高职高专数学学习辅导教材

高等数学习题全解

（配高教·李心灿主编高等数学）

徐 兵 主审

王红丽 柳 扬 编写

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高职高专数学学习辅导教材

高等数学习题全解

（配高教·李心灿主编高等数学）

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解(配高教·李心灿主编高等数学) / 王红丽，柳扬编著 .—大连：大连理工大学出版社，2004.7
ISBN 7-5611-2571-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①王… ②柳… Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 024259 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:9.25 字数:300 千字
印数:1～6 000
2004 年 7 月第 1 版 2004 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑:王 纪 责任校对:杨 莉
封面设计:宋 蕾

定 价:12.80 元

卷首赠言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

Ideal is the beacon. Without ideal, there is no secure direction; without direction, there is no life. (Leo Tolstoy, Russian writer)

理想是指路明灯。没有理想,就没有坚定的方向;没有方向,就没有生活。(俄国作家 托尔斯泰)

Only those who have the patience to do simple things perfectly ever acquire the skill to do difficult things easily. (Friedrich Schiller, German Dramatist and poet).

只有有耐心圆满完成简单工作的人,才能够轻而易举地完成困难的事。(德国剧作家、诗人 席勒)

前言

《高等数学》是高职高专院校工科、经济等门类各专业学生主要的基础课，也是专科升本科入学考试的一门科目。它为各专业后续课程教学及以后到第一线解决实际问题提供必要的数学基础。

为了帮助广大读者学好《高等数学》，扩大课堂信息量，提高应试能力，我们编写了这本具有工具书性质的《高等数学习题全解》。

本书与李心灿主编的《高等数学》(高等教育出版社，第二版)一书相配套。习题完全按照这本书的内容顺序来组织。本习题全解的特点是针对每章习题都给出详尽的解答，注重一题多解。一些典型题给出了分析和注释，以帮助广大读者提高分析问题和解决问题的能力；对一些习题指出了读者易出错的地方，避免出错的方法，让读者听到课堂上无

法听到的“弦外之音”。出版本书的目的是方便读者对照和分析。值得提醒的是，解题能力需要亲自动手，通过亲自的实践才能逐步锻炼出来，从而不断提高水平。

本书使用了高等教育出版社出版的李心灿主编的《高等数学》中的全部习题，在此表示衷心的感谢！在本书的编写过程中得到了大连大学刘学生教授、张成教授，大连大学教务处徐晓鹏处长的热情帮助。大连大学王丽燕副教授在百忙之中审阅初稿，并给予热情鼓励，提出了很多中肯的建议。北京航空航天大学徐兵教授仔细审阅了全部书稿。在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促，编者水平有限，书中错漏之处在所难免，恳请同行和读者批评指正。

编著者

2004 年 6 月

目　录

第一章　函　　数

习题 1-1

1. 用区间表示下列范围：

(1)$x \leqslant 0$；　　(2)$-1 \leqslant x < 2$；

(3)$|x-2| < \varepsilon$；　　(4)$\bigcup(a,\delta)$。

解　(1)$(-\infty,0]$　　(2)$[-1,2)$

(3)$(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$　　(4)$(a-\delta,a+\delta)$

习题 1-2

1. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{3-x^2}$；　　(2)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$；

(3)$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；　　(4)$y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$；

(5)$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　　(6)$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(7)$y=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ x, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi。\end{cases}$

解　(1) 要使函数 y 有定义，必须使 $3-x^2\geqslant 0$ 成立，即 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$。所以函数的定义域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$。

(2) 要使函数 y 有定义，必须使$\begin{cases}x^2-3\geqslant 0\\ x^2-3\neq 0\end{cases}$成立，即 $x<-\sqrt{3}$ 或 $x>\sqrt{3}$。所以函数的定义域为$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$。

