高等数学

（方法归类·题型分析·考研辅导）

GAODENGSHUXUE · GAODENGSHUXUE · GAODENGSHUXUE

主　编　藺小林　马菊侠

副主编　王社宽　吴云天　白云霄　王晓琴

陕西人民出版社

高 等 数 学

（方法归类·题型分析·考研辅导）

主　编:蔺小林　马菊侠
副主编:王社宽　吴云天　白云霄　王晓琴

陕 西 人 民 出 版 社

(陕)新登字 001 号

图书在版编目(C I P)数据

高等数学/蔺小林等主编. 一西安：陕西人民出版社，2002

ISBN 7-224-06262-6

Ⅰ.高... Ⅱ.蔺... Ⅲ.高等数学一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057957 号

书　　名：高等数学
作　　者：蔺小林
出版发行：陕西人民出版社 (西安北大街 131 号 邮编 710003)
印　　刷：陕西科技大学印刷厂
开　　本：787×1092 毫米 16 开 16 印张
字　　数：360 千字
版　　次：2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1—500
书　　号：ISBN 7-224-06262-6/O・5
定　　价：20.00 元

(图书如有质量问题请与陕西人民出版社发行部联系，电话:7216020)

前 言

高等数学是高等院校理工科专业学生一门重要的基础课，基于本课程在考试、后继专业课的学习以及硕士研究生入学考试等中都具有较高的要求，因此我们组织多年从事数学教学工作的骨干教师编写了这本《高等数学・方法归类・题型分析・考研辅导》，供理工科院校师生作为《高等数学》或《微积分》课程的教学参考书或考研辅导用书。

本书是集题型、解题方法、思维训练、水平测评为一体的学习用书，主要有以下几方面的特点：

1. 题型归类　我们将多年以来本科《高等数学》教学中的重点题、难点题、本科考试题、考研题，进行系统归类，使题型系统化，方法基本统一化，并在题型的变化上、解法上作了评注。因此本书非常适合作为大一学生配套复习的指导用书，也适合考研学生之用。

2. 方法归类　本书是在题型的分类上建立对解题方法进行归类，使多变的题有法可循。本书不求题海战术，而在于通过掌握数学的学习方法、思维方法以达到掌握解题方法。

3. 题型综合　本书在掌握基本知识的前提下，力图在深度、广度上拓广读者的知识面，在题型选择上注重了知识的灵活性、衔接性、多变性、综合性等特点，使读者阅读时能有一种新感受。

4. 条理性　本书在对知识点的处理上，采用网络式、表格式、比较式等特点，使之更加系统化、条理化，同时加强了知识的前后贯通，使初学者便于区分、比较、记忆及理解。

5. 实用性　本书不是题目汇编，而是以方法归类为主线，渗透着对知识点的巩固，进而加强思维训练。本书有基本题型、综合题型、多变题型，也有考试配套测验及考研模拟题，适合于多种层次的读者。

参加本书编写工作的有蔺小林、马菊侠、王社宽、吴云天、白云霄、王晓琴，最后由蔺小林统改全稿。

本书在编写过程中得到了许多老师和同仁的大力支持，陕西省大学数学教学指导委员会主任、西北工业大学信息与应用数学系博士导师叶正麟教授，封建湖教授，西北大学数学系主任、博士导师屈长征教授，窦霁虹副教授，西安电子科技大学理学院副院长王金金教授等，在百忙中审阅了本书的部分初稿，并提出了许多有益的建议，陕西科技大学数学教研室主任杨战民、任晓红等同仁给予了很多帮助，陕西人民出版社给我们以很大的支持，陕西科技大学印刷厂的领导及其工作人员付出了辛勤的劳动，在此对以上各位致以衷心的谢意。

由于编写时间仓促，水平有限，错误与不足之处，恳请广大读者及同仁赐教。

编　者

2002 年 6 月

目　录

第一章　函数与极限

一、内容提要

(一) 函数

1. 函数定义　设有变量 x 及 y，D 为数集，$\forall x \in D$ 在确定的法则之下，有变量 y 与之对应，则建立了 y 与 x 的关系，称为函数，记为 $y = f(x)$.

