高中

数学奥林匹克竞赛编辑部编
数学奥林匹克竞赛专家委员会审定

数学奥林匹克竞赛
标准教材

周沛耕　王博程　编著

北京教育出版社
文　津　出　版　社

数学奥林匹克竞赛编辑部编
数学奥林匹克竞赛专家委员会审定

高中

数学奥林匹克竞赛

标准教材

周沛耕　王博程　编著

北京教育出版社
文津出版社

责任编辑：印志建　解重庆　洪　梅

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克竞赛标准教材．高中/数学奥林匹克竞赛编辑部编．—北京：文津出版社，2004

ISBN 7-80554-470-0

Ⅰ．数…　Ⅱ．数…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 062487 号

高中 数学奥林匹克竞赛标准教材

数学奥林匹克竞赛编辑部编

*

北京教育出版社
文津出版社　出版

（北京北三环中路6号）

邮政编码：100011

网　址：www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

北京奥林文化艺术中心经销

网　址：www.ao-lin.com.cn

北京乾沣印刷有限公司印刷

*

787×1092毫米　16开本　57印张　1575千字

2004年8月第1版　2004年8月第1次印刷

ISBN 7-80554-470-0/G·76

定价：69.00元

作者简介

周沛耕

多届教育部理科实验班数学主讲教师、中国数学奥林匹克高级教练、“国务院特殊贡献专家”、“全国优秀教师”、北京市首届人民教师（十杰）奖章获得者、多届全国中学生数学奥林匹克竞赛北京队主教练、领队、“北京市数学特级教师”。直接辅导的学生不仅有北京市高考理科状元，更有在国际大赛中取得6枚金牌和1枚银牌的成绩。在32届国际数学奥林匹克竞赛中共有3名学生代表中国出战，占国家队的一半。

序　言

高中阶段的数学教育有普及和提高的双重功能，在我国高中数学教学大纲和高中数学新课程标准框架内的各种版本的高中数学教材，其主要功能是普及数学文化，为升学作准备，因而高中数学教学水平和对学生的能力要求不可避免地受制于高考命题水准。虽然高考命题不断改进、创新，但是由于高考目标和能力要求的局限性，就在一定程度上造成了为适应高考的高中课内数学教学的重复性、被动性、疲劳性，这是低水平的运行态势。无疑对青少年的智力开发和创新能力、研究能力的培养不利。

对那些学有余力或者不满足于应试教育模式的有才华或者有潜在聪慧条件的学生来说，应该给他们一些合适的资料，应该对他们进行适当的课外数学教育，帮助他们更深刻地认识数学本质，提高他们学数学的兴趣，增强他们的竞争力，开展数学竞赛并且编写竞赛教程就是必要且急需的事了。

炎黄子孙聪明。这从我国于1985年首次参加国际中学生数学竞赛（简称IMO）至今一直处于不败之地的事实足以证明。从一定意义上讲，中国是名符其实的数学超级大国。一方面，我国的青少年聪明。另一方面，我国广大中小学数学教师和普教战线上的数学工作者敬业和资深，如果再加上优质的研读资料，一定会最大限度地开发青少年的智力，提高中华民族的数学素质。虽然每年代表中国参加IMO的幸运儿只有一个队，6名选手，但是假设允许我国选派两个队，三个队，四个队，五个队……，这些队也一定是超一流的国际强队。

学习竞赛数学，要尽量充分地吮吸数学大树的营养，同时又必须扎实地磨练，多研究题目、多总结，要始终按奥林匹克精神和科学精神去研读，去奋斗，去攀登。

相信你通过研究本书一定会实现美好理想！

数学奥林匹克竞赛编辑部

2004年6月

编者的话

本书涵盖了近年国内、国际上数学竞赛培训工作的最新成果和研究资料。主要目标定位在帮助广大高中学生学好数学，增强素质，冲刺高考，提高他们的竞赛成绩和竞争力，不论读者是否有参加数学竞赛的兴趣，都能从本书中受益。

在题目的分析与解答中有一定创见，有独到的精彩之处，利于激发读者的数学兴趣和聪明才智。

笔者长期在竞赛数学第一线指导高考备考和各级数学集训队，并联系了全国范围内大量有才华的年轻有为的优秀教练员，汇集了他们的解题思想和解题经验，把中学数学日常教学与竞赛数学培训完美地结合在一起。

