数学奥林匹克竞赛编辑部编
数学奥林匹克竞赛专家委员会审定

http://www.ao-lin.com.cn

数学奥林匹克竞赛
标准教材

九年级

北京教育出版社
文津出版社

数学奥林匹克竞赛编辑部编
数学奥林匹克竞赛专家委员会审定

数学奥林匹克竞赛

标准教材

九年级

北京教育出版社
文津出版社

责任编辑：吕心鹏　解重庆

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克竞赛标准教材．九年级/数学奥林匹克竞赛编辑部编．—北京：文津出版社，2004.6

ISBN 7-80554-458-1

Ⅰ．数…　Ⅱ．数…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 062488 号

数学奥林匹克竞赛标准教材

九年级

数学奥林匹克竞赛编辑部编

*

北京教育出版社
文 津 出 版 社 出版

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码：100011

网　址：www.hph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

北京奥林文化艺术中心经销

北京乾沣印刷有限公司印刷

*

880×1230 毫米　32 开本　10.5 印张　274 千字

2004 年 6 月第 1 版　　2004 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-80554-458-1/G・64

定价：13.00 元

前言

奥林匹克知识竞赛是国内外著名的高水平知识竞赛。

自改革开放以来，奥林匹克知识竞赛传入我国，在全国各地广泛开展。近年来，各地的奥校、奥班更如雨后春笋，层出不穷，市场上各类辅导读物、练习卷、教材更是名目繁多、良莠不齐。

为使广大读者能够获得真正科学、规范的奥林匹克教材和相应的试卷及辅导读物，使众多学子能够真正学习到科学、规范的奥林匹克各学科知识，我们特约请我国奥林匹克知识竞赛最早的倡议者、潜心于此事业的各学科专家以及长年从事奥林匹克知识教学的优秀教练员组成“数学奥林匹克竞赛编辑部”和“数学奥林匹克竞赛专家委员会”，双方通力合作，编写了这套《数学奥林匹克竞赛标准教材》系列丛书。

本丛书的编写遵循了以下几条基本的科学原则：

一、它遵循了奥林匹克知识竞赛所一贯提倡和推行的科学、严密、规范的基本原则；

二、它涵盖了国家教育部新课程标准所规定的各年级、各主要学科的全部知识内容；

三、它在涵盖新课标内容的基础上，科学地加宽、扩大了知识内容；

四、它在加宽、扩大各学科知识内容的基础上，科学地加深、加难了知识内容；

五、它在各学科例题遴选上以我国各地奥赛经验为基础，向国际奥林匹克知识竞赛课程靠拢；

六、它在各学科知识论述上深入浅出，清晰透彻，以便于读者自学。

本丛书在体例编排上力求务实、高效，使读者能用较短的时间获得较高的学习成绩，同时本丛书偏重于开拓解题思路和解题技巧，使读者通过本丛书的学习和训练，找到规律性的东西，从而达到举一反三的目的，并进而提高其整体素质。

集百花于一枝，汇群芳于一卷，是我们多年的夙愿。本丛书汇集和渗透了初高中各学科专家和奥校优秀教练员多年教学经验和成果，特别是解题思路和方法，是他们多年教学经验的结晶，我们为能有这样高水平的专家、学者加盟这套丛书的撰写感到振奋和骄傲，同时这也是广大中学生的幸事。由于我们水平有限、加之时间仓促，在编辑成书过程中难免会存在一些缺陷和遗漏，恳请广大读者和有关专家学者提出宝贵意见，以使本丛书成为广大读者喜爱的一套有益的书籍。

参加本书的编写人员有：乔家瑞　闻　惠　高尔柳　区仁达等

数学奥林匹克竞赛编辑部

2004年5月

使用说明

本教材经过一年多的紧张撰写，终于付梓了。为了更好地发挥本教材的作用，我们提出下面建议，以供同学们参考：

一、何时使用本书

本教材是按国家教育部2000年春季颁布的最新《九年义务教育教学大纲》（修订版）所规定的初中各年级数学知识内容，在进一步体现2001年教育部颁发实施的“新课程标准”精神的基础上，按教学大纲顺序编写的，并以教科书中的章为编写单位，每章都是由下述三部分内容组成的：