函数的两个要素为定义域及对应法则．

2. 分段函数　在定义域的不同区间段上有着不同的函数表达式，则为分段函数，注意区分区间的端点与分段点．

3. 复合函数　设 $y = f(u)$ 的定义域为 D，$u = \varphi(x)$ 的值域为 W，当 $D \cap W \neq \Phi$ 时，$y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数．函数关系表达为 y—u(中间)—x(自变量)，复合函数可由多个复合而成，要认清中间变量，要会复合并会分解．

4. 函数的几种特性

1° 有界性　设 $f(x)$ 的定义域为 D，$X \subset D$，$\exists M > 0$，$\forall x \in X$，使 $|f(x)| \leqslant M$，则 $f(x)$ 在 X 上有界．(或 $\exists M_1$ 及 M_2，对任意 $x \in X$ 有 $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$).

注意：有界一定指在那个范围上有界，如 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $[\varepsilon, 1]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ 上有界，在 $(0, 1]$ 上无界．

2° 单调性　$f(x)$ 的定义域为 D，$X \subset D$，$\forall x_1$、$x_2 \in X$ 且 $x_1 < x_2$，若 $f(x_1) < f(x_2)$，$(f(x_1) > f(x_2))$，则 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加(减少).

3° 奇偶性　$f(x)$ 的定义域关于原点对称，若 $f(-x) = f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数，若 $f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数．常用的两个函数的奇偶性有如下结论：偶函数与偶函数之积为偶函数；偶函数与奇函数之积为奇函数；奇函数之积为偶函数；偶函数之和为偶函数；奇数与奇函数之和为奇函数；定义在对称区间上的任一函数 $f(x)$ 都可表达成奇函数和偶函数之和，即

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

4° 周期性

5. 基本初等函数与初等函数　基本初等函数是由指数、对数、幂、三角、反三角函数构成的五大类函数．注自变量位置只有一个变量，否则为初等函数．初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算、复合运算，且能由一个式子表达的函数．分段函数一般不是初等函数，但在每一段内是初等函数．

(二) 极限

极限是一种动态，是自变量变化而引起函数的变化，如果有一定的变化趋势，就是极限问题．现将极限定义归类：

自变量 x 的变化趋势	自变量 x 的变化范围	函数 y
$x \to x_0$	$0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$	$y \to A \quad \mid y - A \mid < \varepsilon$
$x \to {x_0}^+$	$x_0 < x < x_0 + \delta$	$y \to A \quad \mid y - A \mid < \varepsilon$
$x \to {x_0}^-$	$x_0 - \delta < x < x_0$	$y \to 0 \quad \mid y \mid < \varepsilon$
$x \to \infty$	$\mid x \mid > X$	$y \to \infty \quad \mid y \mid > M$
$x \to +\infty$	$x > X$	$y \to +\infty \quad y > M$
$x \to -\infty$	$x < -X$	$y \to -\infty \quad y < -M$

在上述变化中，任意取一种自变量的变化及函数的变化就得到一种极限定义，共有 $C_5^1 C_6^1 = 30$ 种定义，其中 δ、X 都是正数，ε 与 M 为任意的。注意，极限为无穷大是极限不存在的一种，但函变化数有规律，归入极限中．

(三) 函数的连续

1. 连续的定义

定义 1 $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0$ 　　定义 2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 　　定义 3 为 $\varepsilon - \delta$ 定义　(略).

2. 检查函数连续的三个步骤：$1^\circ f(x)$ 在 x_0 点有定义； 2° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在； 3° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$； 当 3° 成立即 $f(x)$ 在 x_0 处连续，否则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点．

3. 基本初等函数在其定义域内连续，初等函数在其定义区间连续．分段函数在一段内是初等函数，所以在这一段内连续，在分段点处要专门讨论其连续性．

4. 间断点　间断点必须要求 $f(x)$ 在 x_0 点的某个去心邻域内有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，不要误认为无定义点就为间断点，例 $y = \sqrt{x - 2}$ 在 $x = 0$ 无定义，但 $x = 0$ 不是间断点．

5. 闭区间上连续函数性质(略).

