时, A 的模伸缩 ξ 倍; 当 $\xi < 0$ 时, A 的模伸缩 $|\xi|$ 倍, 而方向反向, 如图 1-3 所示。

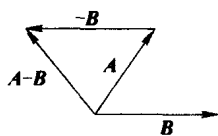


图 1-2 矢量的减法

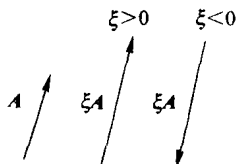


图 1-3 矢量的数乘

设 ξ 、 η 为两个实数, A 、 B 为两个任意矢量, 则数乘运算满足以下规则

$$\xi A = \xi A_x \hat{x} + \xi A_y \hat{y} + \xi A_z \hat{z} \quad (1-5a)$$

$$\xi(\eta A) = (\xi\eta)A \quad (1-5b)$$

$$(\xi + \eta)A = \xi A + \eta A \quad (1-5c)$$

$$\xi(A + B) = \xi A + \xi B \quad (1-5d)$$

3. 分解

设 A 、 B 、 C 三者共面, 且 B 、 C 不共线, 若将它们的起始点都移到公共始点 O , 过 C 的终点作分别平行于 A 、 B 的两条直线, 各交 A 、 B (或其延长线) 于 M 、 N 点, 则

$$C = \overline{OM} + \overline{ON} = \xi A + \eta B \quad (1-6)$$

称为 C 对 A 、 B 的分解, 分解系数分别是 ξ 和 η , 如图 1-4(a) 所示。矢量分解基于矢量的加法和数乘运算。

若单位矢量 \hat{a} 、 \hat{b} 相互正交, 如图 1-4(b) 所示, 则 C 对 \hat{a} 、 \hat{b} 的分解表示为

$$C = |C| \cos \theta \hat{a} + |C| \sin \theta \hat{b} \quad (1-7)$$

分解系数分别为 C 在 \hat{a} 、 \hat{b} 方向上的投影。

很容易将上述二维平面内的矢量分解推广到三维空间。图 1-4(c) 中, 矢量 D 对两两正交的单位矢量 \hat{a} 、 \hat{b} 、 \hat{c} 进行分解, 有

$$D = |D| \cos \alpha \hat{a} + |D| \cos \beta \hat{b} + |D| \cos \gamma \hat{c} \quad (1-8)$$

式中, α 、 β 、 γ 分别是 D 方向与 \hat{a} 、 \hat{b} 、 \hat{c} 方向的夹角。若 \hat{a} 、 \hat{b} 、 \hat{c} 恰是某坐标系的坐标矢量, 则分解系数就是 D 的坐标分量。

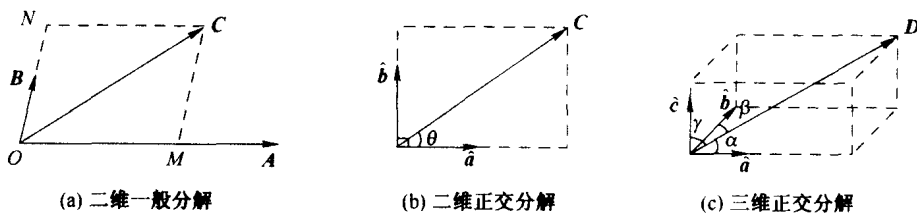


图 1-4 矢量的分解

4. 点积(或称标量积、内积)

设 A 方向、 B 方向的夹角为 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)。 A 与 B 的点积(dot product)记为

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta \quad (1-9)$$

点积结果是标量, 可以看成是 A 的模乘以 B 在 A 上的投影, 如图 1-5 所示。

点积运算有以下规则

$$A \cdot B = B \cdot A = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-10a)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (1-10b)$$

$$(\xi A) \cdot (\eta B) = \xi \eta A \cdot B \quad (1-10c)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2, \quad \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}} = 1 \quad (1-10d)$$

$$\text{当 } \mathbf{A} \neq 0, \mathbf{B} \neq 0 \text{ 时, 若 } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \text{ 则 } \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \quad (1-10e)$$

“ \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的点积为 0 则意味着 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 垂直”，这个结论经常用来判断两矢量是否垂直。

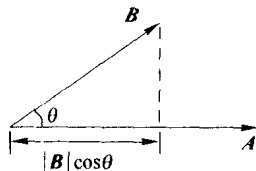


图 1-5 矢量的点积

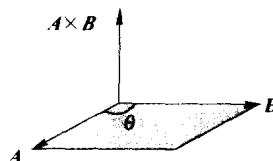


图 1-6 矢量的叉积

5. 叉积(或称矢量积、外积)