1. 课内知识的总结、概括；
2. 课内知识的延伸、拓广；
3. 课外知识的选讲。

例如，第一册第五单元“二元一次方程组”中，利用换元法解一次方程组、解一次方程组的相反问题、与一次方程组有关的综合题等内容属于课内知识的总结、概括；待定系数法的简单应用、应用题选解等内容属于课内知识的延伸、拓广；而行列式浅说、一次不定方程则属于课外知识选讲。

显而易见，同学们在课堂上学习到哪个章节，就可以选读本教材中的相应内容。学习有困难的同学，应集中精力学习课内知识的总结、概括部分的内容，以便扫清学习中的障碍，迅速提高学习成绩；学习成绩较好的同学可选读课内知识的总结、概括及延伸、拓广两部分内容，从而在学习知识的同时，不断地改进学习方式及学习方法，逐步领略并掌握科学的思维方法；有余力的同学还可以进

一步学习一部分课外知识，以便开扩眼界；参加数学奥林匹克学习的同学，还应精读课外知识选讲部分，掌握课外知识的精髓及与课内知识的内在联系，以避免参加课外学习走过场的不良倾向。

二、怎样使用本书

1. 聘请家庭教师辅导的同学，可要求辅导老师按本教材的相关内容进行辅导，以加强针对性，避免盲目性，使掌握知识和提高能力并重，从而提高家庭辅导的效果。

2. 多数同学是通过自学，系统地掌握本教材的相关内容，开始自学时会遇到重重困难，最大的困难就是读不懂、读得慢。解决这个问题的灵丹妙药就是“坚持”，只有持之以恒才能逐渐读懂一些，读得快一些。再坚持一段时间就会产生飞跃，出现喜人的效果，达到读得懂、读得快的境界。

在自学过程中，要注意：

(1) 先分段阅读，再整体阅读。主要明确新知识有哪些，并列出简单的提要；新知识与课内哪些知识有联系，并归纳出主要的联系内容；新知识中有哪些疑难问题。

(2) 在认真阅读的基础上，应深钻细研、分析综合、抽象归纳，重点解决以下三个问题：新知识产生的背景；新知识的本质特征；使用新知识的方法，力求全面掌握新知识，把书本上的知识转化成为自己的知识。

(3) 在把每章的内容学完之后，要演练一定数量的题目，并着重总结知识间的纵横关系，知识中所蕴涵的数学思想和方法，要尝试从更高的思维起点，更多的思维指向去认识课内所学习的知识，要学习用写“专题”的方法进行对比、归纳。

