高中三年级数学

非标准化百题解答

韩珍茹 陈育艳 高金增
王云坤 岳瑞峰 江 帆 等编

FEIBIAOZHUNHUABAITIJIEDA

北京师范大学出版社

高中三年级数学

非标准化百题解答

韩珍茹　陈育艳　高金增
王云坤　岳瑞峰　江　帆　等编

北京师范大学出版社

（京）新登字 160 号

责任编辑：李卫国
封面设计：江文明　杨大海

高中非标准化百题解答编委会
主　编：张贻珍　李连保　尤大军　胡英杰
付主编：黄志宏　齐一林　王彩凤　张建华
编　委：马化民　王玲丽　田累林　李文斌　李　平
冯志刚　赵春来　周　强　周克平　陈文君
刘宝玲　殷　乐　潘森林　鲁志成

高中三年级数学非标准化百题解答

韩珍茹等编

北京师范大学出版社出版发行（邮编 100088）
河北卢龙县印刷厂印刷　新华书店首都发行所发行
开本：32 开　印张：8.75　字数：187 千
1993 年 10 月第一版　1993 年 10 月第一次印刷
印数 1—8000 册

ISBN 7—303—03284—3/G·2236　定价：5.20 元

编者的话

为了提高教学质量，帮助广大学生深入理解，灵活运用课堂所学知识，提高各种能力，《非标准化百题丛书》终于和读者见面了。

教育科研成果表明，只进行标准化题型训练和测验，并不能全面反映学生的水平。近两年来，有些科目毕业、升学考试标准化试题所占的比重逐渐降低，非标准化试题所占比重已达70%以上。为了促进学生的全面发展，本丛书编委会约请了一些有经验的优秀教师和教研员，共同编写了本丛书。

《非标准化百题解答》以国家教委新颁布的教学大纲为准绳，紧密结合各科新教材内容选题，由浅入深，由易到难。在编写内容上，按教学和考试要求注意题型多样化，安排了典型例题、基本练习题、巩固提高题三大部分，包含各种题型。各种题型均以习题的形式配有大量题目。巩固提高题配有答案、部分重点、难点题目安排了解题思路、解题方法和步骤。这实际是送给了学生一把金钥匙，便于学生举一反三，一通百通，从而起到巩固基础知识，提高解题能力的作用。

本丛书的内容，均根据不同的学年的教材内容编写，并酌情安排了学年综合训练，对于毕业年级，则安排了更为全面的综合训练，以加深对所写知识的理解，提高解题技巧。考虑到全国有数套不同版本的九年义务教育教材，其内容、结构上有

所差异，为了便于使用这些不同教材的学生使用本丛书，我们在编写时做了一些灵活变通，以满足不同的需要。

本丛书精选除“选择题”外的各种题型，并配有大量习题，各册所收习题较多，可有选择地使用。

本丛书所选题目难易适中，其中80%的题目适合一般学生使用，20%的提高型题目，供学有余力的学生提高解题技巧。

由于我们对组织编写这样一套丛书经验不足，加上时间仓促，未尽人意之处在所难免，错误疏漏之处可能存在，热切希望使用本丛书的教师和学生批评指正，以便再版时修订。

《非标准化百题解答》丛书编委会

1993年4月

目　　录

一、排列组合

(一)典型例题

例 1:证明:$P_7^7+P_5^1P_6^6+P_5^2P_5^5+P_5^3P_4^4+P_5^4P_3^3+P_5^5P_2^2=2P_8^5$

证明:$P_7^7+P_5^1P_6^6+P_5^2P_5^5+P_5^3P_4^4+P_5^4P_3^3+P_5^5P_2^2=42P_5^5+30P_5^5+20P_5^5+12P_5^5+2P_5^5=112P_5^5=\frac{1}{3}P_8^8=2P_8^5$。

例 2:解方程:$C_{(x+2)}^{(x-2)}+C_{(x+2)}^{(x-3)}=\frac{1}{10}P_{(x+3)}^3$

解:根据组合的性质 2,原方程可化为 $C_{(x+2)}^{(x-2)}=\frac{1}{10}P_{(x+3)}^3$,由组合性质 1,得 $C_{(x+3)}^5=\frac{1}{10}P_{(x+3)}^3$,$\therefore\frac{P_{x+3}^5}{51}=\frac{1}{10}P_{(x+3)}^3$,即 $x(x-1)=12$,故 $x_1=4$,$x_2=-3$(舍去),$\therefore x=4$。

例 3:用数字 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的数,按下述条件,各有多少个:(1)能被 25 整除的六位数;(2)至少有两个偶数数字的五位数;(3)大于 123 而小于 543 的数。