(3) 要使函数 y 有定义，分母 $1-x^2\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$。所以函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(4) 要使函数 y 有定义，必须使$\begin{cases}2+x\geqslant 0\\1-x>0\\1-x\neq 1\end{cases}$成立，即$\begin{cases}x\geqslant -2\\x<1\\x\neq 0\end{cases}$。此不等式组的解为 $-2\leqslant x<0$ 或 $0<x<1$，所以函数的定义域为$[-2,0)\cup(0,1)$。

(5) 要使函数 y 有定义，必须使 $x^2-3x+2\neq 0$，即$(x-1)(x-2)\neq 0$，$x\neq 1$ 且 $x\neq 2$，所以函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$。

(6) 要使函数 y 有定义，必须使$\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0\\1-x\neq 0\end{cases}$成立，即 $-1\leqslant x<1$，所以函数的定义域为$[-1,1)$。

(7) 此分段函数的定义域为$[0,\pi)$。

---

2. 在下列各题中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=\sin x$，$g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(4) $f(x)=|\cos x|$，$g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

(5) $f(x)=x\sqrt[3]{x}$，$g(x)=\sqrt[3]{x^4}$。

解 (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，但 $f(x)$ 的值域为$(-\infty,+\infty)$，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 的值域为$[0,+\infty)$，由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值域不同，所以它们不是同一函数。

(2) $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$。由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不同，所以它们不是同一函数。

(3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，但 $f(x)$ 的值域为$[-1,1]$，$g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$ 的值域为$[0,1]$，由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值域不同，所以它们不是同一函数。

(4) 由于 $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|=f(x)$，所以它们是同一函数。

(5) 由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，且 $g(x)=\sqrt[3]{x^4}=x\sqrt[3]{x}=f(x)$，所以它们是同一函数。

---

3. 求函数值。

(1) $f(x)=\sqrt{3+x^2}$，求 $f(4)$，$f(1)$，$f(0)$，$f(-1)$，$f(x_0)$ 和 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$。

(2)$f(x)=3x+2$,求 $f(1)$,$f(1+h)$,及$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$。

(3)$\varphi(t)=t^2$,求 $\varphi(2)$,$[\varphi(3)]^3$,$\varphi(-1)$。

(4) 设 $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,求 $\varphi(3)$,$\varphi(2)$,$\varphi(0)$,$\varphi(0.5)$ 及 $\varphi(-0.5)$。

解　(1) $f(4)=\sqrt{3+4^2}=\sqrt{19}$,$f(1)=\sqrt{3+1^2}=2$

$$f(0)=\sqrt{3+0}=\sqrt{3},f(-1)=\sqrt{3+(-1)^2}=2$$

$$f(x_0)=\sqrt{3+x_0^2}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{3+\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{3+\frac{1}{a^2}}=\frac{\sqrt{3a^2+1}}{|a|}$$

(2)$f(1)=3\times 1+2=5$,$f(1+h)=3\times(1+h)+2=3h+5$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{3h+5-5}{h}=3$$

(3) $\varphi(2)=2^2=4$,$[\varphi(3)]^3=[3^2]^3=3^6=729$,$\varphi(-1)=(-1)^2=1$

(4) $\varphi(x)$ 的定义域为$(-1,3]$,

当 $x\in(-1,0)$ 时,$\varphi(x)=2^x$,由于 $-0.5\in(-1,0]$,因此

$$\varphi(-0.5)=2^{-0.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

当 $x\in(0,1)$ 时,$\varphi(x)=2$,由于 $0,0.5\in[0,1)$,因此

$$\varphi(0)=2,\quad \varphi(0.5)=2$$

当 $x\in[1,3]$ 时,$\varphi(x)=x-1$,由于 $3,2\in[1,3]$,因此

$$\varphi(3)=3-1=2,\quad \varphi(2)=2-1=1$$

---

4. 有一块边长为 l 的正方形铁皮,在它的四角各剪去相等的小正方形,折叠后做成一个无盖的盒子,求这个盒子的容积 V 与被剪去的小正方形边长 x 之间的函数关系。