通过自学一章的内容后，要及时地总结自学方法、考查自学效果。

“理想的书籍是智慧的钥匙”，我们希望本教材能使同学们“学会”并“会学”，掌握开启知识宝库的金钥匙。

数学奥林匹克竞赛编辑部

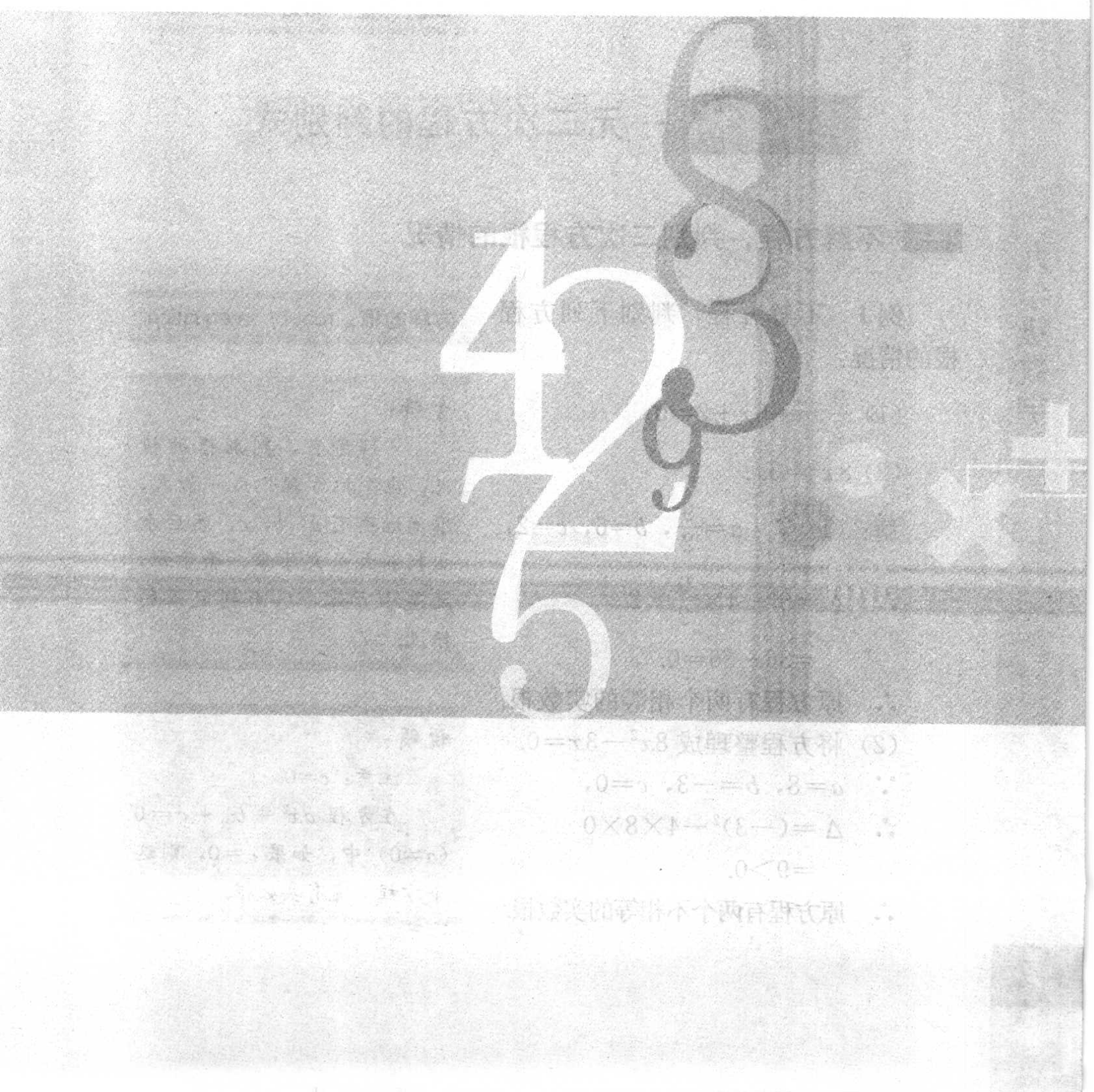
2004 年 5 月

目 录

代数部分

几何部分

代数部分



第十二章　一元二次方程

二次方程：quadratic equation

§12.1　一元二次方程的判别式

一　不解方程，判别二次方程根的情况

例1　不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $\frac{9}{2}x^2+6x+2=0$；

(2) $8x^2=3x$.

解：(1) ∵　$a=\frac{9}{2}$，$b=6$，$c=2$，

∴　$\Delta=6^2-4\times\frac{9}{2}\times2$

$=36-36=0$.

∴　原方程有两个相等的实数根.

(2) 将方程整理成 $8x^2-3x=0$.

∵　$a=8$，$b=-3$，$c=0$，

∴　$\Delta=(-3)^2-4\times8\times0$

$=9>0$.

∴　原方程有两个不相等的实数根.

方程的根：root of an equation

分析：

不解方程，判别根的情况，应先把方程化成一般式，准确地确定 a，b，c，然后求出判别式是大于零，等于零，还是小于零，从而判定根的情况.

说明：

注意：$c=0$.