解:(1)若一个数是 25 的倍数,它的后两位数字应为 25,50,75,00,结合本题只能为 25,50。若末两位是 25(此时 0 不能在首位),则有 $P_4^4-P_3^3=72$ 个。

(2)符合条件的五位数可分成两类:

第一类是含有两个偶数数字的五位数,这两个偶数可以是 0,2 或 0,4,或者是 2,4。当是 0,2 或 0,4 时,各可以组成 $P_4^1P_4^4$ 个五位数;当是 2,4 时,可组成 P_5^5 个数字。

第二类是含有三个偶数数字的五位数，这样的五位数有 $C_3^2P_4^1P_4^4$ 个。

所以共有 $2P_4^1P_4^4+P_5^5+C_3^2P_4^1P_4^4=600$ 个。

(3)百位数字是 2,3 或 4 的三位数各有 P_5^2 个；百位数是 1，十位数是 3,4 或 5 的三位数各有 P_5^1 个；百位数是 1，十位数是 2 的，个位数只能是 4 或 5 才符合条件，共有 2 个；百位数是 5，十位数是 0,1,2,3 中的任一个的三位数共有 $4P_4^1$ 个；百位数是 5，十位数是 4，个位数是 0,1 或 2 的三位数共有 3 个。以上组成的三位数都符合条件的共有 $3P_5^2+3P_4^1+2+4P_4^1+3=93$ 个。

例 4：6 个同学排成一排，(1)排法有多少？

(2)甲同学必须站在左起第一个的排法有多少？

(3)甲、乙同学必须相邻的排法有多少？若甲、乙、丙三个同学必须相邻呢？

(4)甲不在排头(左起第一个为排头)的排法有多少？

(5)甲既不在排头，也不在排尾的排法有多少？

(6)甲不在排头且乙不在排尾的排法有多少？

(7)6 个人中，有 3 个男生 3 个女生，要求男女相间的排法有多少？

(8)要求甲、乙两人不相邻的排法有多少？

解：(1)6 个同学的全排列，即 $P_6^6=720$。

(2)甲同学站定某个位置，他不再参加排列，而其他 5 名同学则参予位置的排列，$\therefore N=P_5^5=5!=120$

(3)甲、乙两个同学看成一个元素与其他 4 名同学排列，方法为 P_5^5，甲、乙两同学位置可互换，排法数为 P_2^2。

$\therefore N=P_5^5\cdot P_2^2=240$

同理，3 个同学挨在一起的方法数为：

$P_4^4 \cdot P_3^3=144$

(4)可用两种方法考虑。

一是直接法。因甲不在排头，则排头从另5个同学中取，取法数为 P_5^1，剩下5个空位由剩下5个同学去排，有 P_5^5 种排法，

$\therefore N=P_5^1 \cdot P_5^5=600$

二是间接法。由总数去掉不符合要求的排列。6人的全排列数为 P_6^6，若甲在排头，排列数为 P_5^5，这是不合要求的。

$\therefore N=P_6^6-P_5^5=6!-5!=5\cdot 5!=600$

(5)也可用两种方法考虑。

方法一。头、尾由其他5个同学中任取两个，则 P_5^2；中间4个空位由剩下的3个同学和甲去排，排数为 P_4^4，

$\therefore N=P_5^2 \cdot P_4^4=480$

方法二。甲在头的排法数为 P_5^5，甲在尾的排法数也是 P_5^5，这两种情况是不合要求的，

$\therefore N=P_6^6-2P_5^5=6!-2\cdot 5!=5!\times 4=480$

(6)甲不在头且乙不在尾，即为甲在头或乙在尾的情况不符合要求，总的排法数为 P_6^6，甲在头排法数为 P_5^5，乙在尾的排法数也是 P_5^5。乙在尾的排法也是 P_5^5。若 $P_5^5+P_5^5=2P_5^5$，其中甲在头同时乙在尾的排列法重复3，因此若用总排列数 P_6^6 减去 $2P_5^5$，就多减去3个在头同时乙在尾的情况，因此，要再加上 P_4^4，$\therefore N=P_6^6-2P_5^5+P_4^4=504$。

(7)男、女相间情况：若男在排头，则为男女男女男女，即 $P_3^3 \cdot P_3^3=72$。

(8)除去甲、乙两人剩下4人先排列，排法数为 P_4^4，对其中任一排列：$\underline{\times\ \times\ \times\ \times}$，4人之间再加两头共有5个空位，甲、乙两人任进5个空位中的两个，都有甲，乙不相邻，

$\therefore \quad N=P_4^4\cdot P_5^2=480$。

例 5:从 10 名侯选人(6 男 4 女)中,选出 5 人为班委干部,要求至少有 1 个女生,至多有 3 个男生,选出的 5 个人分别担任班委会的五个职务,问有多少种选法?