二、常用计算极限方法归类

1. 极限的四则运算，若 $\lim f(x) = A, \lim f(x) = B$

则 $\lim[f(x) \begin{smallmatrix}+\\ \times\\ \div\end{smallmatrix} g(x)] = \lim f(x) \begin{smallmatrix}+\\ \times\\ \div\end{smallmatrix} \lim g(x) = A \begin{smallmatrix}+\\ \times\\ \div\end{smallmatrix} B$

注意 1° 在极限存在时，方可使用，如：$\lim\limits_{x \to 0} x \arctan \dfrac{1}{x}$ 就不能用积运算；

　2°“$\div$”中分母 $B \neq 0$；

　3° 无穷多项不能用．

2. 重要极限

基本形式：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$　即一般形式：$\lim\limits_{\square \to 0} \dfrac{\sin \square}{\square} = 1$

基本形式：$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$　或 $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$

一般形式：$\lim\limits_{\square \to 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$

3. 无穷小及有关性质：

1° 有界量与无穷小量之积为无穷小量

2° 无穷小量的等价性

熟记 $x \to 0$ 时：$\sin x \sim x$　$\mathrm{tg} x \sim x$　$\arctan x \sim x$　$\ln(1+x) \sim x$　$e^x - 1 \sim x$　$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$. 在无穷小等价代换中，有整体代换与乘积时的局部代换(加减不能代换)。

3° 无穷小与无穷大的关系

4. 用函数连续性求极限

1° 如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$；

2° 如果 $\lim \varphi(x) = a$，函数 $f(u)$ 在 $u = a$ 连续，则 $\lim f[\varphi(x)] = f[\lim \varphi(x)] = f(a)$ 极限符号与运算符号交换次序；

3° 如果 $\lim f(x) = A > 0$，$\lim g(x) = B$　则 $\lim f(x)^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)} = A^B$

5. 极限存在的充要条件　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，(左右极限存在且相等) 主要用于求分段函数分段点的极限。

6. 极限存在准则

7. 罗比塔法则(将在第三章中讲)

三、题型归类与分析　方法讨论(重点)

【题型 1　求函数定义域】

1. 如果函数表达式中含有分式，则分母不能为零。
2. 含有偶次方根，则根号下表达式大于等于零。
3. 含有对数，则真数大于零。
4. 含有正弦或余弦，则其绝对值小于等于 1。
5. 有以上几种情形，则取交集。
6. 分段函数定义域，取各分段区间的并集。
7. 对实际问题，则从实际出发考虑自变量取值范围。

例 1 设 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2}} + \arcsin(\frac{1}{2}x - 1)$ 求定义域。

解： $\begin{cases} 2 - x^2 > 0 \\ -1 \leqslant \frac{1}{2}x - 1 \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < \sqrt{2} \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$　则定义域为 $[0, \sqrt{2})$.

例 2　设 $y = f(x)$ 定义域为 $(0, 4]$ 求下列函数定义域　(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\ln x)$.

解：(1) 由 $0 < x^2 \leqslant 4$ 得：$f(x^2)$ 的定义域为 $[-2, 0) \cup (0, 2]$.

(2) 由 $0 < \ln x \leqslant 4$ 得：$\ln 1 < \ln x \leqslant \ln e^4$ 故 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(1, e^4]$.

例 3　设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$　则 $g(x) = f(2x) + f(x - 2)$ 的定义域为(　　)

(A) 无意义 (B) 在[0,2] 上有意义

(C) 在[0,4] 上有意义 (D) 在[2,4] 上有意义

解:由 $f(x)$ 表达式知 $f(x)$ 的定义域为[0,2],故 $f(2x)$ 的定义域为,$0 \leqslant 2x \leqslant 2$ 即 $x \in [0,1]$,$f(x-2)$ 的定义域为,$0 \leqslant x-2 \leqslant 2$ 即 $x \in [2,4]$,而 $g(x) = f(2x) + f(x-2)$ 为一个表达式,故 $g(x)$ 无意义,选(A).