本书既能帮助读者迎战我国高中数学全国联赛一试，备战高考，又有指导学生参加全国联赛二试，参加国家数学奥林匹克竞赛（OM）和国际数学奥林匹克竞赛（IMO）的专项训练，既适用于在数学学习中有兴趣有余力的高中学生，又适用于他们的指导老师

为便于读者分阶段学习使用，本书分为基础篇和专题篇两部分。基础篇针对全国高中联赛一试，兼顾高中数学总复习，有助于准备高考；专题篇则是典型的数学集训队中为提高选手的竞争力而必备的竞赛数学知识、方法和技能。阅读本书时，应与高中教科书和近3年全国高中数学联赛题以及近3年全国数学高考题结合起来。

基础篇适用于在7～10月间阅读，专题篇适用于8月～下一年5月间阅读。

为充分地从本书中吸取有益营养，提倡多读几遍，如果高一、高二、高三读3轮，效果更好。

研读本书应当有毅力，有详实的计划，不能时断时续，以保证思维的连贯性和循序渐进性。最好能约上几位在数学方面有浓厚兴趣的志同道合的朋友结成研读小组，一起研读。

愿本书能成为影响你一生的良师益友。

参与本书编写及审校的还有：闫达伟、刘瑞、文静、黄辉、马艳、支颖梅、高云平、刘惠敏、关雪等，在此谨表谢意。

周沛耕

2004年6月于北京大学

目 录 Table of Contents

第一部分 高中数学奥林匹克预备教材

第二部分 高中数学奥林匹克专题教材

第一部分

高中数学奥林匹克预备教材

第一章

集合与简易逻辑

§1.1 知识要点与基本方法

1. 集合中元素具有三条特性:确定性、互异性、无序性.

2. 若非空有限集 A 中有 n 个元素,则有如下结论:

(1)A 的子集的个数是 2^n;

(2)A 的"非空子集"和"真子集"的个数都是 2^n-1;

(3)A 的"非空真子集"的个数是 2^n-2.

3. 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$,则 A 的所有子集中元素之总和为:

$S=2^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 其中 $a_i\in\mathbf{Z}^+$

4. 集合间的交集,并集,补集有以下性质:

(1)$A\cup A=A,A\cap A=A$(幂等律)

(2)$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$(交换律)

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(结合律)

(4) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$(分配律)

(5)$A\cap(B\cup A)=A,A\cup(A\cap B)=A$(吸收律)

(6) $\overline{\overline{A}}=A$　　其中 A 是全集 I 的子集(对合律)

(7) 设全集为 U,A、B 为 U 的子集,则

$C_{\mathrm{U}}(A\cup B)=(C_{\mathrm{U}}A)\cap(C_{\mathrm{U}}B)$

$C_{\mathrm{U}}(A\cap B)=(C_{\mathrm{U}}A)\cup(C_{\mathrm{U}}B)$

5. 深刻理解两个集合相等的概念,并能解决相关的问题. 一般的思路和方法如下:

(1) 验证两集合的元素相同,即两集合中各元素对应相等;

(2) 利用定义,证两集合互为子集;

(3) 若是用描述法表示的集合,则两集合的属性能够互推(充要条件),即等价;

(4) 对于两个有限集合,则元素个数相等,各元素之和相等,之积相等是两集合相等的必要条件.

6. 有限集合的元素个数,容斥原理.

记有限集合 M 的元素个数为 $n(M)$. 如下集合 A、B、C 等以及全集 U 都是有限集. 由图 Ⅰ－1－1 和图 Ⅰ－1－2 可知:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$;

$n[C_{\mathrm{U}}(A\cup B)]=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$;

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$n[C_{\mathrm{U}}(A\cup B\cup C)]=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$$= n(U) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)$$

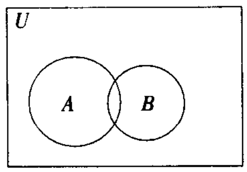

图 Ⅰ－1－1

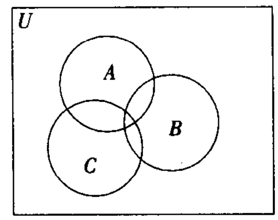

图 Ⅰ－1－2

一般地，有关于 n 个有限集合的并集合或并集的补集的元素个数的类似公式成立，称该结论为容斥原理.

7. 要掌握含绝对值的不等式和一元二次不等式的基本解法.

8. 掌握一元二次方程根的分布的如下六个充要条件.