在方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 中，如果 $c=0$，则这个方程一定有实数根.

例 2 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $(8k^2+1)x^2-4kx+1=0$；

(2) $9x^2-6\sqrt{2}mx+2m^2=0$；

(3) $9x^2-(p+7)x+p-3=0$.

解： (1) ∵ $8k^2+1\neq0$，

∴ 原方程是一元二次方程.

$$\therefore \Delta=(-4k)^2-4(8k^2+1)$$
$$=16k^2-32k^2-4$$
$$=-16k^2-4<0,$$

∵ $k^2\geqslant0$，

∴ $16k^2\geqslant0$，$16k^2+4>0$.

∴ $-16k^2-4<0$.

∴ 原方程没有实数根.

(2) ∵ $\Delta=(-6\sqrt{2}m)^2-4\times9\times2m^2$
$$=72m^2-72m^2$$
$$=0,$$

∴ 原方程有两个相等的实数根.

(3) ∵ $\Delta=[-(p+7)]^2-4\times9(p-3)$
$$=p^2-22p+157$$
$$=(p-11)^2+36,$$

又∵ $(p-11)^2\geqslant0$，

∴ $(p-11)^2+36>0$.

∴ 原方程有两个不相等的实数根.

例 3 求证：方程 $mx^2+(m+6)x+3=0$ 必有实根.

证明： 分两种情况证明：

(1) $m=0$ 时，原方程化为一元一次方程

$$6x+3=0.$$

评注：

(1) 一元二次方程根的判别式的应用是以方程 $ax^2+bx+c=0$ 中的 $a\neq0$ 为前提条件的，对于含字母系数的二次方程要特别注意这一点.

(2) 要判断含有字母的二次式的正、负情况，配方是一个有效方法，并注意使用

$a^2\geqslant0$，$(a-1)^2\geqslant0$，

$(a-b)^2\geqslant0$，

$a^2+1>0$，$(a-1)^2+3>0$，

$(a-b)^2+9>0$，

$(a+3)^2+t>0$ $(t>0)$.

练一练：

已知关于 x 的方程 $x^2-2mx+\frac{1}{4}n^2=0$，其中 m，n 分别是一等腰三角形的一腰和底边的长，那么这个方程一定有________根.

判别时使用了等腰三角形的什么性质？

答案：两不相等的实数根

一次方程：first-order equation

此时方程有实根 $x=-\frac{1}{2}$.

(2) $m\neq 0$ 时，$\Delta=(m+6)^2-12m=m^2+36>0$，此时原方程有两个不相等的实数根.

综合上述两种情况知，原方程必有实根.

评注：

由于题中没有给出方程的次数，也没有指出方程根的个数，因此应考虑方程为一次方程和二次方程两种情况. 基于上述分析，在审题时应注意："关于 x 的方程"和"关于 x 的二次方程"的区别；"方程有实根"、"方程有两个实根"及"方程有两个不相等的实根"的区别.

判别式：discriminant

二 根据方程的根的情况，确定方程中某一字母系数的取值或取值范围

例 1 已知 $m+3$ 是正数，关于 x 的方程

$$x^2+(2m-1)x+m^2+\frac{3}{4}=0$$

有实数根，求实数 m 的取值范围.

解： ∵ 方程有实数根，

∴ $\Delta=(2m-1)^2-4\left(m^2+\frac{3}{4}\right)\geqslant 0$.

即 $-4m-2\geqslant 0$.

∴ $m\leqslant -\frac{1}{2}$.

∵ $m+3>0$，

∴ $m>-3$.

从而 $-3<m\leqslant -\frac{1}{2}$.

评注：

含有字母系数的一元二次方程根的情况由字母系数决定，而字母系数的取值范围是由判别式 Δ 求得. 因此应根据题设条件，由 Δ 列出不等式，解所列不等式就可以确定字母系数的取值范围.

例 2 已知关于 x 的方程

$$\frac{1}{4}x^2-(t-2)x+t^2=0.$$

(1) 有两个不相等的实数根，求 t 的取值范围；

(2) 有两个相等的实数根，求 t 的值.