【题型 2 求函数表达式】

这种题型的做法是找出函数框架,代入即可;或是进行变量代换。

例 4 已知 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ $(x \neq -1)$, $g(x) = 1-x$,求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解:$f(x)$ 的框架为 $f(\ \ ) = \dfrac{1-(\ \ )}{1+(\ \ )}$,从而

$$f[g(x)] = \frac{1-g(x)}{1+g(x)} = \frac{1-(1-x)}{1+(1-x)} = \frac{x}{2-x} \quad (x \neq 2)$$

同理:$g[f(x)] = 1 - f(x) = 1 - \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2x}{1+x}$ $(x \neq -1)$

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1, \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$ $g(x) = e^x$,求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解:因为 $f(\ \ ) = \begin{cases} 1 & |\ \ | < 1 \\ 0 & |\ \ | = 1 \\ -1 & |\ \ | > 1 \end{cases}$,所以 $f[g(x)] = \begin{cases} 1 & |e^x| < 1 \\ 0 & |e^x| = 1 \\ 1 & |e^x| > 1 \end{cases}$

即
$$f[g(x)] = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

而 $g(\ \ ) = e^{(\ \ )}$,所以 $g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e & |x| < 1 \\ 1 & |x| = 1. \\ e^{-1} & |x| > 1 \end{cases}$

例 6 已知 $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x (0 < x < 1)$,求 $f(x)$.

解:令 $\sin^2 x = t$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \dfrac{1}{1-\sin^2 x} - 1 = \dfrac{1}{1-t} - 1$

故 $f(t) = -2t + \dfrac{1}{1-t}$. 即 $f(x) = -2x + \dfrac{1}{1-x}$.

例 7 已知 $f(x) = x^2 + 2\lim\limits_{x \to 1} f(x)$,且 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 存在,求 $f(x)$.

解:设 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = a$,则两边取极限,得 $a = 1 + 2a$ 即 $a = -1$, 故 $f(x) = x^2 - 2$.

注:此题可变为:$f(x)$ 为连续函数且 $f(x) = 2x + 3 - \int_0^1 f(x)dx$,求 $f(x)$.

【题型 3　已知数列的递推通项，求数列极限】

这类题一般用数列极限存在的准则：单调有界数列必有极限。对于单调性及有界性判定用数学归纳法，对复杂题单调性用第三章函数单调性进行判定。而极限值计算从递推公式两边取极限求得。

例 8　设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1 + x_1}, \cdots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解：由题设易知 $0 < x_n$，且 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} < 2$，即：$0 < x_n < 2, n = 1,2,\cdots$ 故数列有界。又

$\because x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$，　$\therefore x_1 < x_2$

设 $x_{n-1} < x_n$，则

$x_{n+1} - x_n = (1 + \frac{x_n}{1 + x_n}) - (1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}) = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} > 0$，

从而数列单调增加。故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并设为 a，于是对 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ 取极限就有

$$a = 1 + \frac{a}{1 + a} \qquad a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\text{（舍去负值）}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

例 9　设 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \cdots, x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}, \cdots$，证明：数列极限存在，并求其值。

证：显然 $x_1 < x_2$，设 $x_k > x_{k-1}$，则 $x_{k+1} = \sqrt{1 + x_k} > \sqrt{1 + x_{k-1}} = x_k$　故对一切自然数 n，数列单调递增，又易见 $x_n > 0$

$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2} + 1$

$x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} < \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{2} + 1$

设 $x_k < \sqrt{2} + 1$　则 $x_{k+1} = \sqrt{1 + x_k} < \sqrt{1 + \sqrt{2} + 1} < \sqrt{2} + 1$

故数列〔x_n〕单调增加且有界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在设为 a，对 $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$ 两边取极限得：

$a = \sqrt{1 + a}$，从而 $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$（舍去负的）故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

【题型 4　n 项和的极限】

这类极限通常是放缩通项用夹逼准则 $z_n \xleftarrow{\text{缩小}} x_n \xrightarrow{\text{放大}} y_n$，$\{z_n\}\{y_n\}$ 极限存在且相等，或用定积分定义（一般不能用四则运算，因为项数随 n 变化而变化）。

例 10　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}})$.