设一元二次方程为 $ax^2 + bx + c = 0(a > 0)$

(1) 方程二根一个大于 x_0，另一个小于 x_0

$$\Longleftrightarrow ax_0^2 + bx_0 + c < 0$$

(2) 方程二根都大于 x_0

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c > 0 \\ b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0 \end{cases}$$

(3) 方程二根都小于 x_0

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c > 0 \\ b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < x_0 \end{cases}$$

(4) 方程二根都在两数 m、$n(m < n)$ 之内

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} am^2 + bm + c > 0 \\ an^2 + bn + c > 0 \\ b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ m < -\dfrac{b}{2a} < n \end{cases}$$

(5) 只有一个根在 $m, n(m < n)$ 之间

$$\Longleftrightarrow (am^2 + bm + c)(an^2 + bn + c) < 0.$$

(6) 方程二根在二数 m、$n(m < n)$ 之外

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} am^2 + bm + c < 0 \\ an^2 + bn + c < 0 \end{cases}$$

9. 逻辑联结词.

理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，把握它们与集合中的并集、交集、补集的对应关系. 不含逻辑联结词的命题是简单命题，由简单命题与逻辑联结词构成的命题是复合命题，复合命题的构成形式是

p 或 q

p 且 q

非 p,即命题 p 的否定.

其中 $p,q,\cdots$ 表示命题.

判断一个复合命题的真假,一般分为如下三个步骤:

第一,确定复合命题的构成形式;

第二,判定其中各简单命题的真假;

第三,利用真值表判断复合命题的真假.

真值表如下:

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

10. 四种命题.

(1) 原命题为真,它的逆命题和否命题不一定为真,它的逆否命题一定为真.

(2) 由于互为逆否命题同真同假,所以四种命题为真(或假)的个数是偶数 0 或 2 或 4.

11. 反证法.

(1) 反证法的步骤:

反证法是一种间接证法.用反证法证明一个命题"$A \Rightarrow B$"可以分为 3 步:

1°) 反设:假设 B 不成立,则 $\neg B$ 成立.

2°) 归谬:从"A 且非 B"入手 $\xRightarrow{\text{进行正确推理}}$ 推出矛盾.

3°) 结论:由矛盾知假设"B 不成立"是错误的,从而 B 成立.

【注】 第(2)步归谬是反证法的核心.

其一,归谬入手点是从"原命题的否定"入手,特别,有时只以"非 B"就够了.

其二,归谬到最后产生的矛盾有三种情况.

1°)"非 p 为真"与"原始题设 p"构成矛盾;

2°)"q 为真"与"假设""非 q 为真"矛盾;

3°)"恒假命题".

(2) 反证法适用的场合.

从最优选择的角度考虑,下面 8 种情况使用反证法是方便的:

1°) 命题的结论以否定形式出现时;

2°) 命题的结论以"至多"、"至少"的形式出现时;

3°) 命题的结论以"无限"的形式出现时;

4°) 命题的结论以"惟一"、"共点"、"共面"的形式出现时;

5°) 关于存在性命题;

6°) 逆命题;

7°) 从已知出发,能推出所知甚少的时候;

8°) 一个学科开始形成或建立的时候.

总之,正难则反,直接的东西较少,较抽象,较困难时,其反面常会较多,较具体,较容易.

(3) 掌握反证法的前提是"正确反设",否则推理论证得再好也劳而无功.现将一些常用的"结论的

否定形式”列表如下.

原结论词	反设词	原结论词	反设词
是	不是	至少有一个	没有一个
都是	不都是	至多有一个	至少有二个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有 $n-1$ 个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有 $n+1$ 个
对所有 x 成立	存在某 x 不成立	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
对所给 x 不成立	存在某 x 成立	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

12. 充要条件.

(1) 定义:

如果已知“$p \Rightarrow q$”,则称 p 是 q 的充分条件;

如果已知“$q \Rightarrow p$”,则称 p 是 q 的必要条件.

如果既有“$p \Rightarrow q$”,又有“$q \Rightarrow p$”,就记作 $p \Longleftrightarrow q$,则称 p 是 q 的充要条件.

(2) 充分条件,必要条件的内涵.

充分条件内涵:“有了足够,换亦可能”.

必要条件内涵:“缺了不成,有了不够”.

§1.2 赛题精讲

例 1 (1996.全国高中数学联赛一试,第二大题第 1 小题)求集合 $A=\left\{x \mid -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2},\ 1 < x \in N\right\}$ 的真子集的个数

【分析】 关键对集合元素满足的条件的不等式进行等价变形.