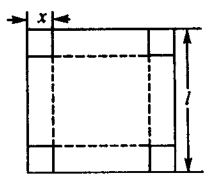

图 1-1

解　如图 1-1,折叠后的盒子是以边长为$(l-2x)$的正方形为底,高为 x 的长方体,容积为

$$V=(l-2x)^2\cdot x\qquad 0<x<\frac{l}{2}$$

---

5. 已知一物体与地平面的摩擦系数是 μ,质量是 m,设有一与水平方向成 α 角的

拉力 F，使物体从静止开始移动(图 1-2)，求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系。

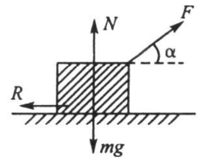

图 1-2

解　由物理学知识可知

$$\begin{cases} F\cos\alpha = N\cdot\mu \\ F\cdot\sin\alpha + N = mg \end{cases}$$

得　$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\cdot\sin\alpha} \qquad 0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$$

习题 1-3

1. 一般地，在一块水田中施用肥料越多，稻子的产量就越高，但是，如果肥料施用得过多(比如超过某一定数 x_0)，稻子也会受到毒害，使产量急剧下降，试画出水稻产量 y 作为施肥量 x 的函数的大致图形。

解　如图 1-3 所示。

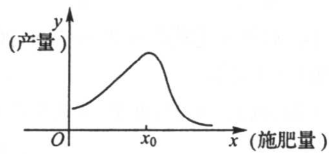

图 1-3

---

2. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些函数非奇非偶？

(1) $y = 2x^4(x^2-1)$；　　(2) $y = x + \sin x$；

(3) $y = x\cos x$；　　(4) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$；

(5) $y = x(x-1)(x+1)$；　　(6) $y = \sin x + 2\cos x$。

解　(1) 因为　$f(-x) = 2(-x)^4\cdot[(-x)^2-1] = 2x^4(x^2-1) = f(x)$

所以 $f(x) = 2x^4(x^2-1)$ 是偶函数。

(2) 因为　$f(-x) = (-x) + \sin(-x) = -(x+\sin x) = -f(x)$

所以 $f(x) = x + \sin x$ 是奇函数。

(3) 因为　$f(-x) = -x\cdot\cos(-x) = -x\cos x = -f(x)$

所以 $f(x) = x\cos x$ 是奇函数。

(4) 因为

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x)$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数。

(5) 因为

$$f(-x) = -x(-x-1)(-x+1) = -x(x-1)(x+1) = -f(x)$$

所以 $f(x)=x(x-1)(x+1)$ 是奇函数。

(6) 因为 $f(-x)=\sin(-x)+2\cos(-x)=-\sin x+2\cos x$，当 $x\neq 0$ 时，$f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=\sin x+2\cos x$ 是非奇非偶函数。

---

3. 指出下列函数的单调性：

(1) $y=3x+2$；　　(2) $y=(x-1)^2$；

(3) $y=3^x$；　　(4) $y=\tan x\ (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$。

解 (1) 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，当 $x_1<x_2$ 时

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1+2)-(3x_2+2)=3(x_1-x_2)<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$。所以函数 $y=3x+2$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上严格单调增加。

(2) 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，当 $x_1<x_2<1$ 时

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-1)^2-(x_2-1)^2=(x_1+x_2-2)(x_1-x_2)>0$$

即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数 $y=(x-1)^2$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上严格单调减少；

当 $1<x_1<x_2$ 时

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+x_2-2)(x_1-x_2)<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $y=(x-1)^2$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上严格单调增加。

(3) 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，当 $0<x_1<x_2$ 时

$$f(x_1)-f(x_2)=3^{x_1}-3^{x_2}=3^{x_2}\cdot(3^{\frac{x_1}{x_2}}-1)<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $y=3^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加；