解：$\because \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$，　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$$

【题型 5　“$\dfrac{0}{0}$”型极限计算】

求解“$\dfrac{0}{0}$”型极限的方法是：

1. 当极限式是有理分式时，进行因式分解约去因式，再用连续函数的性质求极限。

2. 当极限式是无理式时，先进行有理化（分子或分母或分子分母同时有理化），再求极限。

3. 当极限式中含有三角函数时，先进行三角恒等变形，再用重要极限，$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square} = 1$ 求极限。

4. 当极限式中含有一些已知的等价量，则用等价代换。但必须整个分子或整个分母全部代换，在乘积时可一部分代换一部分。

5. 用罗比塔法则求极限（第三章再论）。

例 11　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-1}$.

解：属于“$\dfrac{0}{0}$”且函数为有理式，因式分解：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{5}{2}$$

例 12　$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解：分子、分母同时有理化：

$$原式 = \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}$$

例 13　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^4}{x^4\sin x^4}$.

解 1：本题是含有三角函数的“$\dfrac{0}{0}$”型，用重要极限：

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x^4}{2}}{x^4\cdot 2\sin\frac{x^4}{2}\cdot\cos\frac{x^4}{2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x^4}{2}}{\frac{x^4}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{x^4}{2}} = \frac{1}{2}$$

解 2：用三角恒等式变形求：

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x^4)(1+\cos x^4)}{x^4\sin x^4(1+\cos x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{x^4}\cdot\frac{1}{(1+\cos x^4)} = \frac{1}{2}$$

解 3:用无穷小等价代换求:

$$\because 1-\cos x^4 \sim \frac{1}{2}x^8 \qquad \sin x^4 \sim x^4$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^8}{x^4 \cdot x^4} = \frac{1}{2}$$

例 14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解:此题不能用"原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{\sin^3 x}=0$"去解,因为 $x-x$ 与 $\tan x-\sin x$ 不等价,所以等价无穷小在函数的和、差形式不可以局部代换,但在函数乘积中可以代换:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}$$

注 1:此题还可用重要极限来求

注 2:用等价无穷小代换还可得到

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\mathrm{tg}x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin x^3}=\dfrac{1}{2}$;

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\ln(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

例 15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sin x^3}$.

解:此题含有根号,可先有理化,再用 $\sin^3 x$ 代换 $\sin x^3$:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

【题型 6 "$\frac{\infty}{\infty}$"型极限】

这类极限是分子分母同除"最大"的或用罗比塔法则求极限。

例 16 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+3}}{2x-\sqrt{2x^4-1}}$.

解:此题为"$\frac{\infty}{\infty}$"$(x\to+\infty)$,x^2 最大,分子分母同除 x^2:

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}}}{\frac{2}{x}-\sqrt{2-\frac{1}{x^4}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 17　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

解:此题不能用罗比塔法则求极限,分子分母同除 e^x:

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$

例 18　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)^{10}(3x+1)^{10}}{(2x+1)^{20}}$.

解:原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-\dfrac{1}{x})^{10}(3+\dfrac{1}{x})^{10}}{(2+\dfrac{1}{x})^{20}}=(\dfrac{3}{2})^{10}$(分子分母同除 x^{20})

【题型 7　"$\infty-\infty$"型极限】

用通分或有理化转化为"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$".

例 19　计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x)$.

解:(1) 先把分母看作 1,有理化分子,然后分子分母同除 x:

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{1}{2}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$$\overset{\sin x\sim x}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)}{x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$\overset{\text{罗比塔}}{=}2\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

【题型 8　"1^∞"型极限】

此类题用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 或罗比塔法则求。

例 9　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-a}{x+a})^x$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2})^n$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2x}}$;　(4) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

解:(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-\dfrac{a}{x})^x}{(1+\dfrac{a}{x})^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[(1-\dfrac{a}{x})^{-\frac{x}{a}}]^{-a}}{[(1+\dfrac{a}{x})^{\frac{x}{a}}]^a}=\dfrac{e^{-a}}{e^a}=e^{-2a}$

另解:原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{-2a}{x+a})^{x+a-a}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{-2a}{x+a})^{\frac{x+a}{-2a}}]^{-2a}=e^{-2a}$

(2) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{n})^{-n}]^{-2} = e^{-2}$

(3) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}[(1-\sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x}}]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

(4) 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\{[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}\sec\frac{\pi x}{2}}\}^{1-x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sec\frac{\pi}{2}x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\cdot\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\frac{2}{\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}}$

【题型 9　有界量与无穷小量积】

利用有界量与无穷小之积为无穷小计算。

例 20　计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}\arctan x$.