解: $\because A=\left\{x \left| -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathbf{N}\right.\right\}$

$$=\left\{x \left| -1 \leqslant \frac{1}{\lg \frac{1}{x}} < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathbf{N}\right.\right\}$$

$$=\left\{x \left| -1 \leqslant \frac{1}{-\lg x} < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathbf{N}\right.\right\}$$

$$=\left\{x \left| \frac{1}{2} < \frac{1}{\lg x} \leqslant 1, 1 < x \in \mathbf{N}\right.\right\}$$

$$=\{x \mid 1 \leqslant \lg x < 2, 1 < x \in \mathbf{N}\}$$

$$=\{x \mid 10 \leqslant x < 100, 1 < x \in \mathbf{N}\}$$

$\therefore A$ 中元素的个数为 90 个

$\therefore A$ 的真子集的个数为 $2^{90}-1$ 个

例 2 (1983.上海市第一试第一题(7))在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中,注意取出一个子集,计算它的元素之和,则所有各个子集元素之和的总和是____________.

【提示】 依据竞赛知识,方法精要“3”.

解: A 的所有子集的元素之和

$$=2^{n-1}(1+2+3+\cdots+n)$$

$= 2^{n-1} \cdot \frac{(n+1)n}{2}$

$= n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

例 3 （1992.北京市高一数学竞赛初试一题(3)）若集合 $M = \{1992, 4, 5\}$.集合 $N = \{x \mid x \in M\}$，则集合 M 与 N 的关系是：

A. $M = N$　　B. $M \subset N$　　C. $M \supset N$　　D. $M \cap N = \Phi$

解法一：

$\because N = \{x \mid x \in M\}$

$\therefore N$ 是集合 M 的所有元素组成的集合

因此　$M = N$　$\therefore$ 选 A

解法二：

$\because N = \{x \mid x \in M\}$

$\therefore x \in N \Rightarrow x \in M$，即 $N \subseteq M$

又若 $x \in M \Rightarrow x \in N$

$\therefore M \subseteq N$

因此 $M = N$　$\therefore$ 选 A

例 4 （1994.北京市高一数学教学竞赛初试第二题第 1 小题）已知 $I = R$，集合 A、B 都是实数集 R 的子集，$A \cap (C_IB) = \{x \mid x^2 \leqslant 4\}$.

$(C_IA) \cap B = \{x \mid (x-4)(8-x) \geqslant 0\}$

$(C_IA) \cap (C_IB) = \{x \mid x^2 - 6x - 16 > 0\}$

求　$A \cap B$

解：　$A \cap (C_IB) = \{x \mid x^2 \leqslant 4\}$

$= [-2, 2]$

$(C_IA) \cap B$

$= \{x \mid (x-4)(8-x) \geqslant 0\}$

$= [4, 8]$

$(C_IA) \cap (C_IB) = \{x \mid x^2 - 6x - 16 > 0\}$

$= (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$

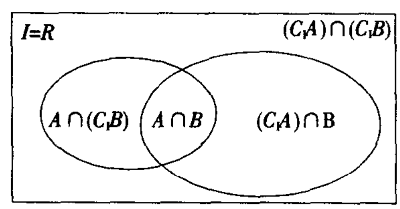

图 Ⅰ -1-3

由韦思图(图 Ⅰ -1-3)观察 $A \cap (C_IB)$，$(C_IA) \cap B$，$(C_IA) \cap (C_IB)$，$A \cap B$ 的关系，知：

$A \cap B = (2, 4)$

例 5 （1994.北京市高一数学竞赛初试一.4）已知 $x \in \mathbf{R}$，$y \in \mathbf{R}^+$，集合 $A = \{x^2 + x + 1, -x, -x-1\}$，$B = \{-y, -\frac{y}{2}, y+1\}$.若 $A = B$，则 $x^2 + y^2$ 的值是

A. 5　　B. 4　　C. 25　　D. 10

【分析】　充分利用竞赛知识，方法精要 5 做即可.