同理，当 $x_1<x_2<0$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $y=3^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格单调增加；

显然，当 $x_1<0,x_2>0$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$ 也成立。

综上，函数 $y=3^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加。

(4) 对于任意 $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x_1)-f(x_2)=\tan x_1-\tan x_2=\frac{\sin x_1\cos x_2-\sin x_2\cos x_1}{\cos x_1\cdot\cos x_2}$$

$$=\frac{\sin(x_1-x_2)}{\cos x_1\cdot\cos x_2}$$

当 $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin(x_1-x_2)<0,\cos x_1>0,\cos x_2>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$。因此，函数 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格单调增加。

---

4. 下列函数哪些是周期函数?对于周期函数请指出其周期。

(1)$y=\cos\frac{x}{2}$；　　(2)$y=\sin 2x$；

(3)$y=x\cos x$；　　(4)$y=\sin^2 x$；

(5)$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(6)$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$。

解　(1) 由于 $\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\frac{x+4\pi}{2}=\cos\frac{x}{2}$，所以 $y=\cos\frac{x}{2}$ 是以 4π 为周期的周期函数；

(2) 由于 $\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi)=\sin 2x$，所以 $y=\sin 2x$ 是以 π 为周期的周期函数；

(3)$y=x\cos x$ 不是周期函数；

(4) 由于 $\sin^2(x+\pi)=\sin^2 x$，所以 $y=\sin^2 x$ 是以 π 为周期的周期函数；

(5) 由于 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 是以 π 为周期的周期函数；

(6) 由于

$$\begin{aligned} y&=\sin(x+2\pi)+\frac{1}{2}\sin(2x+4\pi)+\frac{1}{3}\sin(3x+6\pi)\\ &=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x \end{aligned}$$

所以 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 是以 2π 为周期的周期函数。

---

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 上的函数，验证：

(1)$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 是偶函数；

(2)$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 是奇函数。

证明　(1) 由于 $\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)$ 是偶函数。

(2) 由于

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\varphi(x)$$

所以 $\varphi(x)$ 是奇函数。

6. 设下面所考虑的函数的定义域都是对称区间 $(-l,l)$，证明：

(1) 两个偶函数之和是偶函数，两个奇函数之和是奇函数；

(2) 两个偶函数之积是偶函数，两个奇函数之积是偶函数，一个偶函数与一个奇函数之积是奇函数。

证明　(1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-l,l)$ 上是偶函数，令 $F(x)=f(x)+g(x)$，则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$$

所以 $F(x)$ 是偶函数。

若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $(-l,l)$ 上都是奇函数，令 $\Phi(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，则

$$\begin{aligned}\Phi(-x)&=\varphi(-x)+\psi(-x)=-\varphi(x)-\psi(x)\\&=-[\varphi(x)+\psi(x)]=-\Phi(x)\end{aligned}$$

所以 $\Phi(x)$ 是奇函数。

(2)

i) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-l,l)$ 上都是偶函数，令 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$，则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$$

所以 $F(x)$ 是偶函数。

ii) 若 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在 $(-l,l)$ 上都是奇函数，令 $\Phi(x)=\varphi(x)\psi(x)$，则

$$\Phi(-x)=\varphi(-x)\cdot\psi(-x)=[-\varphi(x)][-\psi(x)]=\varphi(x)\psi(x)=\Phi(x)$$

所以 $\Phi(x)$ 是偶函数。

iii) 若 $f(x)$ 是偶函数，$\varphi(x)$ 是奇函数，令 $G(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$，则

$$G(-x)=f(-x)\cdot\varphi(-x)=f(x)\cdot[-\varphi(x)]=-G(x)$$

所以 $G(x)$ 是奇函数。

习题　1-4

1. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+2}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　(3) $y=2+\lg(x+1)$。

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+2}$，得 $x=y^3-2$，从而所求反函数为 $y=x^3-2$。