解：（1）∵ 方程有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=[-(t-2)]^2-4\times\frac{1}{4}t^2>0$.

即 $-4t+4>0$.

∴ $t<1$ 时，方程有两个不相等的实数根.

（2）∵ 方程有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(t-2)^2-4\times\frac{1}{4}t^2=0$.

∴ $t=1$ 时，方程有两个相等的实数根.

例 3 关于 x 的二次方程

$$(k-1)x^2+2\sqrt{k}x+3=0$$

有两个不相等的实数根，求 k 的最大整数值.

解：∵ 原方程是关于 x 的二次方程，

∴ $k-1\neq0$，即 $k\neq1$.

又由$\sqrt{k}$有 $k\geqslant0$.

∵ 方程有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=(2\sqrt{k})^2-4\times3(k-1)>0$.

∴ $k<\frac{3}{2}$.

∴ 满足 $k\neq1$，$0\leqslant k<\frac{3}{2}$ 的最大整数是 0.

因此，满足条件的 k 的最大整数值是 0.

例 4 已知关于 x 的一元二次方程

$$(1-2m)x^2-2\sqrt{m+1}\cdot x-1=0$$

有两个实数根，求 m 的取值范围.

解：∵ 方程有两个实数根，

∴ $\Delta=4(m+1)+4(1-2m)$

评注：

在使用一元二次方程根的判别式时，一定要注意二次项系数不为 0 这个前提条件，否则会出现错误，使所求字母系数的值的范围扩大.

错在哪里？

若方程 $(a^2-4)x^2+2(a+2)x+1=0$ 有实根，求实数 a 的取值范围.

错解：∵ 方程有实根，

∴ $4(a+2)^2-4(a^2-4)\geqslant0$.

即 $4a+8\geqslant0$.

∴ $a\geqslant-2$.

评注：

注意挖掘题目中的隐含条件.

$=-4m+8\geqslant 0.$

$\therefore\quad m\leqslant 2.$

又$\because\quad 1-2m\neq 0$，$\therefore\quad m\neq\frac{1}{2}.$

同时　$m+1\geqslant 0$，$\therefore\quad m\geqslant -1.$

因此，$-1\leqslant m\leqslant 2$ 且 $m\neq\frac{1}{2}$时，原方程有两个实数根.

三　一元二次方程判别式的综合应用

例 1　已知关于 x 的方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 有两个不同的正整数根，求正整数 k 的值.

解：$\because$　关于 x 的方程有两个不同的实数根，

$$\therefore\ \begin{cases} k^2-1\neq 0, \\ \Delta=36(3k-1)^2-4(k^2-1)\times 72>0. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} k\neq\pm 1, \\ k\neq 3. \end{cases}$

$\therefore$　原方程变形 为$[(k-1)x-6]\cdot[(k+1)x-12]=0.$

解之，得　$x_1=\frac{6}{k-1}$，$x_2=\frac{12}{k+1}.$

要使 x_1 为正整数，则 $k=2$，4，7；

要使 x_2 为正整数，则 $k=2$，5，11.

$\therefore\quad k=2.$

> **评注：**
>
> 解答本题分为两步：
>
> 第一步：先由 $k^2-1\neq 0$ 及 $\Delta>0$，得出方程有两个不相等的实数根；
>
> 第二步：再由 $\frac{6}{k-1}$ 及 $\frac{12}{k+1}$ 为正整数，求出正整数 k.

例 2　a，b，c 是$\triangle ABC$ 的三条边长，当 $m>0$ 时，关于 x 的方程 $c(x^2+m)+b(x^2-m)-2\sqrt{m}\cdot ax=0$ 有两个相等的实数根，试判别$\triangle ABC$ 的形状.

证明：由原方程，得

$$(b+c)x^2-2\sqrt{m}\cdot ax+(c-b)m=0.$$

$\because$　方程有两个相等的实数根，

$\therefore\quad \Delta=(-2\sqrt{m}\cdot a)^2-4(b+c)(c-b)m=0.$

即 $4m(a^2-c^2+b^2)=0$.