解：$\because (x+1)^2 \geqslant 0$

$\therefore x^2 + x + 1 \geqslant -x$

又　$x^2 + x + 1 > 0$

根据集合元素的互异性，知

$x^2 + x + 1 \neq -x$

即　　$x \neq 1$　此时有 $x^2 + x + 1 > -x > -x - 1$

又　$y \in R^+$，在集 B 中，$y + 1 > -\frac{y}{2} > -y$

由 $A = B$，只能

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = y + 1 & ① \\ -x = -\dfrac{y}{2} & ② \\ -x - 1 = -y & ③ \end{cases}$$

由 ②、③ 解得 $x = 1, y = 2$,代入 ① 式知,

$x = 1, y = 2$ 满足 ① 式

所以 $x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ 选 A

例 6 由1,2,3,组成的 n 位数,要求 n 位数中 1、2 和 3 每一个至少出现一次,求所有这种 n 位数的个数.

【分析】 设所有由 1,2,3 组成的 n 位数的集合记作全集 ζ, ζ 中不含 $i(i = 1,2,3)$ 的 n 位数的集合记作 A_i,则满足题设条件的所有 n 位数的个数为

$$|(C_\zeta A_1) \cap (C_\zeta A_2) \cap (C_\zeta A_3)|$$

注意到

$$\begin{aligned} &|(C_\zeta A_1) \cap (C_\zeta A_2) \cap (C_\zeta A_3)| \\ =& |C_\zeta(A_1 \cup A_2 \cup A_3)| \\ =& |\zeta| - |(A_1 \cap A_2 \cap A_3)| \end{aligned}$$

利用容斥原理即可求得.

解:设所有由 1,2,3 组成的 n 位数的集合记作全集 ζ,则 $|\zeta| = 3^n$. ζ 中不含 $i(i = 1,2,3)$ 的 n 位数的集合记作 A_i,则

$|A_i| = 2^n$, $n\ |A_i \cap A_j| = 1$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,3$.

$(C_\zeta A_1) \cap (C_\zeta A_2) \cap (C_\zeta A_3)$ 为 ζ 中同时含有数字 1,2,3 的 n 位数全体的集合,由容斥原理知

$$\begin{aligned} &|(C_\zeta A_1) \cap (C_\zeta A_2) \cap (C_\zeta A_3)| = |\zeta| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ =& |\zeta| - [|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|] \end{aligned}$$

故

$$|(C_S A_1) \cap (C_S A_2) \cap (C_S A_3)| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

例 7 对二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$,求证,必存在 $x = \pm M \neq 0$,使 $f(\pm M)$ 均与 a 同号.

【分析】 这是一道证明题,但本质上是说明二次不等式

$$af(x) = a^2x^2 + abx + ac > 0 \qquad (*)$$

有解,且解集合包括 $x = M$,与 $x = -M$,只须讨论($*$)所对应的二次方程的判别式

证明:首先指出一个重要性等式

$$4af(x) = (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)$$

(1) 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时,$4af(x) > 0$ 的解为$(-\infty, +\infty)$

(2) 当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时,不等式 $4af(x) > 0$ 的解为

$$(-\infty, -\frac{b}{2a}) \cup (-\frac{b}{2a}, +\infty)$$

(3) 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时,方程 $4af(x) = 0$ 有两个不等的实数根 $x_1, x_2(x_1 < x_2)$,相应不等式 $4af(x) > 0$ 的解为

$$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

因为三种情况下的解集均为无穷区间,都存在 M 与 $-M$ 属于解集合,使 $4af(\pm M) > 0$,从而,$a \neq f(\pm M)$ 同号.

例 8 若不等式 $8x^4 + 8(m - 2)x^2 - m + 5 > 0$ 对任意实数 x 均成立,求实数 m 的取值范围.

【分析】 注意换元降次和应用根的分布理论.

解:令 $x^2 = t(t \geqslant 0)$,则原问题等价于

$f(t)=8t^2+8(m-2)t-m+5$ 在 $t\geqslant 0$ 时恒大于零,故得

$$(\text{I})\Delta<0 \quad 或 \quad (\text{II})\begin{cases}\Delta<0\\ f(\Delta<0)>0\\ -\dfrac{m-2}{2}<0\end{cases}$$

解(Ⅰ)得 $\dfrac{1}{2}<m<3$

解(Ⅱ)得 $3\leqslant m<5$

综上得,满足题设的 m 的取值范围是 $\dfrac{1}{2}<m<5$

例 9 (第二届国际数学奥林匹克试题)x 取什么值时,不等式

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$$

成立?

【分析】 由已知易得 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$,且 $x\neq 0$,从而把原不等式化简求解.