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，从而所求反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$。

(3) 由 $y=2+\lg(x+1)$，得 $x=10^{y-2}-1$，从而所求反函数为 $y=10^{x-2}$

-1。

2. 写出下列函数组成的复合函数,并求复合函数的定义域:

(1)$y=\arcsin u,\ u=1-x^2$;　　(2)$y=u^2,\ u=\tan x$;

(3)$y=\sqrt{u},\ u=\sin v,\ v=2x$。

解　(1) 由于 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,与 $u=1-x^2$ 的值域$(-\infty,1]$ 的交集非空,所以它们可组成复合函数 $y=\arcsin(1-x^2)$,由此,$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$,即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$,所以复合函数定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

(2) 由于$y=u^2$的定义域为$(-\infty,+\infty)$与$u=\tan x$的值域$(-\infty,+\infty)$的交集非空,所以由它们可组成复合函数 $y=(\tan x)^2$。由此可得复合函数的定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$。

(3) 由于$u=\sin v$的定义域为$(-\infty,+\infty)$与$v=2x$的值域$(-\infty,+\infty)$的交集非空,且 $y=\sqrt{u}$ 的定义域$[0,+\infty)$与$u=\sin v$的值域$[-1,1]$的交集非空,所以它们可以组成复合函数$y=\sqrt{\sin 2x}$。由此$0\leqslant\sin 2x\leqslant 1$,即$2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$。所以复合函数的定义域为$[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}],k\in\mathbf{Z}$。

3. 下列函数由哪些简单函数复合而成?

(1)$y=\sqrt{1-x}$;　　(2)$y=\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$;

(3)$y=5(x+2)^2$;　　(4)$y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$。

解　(1) 由 $y=\sqrt{u},u=1-x$ 复合而成。

(2) 由 $y=u^2,u=\sin v,v=3x+\frac{\pi}{4}$ 复合而成。

(3) 由 $y=5u^2,u=x+2$ 复合而成。

(4) 由 $y=\sqrt{u},u=\tan v,v=\frac{x}{2}$ 复合而成。

4. 设 $f(x)=x^2,g(x)=2^x$,求 $f[g(x)],g[f(x)]$。

解　$f[g(x)]=[g(x)]^2=[2^x]^2=4^x,\ g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$

5. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试验证 $f[f[f(x)]]=f(x)$ $(x\neq 0,x\neq 1)$，并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x\neq 0,x\neq 1)$。

证明　由 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$，有

$$f[f(x)]=1+\frac{1}{\dfrac{x}{x-1}-1}=1+x-1=x$$

于是，$f[f[f(x)]]=f(x)$。由 $\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$，所以

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}-1}=1-x\quad(x\neq 0,x\neq 1)$$

习题　1-5

1. 设 $G(x)=\ln x$，证明当 $x>0,y>0$ 时，下列等式成立：

(1)$G(x)+G(y)=G(xy)$；　　(2)$G(x)-G(y)=G\left(\dfrac{x}{y}\right)$。

证明　(1)$G(x)+G(y)=\ln x+\ln y=\ln xy=G(xy)$

(2)$G(x)-G(y)=\ln x-\ln y=\ln\dfrac{x}{y}=G\left(\dfrac{x}{y}\right)$

---

2. 下列函数是否为初等函数？为什么？

(1)$y=x+2$；　　(2)$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

(3)$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ 1, & x=2;\end{cases}$　　(4)$y=\sin(3x^2+1)$；

(5)$y=\mathrm{sgn}x$(符号函数)；　　(6)$y=[x]$(取整函数)。

解　(1)$y=x+2$ 是初等函数。

(2) 由于 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 可由一个式子来表示，所以它是初等函数。

(3) 该分段函数不是初等函数。

(4)$y=\sin(3x^2+1)$ 可由 $y=\sin u,u=3x^2+1$ 复合而成，因此它是初等函数。