$\because$ $m>0$,

$\therefore$ $a^2-c^2+b^2=0$.

即 $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形（$\angle C=90°$）.

由 $a^2+b^2=c^2$ 推出$\triangle ABC$是直角三角形（$\angle C=90°$），是根据勾股定理的逆定理.

直角三角形：right-angled triangle

例 3 已知关于 x 的方程 $x^2-2mx-3m^2+8m-4=0$.

(1) 求证：当 $m>2$ 时，原方程恒有两个实数根；

(2) 若原方程的两个实数根一个小于 5，一个大于 2，求 m 的取值范围.

解：(1) $\because$ $\Delta=(-2m)^2-4\cdot(-3m^2+8m-4)$

$$=4m^2+12m^2-32m+16$$

$$=16(m-1)^2.$$

又$\because$ $m>2$,即 $m-2>0$,$m-1\neq0$,

$\therefore$ $\Delta=16(m-1)^2>0$.

$\therefore$ 方程恒有两个实数根.

(2) 由原方程，得 $x=\dfrac{2m\pm4(m-1)}{2}$

$\therefore$ $x_1=m+2(m-1)$

$=3m-2$,

$x_2=m-2(m-1)$

$=-m+2$.

$\therefore \begin{cases}3m-2<5,\\-m+2>2\end{cases}$

或$\begin{cases}3m-2>2,\\-m+2<5.\end{cases}$

解之，得 $m<0$ 或 $m>\dfrac{4}{3}$

$\therefore$ m 的取值范围为 $m<0$ 或 $m>\dfrac{4}{3}$.

想一想：

(1) 若 a，b，c 是$\triangle ABC$的三边长，且满足 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，求证：$\triangle ABC$是正三角形.

(2) 若 a，b，c 是$\triangle ABC$的三边长，且方程 $3x^2+4(a+b+c)x+4(ab+bc+ca)=0$ 有两个相等的实数根. 求证：$\triangle ABC$是正三角形.

这两个题目的条件有什么联系，这个条件还可以怎样变化？

§12.2 一元二次方程的根与系数关系

一 已知方程的一个根，求另一个根及未知系数的值

例 1 已知方程 $3x^2-(1-\sqrt{3})x+q=0$ 有一个根是 -1，求它的另一个根及 q 的值.

解法 1: 设方程的另一个根是 x_1，

$$则\begin{cases}x_1+(-1)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}, & ①\\ x_1\cdot(-1)=\dfrac{q}{3}. & ②\end{cases}$$

由①，得 $x_1=\dfrac{4-\sqrt{3}}{3}$.

将 $x_1=\dfrac{4-\sqrt{3}}{3}$ 代入②，得 $q=\sqrt{3}-4$.

解法 2: ∵ -1 是方程的一个根，

∴ $3\times(-1)^2+(1-\sqrt{3})+q=0$.

∴ $q=\sqrt{3}-4$.

设方程的另一个根为 x_1，则

$$x_1\cdot(-1)=\frac{\sqrt{3}-4}{3}.$$

∴ $x_1=\dfrac{4-\sqrt{3}}{3}$.

> **评注：**
>
> 已知方程的一个根，求另一个根及未知系数的值，是二次方程的根与系数的关系的一个应用.
>
> 本题有两个解法，都应掌握并熟练运用.

例 2 已知关于 x 的方程 $3x^2-(2m-1)x+m=0$ 的一根比另一根的 3 倍大 1，求方程的两根及 m 的值.

解: 设方程的一个根为 x_1，则另一根为 $3x_1+1$.

$$∴\begin{cases}x_1+(3x_1+1)=\dfrac{2m-1}{3},\\ x_1(3x_1+1)=\dfrac{m}{3}.\end{cases} \quad 即\begin{cases}3(4x_1+1)=2m-1,\\ 3(3{x_1}^2+x_1)=m.\end{cases}$$