解:显然 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$,且 $x\neq 0$

将原不等式化简得

$x^2(8x-45)<0$

$\therefore x<\dfrac{45}{8}$

故原不等式的解集为

$$\left\{x\mid -\frac{1}{2}\leqslant x<0 或 0<x<\frac{45}{8}\right\}$$

【注】 本题的关键一步在于化简整理.请注意,其他过程如下:

不等式左端

$$\begin{aligned}\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}&=\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2\\&=\left[\frac{2x\times(1+\sqrt{1+2x})}{1-(1+2x)}\right]^2\\&=(1+\sqrt{1+2x})^2\end{aligned}$$

$\therefore$ 原不等式同解于

$2+2x+2\sqrt{1+2x}<2x+9$,即

$\sqrt{1+2x}<\dfrac{7}{2}$

从而得到 $x<\dfrac{45}{8}$,然后与 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq 0$ 取交得原不等式的解.

对于不等式两边平方时,要注意不等号的方向是否改变.

例 10 不等式 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 的解集分别记为 A、B,其中 $a\in R$.求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

【分析】 首先确定集合 A 和 B,然后由 $A\subseteq B$ 借助数轴解之.

解:由 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$,得

$$-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$$

即

$2a\leqslant x\leqslant a^2+1$

$\therefore A = \{x \mid 2a \leqslant x \leqslant a^2 + 1\}$

由 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leqslant 0$ 即

$(x-2)(x-3a-1) \leqslant 0$

当 $a \geqslant \frac{1}{3}$ 时, $B = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3a+1\}$

当 $a < \frac{1}{3}$ 时, $B = \{x \mid 3a+1 \leqslant x \leqslant 2\}$

于是,当 $a \geqslant \frac{1}{3}$ 时,由 $A \subseteq B$,得

$$\begin{cases} 2 \leqslant 2a \\ a^2 + 1 \leqslant 3a + 1 \end{cases}$$

$\therefore 1 \leqslant a \leqslant 3$

当 $a < \frac{1}{3}$ 时,由 $A \subseteq B$,得

$$\begin{cases} 3a + 1 \leqslant 2a \\ a^2 + 1 \leqslant 2 \end{cases}$$

$\therefore a = -1$

综上,使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围是

$$\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant 3 \quad \text{或 } a = -1\}$$

【评估】 求解中要充分利用数形结合的思想.

例 11 (1984.全国联赛试题)下列命题是否正确?若正确,给予证明.否则,举出反例.

(1)若 P、Q 是直线 l 同侧的两个不同点,则必存在两个不同的圆,通过 P、Q 且和直线 l 相切;

(2)当 $a > 0, b > 0$ 且 $a \neq 1, b \neq 1$ 时, $\log_a b + \log_b a \geqslant 2$;

(3)设 A、B 是坐标平面上的两个点集. $C_r = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$.若对任何 $r \geqslant 0$ 都有 $C^r \cup A \subsetneqq C^r \cup B$,则必有 $A \subsetneqq B$.

【分析】 本题是判断所给命题是否正确,若正确,给予证明.否则,举出反例.

解:(1)命题不正确.当 $PQ \parallel l$ 时,只能作一个过 P、Q 且与 l 相切的圆;

(2)命题不正确.如取 $a = 2, b = \frac{1}{2}$ 时, $\log_a b + \log_b a = -2 < 2$;

(3)命题不正确.取 A 是任一包含点 $(0,0)$ 的集合, $B = A - \{(0,0)\}$,显然有 $C^r \cup A \subsetneqq C^r \cup B$,但是 $A \subsetneqq B$ 不成立.

例 12 (1994.日本数学奥林匹克预选赛试题改编)已知集合 $\zeta = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ζ 的子集 A 预满足下列条件:

①A 的元素有 5 个;

②A 中任何两个元素和的个位数字恰好是 0 到 9 这十个整数.

求证:这样的子集 A 不存在.

【说明】 这是 1994 年日本数学奥林匹克预选赛试题的改编题,原设问是"这样的子集 A 有多少个?",难度就比较大,不容易让人联想用反证法解答.改变设问方式后,一方面问题的难度降低了,另一方面也提示我们可用反证法.

证明:假设这样的子集 A 存在,不妨设

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

由于 A 中两个不同元素的和恰有 10 个,每个元素出现 4 次,故由条件②,知 $4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ 的个位数字应与 $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ 的末位数字相同,即为 5.

但 $4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ 的末位数字是偶数,不可能是 5.