设 \mathbf{A} 方向、 \mathbf{B} 方向的夹角为 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)。 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积(cross product)是一个矢量, 记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 它的模等于以 $|\mathbf{A}|$ 、 $|\mathbf{B}|$ 为边的平行四边形的面积(图 1-6 中阴影部分的面积), 即

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \quad (1-11)$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 与 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 均垂直, 且按 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的顺序构成右手螺旋关系。

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的计算公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (1-12)$$

叉积运算有以下规则

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-13a)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (1-13b)$$

$$(\xi \mathbf{A}) \times (\eta \mathbf{B}) = \xi \eta (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-13c)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (1-13d)$$

$$\text{当 } \mathbf{A} \neq 0, \mathbf{B} \neq 0 \text{ 时, 若 } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0, \text{ 则 } \mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \quad (1-13e)$$

“ \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积为零则意味着 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 平行”，这个结论经常用来判断两矢量是否平行。

6. 求导

若 \mathbf{A} 的每个分量都是变量 t 的函数, 则称 \mathbf{A} 是变量 t 的矢函数, 记为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) = A_x(t)\hat{\mathbf{x}} + A_y(t)\hat{\mathbf{y}} + A_z(t)\hat{\mathbf{z}} \quad (1-14)$$

那么, 若极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

存在, 则称它为矢函数 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ 的导数, 记为

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt} \hat{x} + \frac{dA_y(t)}{dt} \hat{y} + \frac{dA_z(t)}{dt} \hat{z} \quad (1-15)$$

n 阶导数记为 $d^n \mathbf{A}/dt^n$, 对 $\mathbf{A}(t)$ 的每个分量求 n 阶导数即可。矢函数的导数仍是一个矢量。

若矢函数 \mathbf{A} 是多变量矢函数, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t_1, t_2, \dots, t_n) = A_x(t_1, t_2, \dots, t_n) \hat{x} + A_y(t_1, t_2, \dots, t_n) \hat{y} + A_z(t_1, t_2, \dots, t_n) \hat{z} \quad (1-16)$$

则 \mathbf{A} 对任意变量 t_i 的偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_i} = \frac{\partial A_x}{\partial t_i} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial t_i} \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial t_i} \hat{z} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-17)$$

高阶偏导数、混合偏导数的求法类似, 对矢函数的各分量分别进行操作即可。矢函数的偏导数仍是一个矢量。

7. 曲线积分与环量

设从曲线 L (或称路径) 的任意一端 M_1 到另一端 M_2 的方向为曲线的正方向。这种定义了正方向的曲线称为有向曲线, 如图 1-7 所示。整个有向曲线可看作由无穷多个长度趋于 0 的有向线元矢量 $d\mathbf{l}$ 首尾相连构成, $d\mathbf{l}$ 的模等于线元长度 dl , $d\mathbf{l}$ 的方向为 $d\mathbf{l}$ 所在点处有向曲线的正切线方向。将路径上任意 M 点处的 $d\mathbf{l}$ 和该处的 \mathbf{A} 做点积, 并将整条曲线上所有的这些点积值叠加起来, 其结果称为 \mathbf{A} 在曲线 L 上的曲线积分(line integral), 记为

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{M_1}^{M_2} |\mathbf{A}| \cos \theta dl \quad (1-18)$$

θ 是 \mathbf{A} 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角。

若曲线 L 是首尾相接的有向闭曲线(或称“环路”、“回路”), \mathbf{A} 在 L 上的曲线积分记为 $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, 称为 \mathbf{A} 沿环路 L 的环量(circulation)。

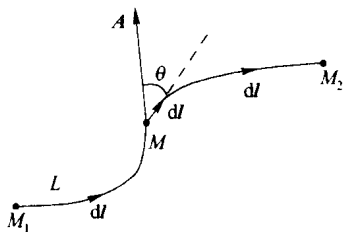


图 1-7 矢量的曲线积分

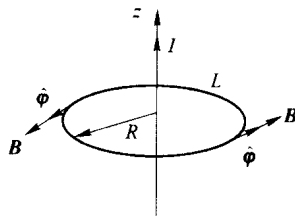


图 1-8 例 1-1 用图

【例 1-1】 如图 1-8 所示, 已知平行于 \hat{z} 方向的无限长线电流 I 产生的磁感应强度矢量为

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

μ 为常数。求 $\mathbf{B}(r)$ 在以 z 轴为中心轴、半径为 R 的圆环上的环量。

解: 设圆环的正方向与 \hat{z} 成右手螺旋关系。

在圆环上, $r = R$, $d\mathbf{l} = \hat{\phi} dl$, 因此