解：(1) $\because\ |\sin\frac{1}{x-1}|\leqslant 1, \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0, \therefore$ 原式 $=0$

(2) $\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}=0,\ |\arctan x|<\frac{\pi}{2}, \therefore$ 原式 $=0$

例 21　判断正误：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}=1$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2}$.

解：其中(3)(4) 正确，因为它们是“$\frac{0}{0}$”，又形式一样，用重要极限 $\lim\limits_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ 可判定。(1) 与(2) 错的原因是只看形式类似于重要极限，但不是“$\frac{0}{0}$”，(1) 为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$(有界量与无穷小量之积)，(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$(有界量与无穷小量之积)，(5) 用连续性即知极限为 $\sin 1$，(6) 错的原因是当 $x\to 0$ 时 $\sin x\sim x$，而 $x\to 0$ 时 $\frac{1}{x}\to\infty$ 不再是无穷小，不能进行等价代换，正确作法为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

【题型 10　分段函数极限、连续性讨论及其间断点类型(重点)】

因为初等函数在其定义区间内总是连续的，所以对非初等函数(如由极限定义的函

数，含有绝对值的函数及分段函数等）是我们讨论的重点。

1. 在某点 x_0 的极限（连续性）

1° 若在 x_0 的两侧函数表达式不同时，则要求出左、右极限，再利用极限存在的充要条件，检查左右极限是否相等（连续则还要比较 x_0 点的函数值）来确定是否有极限（连续）。注意：左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 中的 $f(x)$ 为 x_0 左侧（$x<x_0$）的表达式；右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中的 $f(x)$ 为 x_0 右侧（$x>x_0$）的表达式。

2° 若在 x_0 点的两侧表达式相同时，一般是直接求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$（连续则求 $f(x_0)$ 再比较极限与函数值是否相等）。特殊地如 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 及

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，虽然在 $x=0$ 的两侧函数表达式相同，但求 $x\to 0$ 的极限也要分左、右极限来讨论。

2. 间断点分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类：}\\ \text{左右极限都存在}\begin{cases}\text{可去型} & \text{左极限} = \text{右极限，即极限存在}\\ \text{跳跃型} & \text{左极限} \neq \text{右极限}\end{cases}\\ \text{第二类：}\\ \text{左右极限中至少有一个不存在}\end{cases}$$

注意：只有第一类可去型间断点才能补充或改变函数在该点的定义而成为连续点，其它类型不能做到。

3. 间断点及类型的确定

1° 求出 $f(x)$ 无定义的点 x_0，（但在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f(x)$ 应有定义），则 $x=x_0$ 为间断点；求出分段函数分段点 x_0（注意区分分段点与区间端点），这些点是可能的间断点；

2° 当 $f(x)$ 在 x_0 的两侧表达式不同时，求出 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；看其是否存在、是否相等，当 $f(x)$ 在 x_0 的两侧表达式相同时，一般是直接求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 看是否等于 $f(x_0)$，若相等为连续点，不相等为间断点，再确定类型。

例 22 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x} & x<0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}+\ln(1+x) & x\geqslant 0\end{cases}$

讨论函数 $f(x)$ 的连续性，若有间断点，并指出其类型。

解：$f(x)$ 在 $x=1$ 无定义，故 $x=1$ 为间断点。$x=0$ 是分段点，是可能的间断点，而 $f(x)$ 在 $x<0,0<x<1,x>1$ 内是初等函数，因此 $f(x)$ 在上述范围内连续，在 $x=0$ 两侧，表达式不同，要分别求左右极限。$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin\pi x}{x}=\pi$，$\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin\dfrac{1}{x^2-1}+\ln(1+x)]$