解:至少有两个男生,则男生可选 2 人,3 人,4 人,5 人,但至少有 1 个女生,因此,男生不可能选 5 人,但至少有 1 个女生,因此,男生不可能选 5 人,只能选 2 人,3 人,4 人,

$\therefore C_6^2\cdot C_4^3+C_6^3C_4^2+C_6^4\cdot C_4^1$,选出 5 个人又分别担任班委的五种职务,是个排列问题,

$\therefore N=(C_6^2C_4^3+C_6^3C_4^2+C_6^4C_4^1)=P_5^5=28800$

例 6:六个不同数字之和为偶数的六位数共有多少个?

解:奇数字集合为$\{1,3,5,7,9\}$,偶数字集合为$\{0,2,4,6,8\}$,使得 6 个不同数字之和为偶数的情形有下面四种。

第一种:4 个奇数字,2 个偶数字,但有一个偶数字是 0,这种情形有 $5C_5^4C_4^1P_5^5$ 个;

第二种:4 个奇数字,2 个偶数字,每个偶数字均不为 0,这种情形有 $C_5^4C_4^3C_6^6$ 个;

第三种:2 个奇数字,4 个偶数字,其中一个偶数字是 0,这种情形有 $5C_5^2C_4^3P_5^5$ 个。

第四种:2 个奇数字,4 个偶数字,每个偶数字都不为 0,这种情形有 $C_5^2C_4^4C_6^6$ 个。

所以共有:$5C_5^4C_4^1P_5^5+C_5^4C_4^2C_6^6+5C_4^2C_4^3P_5^5+C_5^2C_4^4P_6^6=46800$ 个六位数。

例 7:从 A、B、C、D、E、F 6 个字母中选 4 个造排列,A 排在 B 前边的排列有多少种?

解:由题意,显然 A、B 在内,若不考虑 A、B 的前后顺序,则含 A、B 在内的在 4 个字母的排列数为 $C_4^2\cdot P_4^4$。

除 A、B 外，另两人位置固定，剩下的两个位置总要出现 A 在 B 前边一次，B 在 A 前边一次，$\therefore N=\dfrac{C_4^2\cdot P_4^4}{2}=72$。

(二)基本题

第一组

1. 填空：

(1)$\dfrac{(n!)^2}{P_n^{n-2}P_n^{n-3}}=$________

(2)若 $C_{18}^x=C_{18}^{x+2}$，则 $C_3^x=$______

(3)$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}\cdots\cdots+\dfrac{1989}{1990!}=$________

(4)$P_3^2+P_4^2+P_5^2+\cdots+P_{100}^2=$________

(5)$C_{97}^{94}+C_{97}^{95}+C_{98}^{96}+C_{99}^{97}=$________

(6)$P_{3n-5}^{n+5}+P_{n+10}^{3n-5}=$______

2. 求和：$M!+\dfrac{(M+1)!}{1!}+\dfrac{(M+2)!}{2!}+\cdots+\dfrac{(M+n)!}{n!}$

3. 已知 $C_n^{r-1}:C_n^r:C_n^{r+1}=1:3:5$，求 n 和 r。

4. 解方程：$C_x^{x-3}+C_x^{x-2}=15C_{x-1}^x$。

5. 证明：C_{2n}^{n}是偶数(n 为大于 1 的整数)。

第二组

1. 填空。

(1)由 0，2，3，4 可组成数字不重复的能被 3 整除的三位数的个数为______

(2)用 1，2，3，4，5 可组成比 20000 大，并且百位数字不是 3 的没有重复数字的五位数共有______个。

(3)平面 M 内有 4 个点，平面 N 内有 5 个点，这 9 个点最多能确定____条直线，______个平面，______三棱锥，________五棱锥。

(4)某年级有 6 个班，分派 3 名数学教师任教，每人两个班，不同的派法有______

(5)以长方体的顶点为顶点作出 n 个锐角三角形，则 $n=$ ______

(6)把 6 件不同的礼物分给 4 个儿童，每人至六一件，有______种不同的分法。

(7)从$\{1,2,3\cdots20\}$中，任选三个不同的数，使这三个数成等差数列，这样的等差数列最多有______个。

(8)要排一张 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出顺序节目单，任何两个舞蹈节目不相邻，有____不同的排法？

(9)甲、乙、丙、丁四个公司承包 8 项工程，甲公司承包 3 项，乙公司承包 1 项，丙，丁公司各承包 2 项，有______种承包方法。

2. 已知$A=\{x\mid 1>\log_2 x>3, x\in N\}$，

$$B=\{x\mid |x-6|>3, x\in N\}$$

(1)从集合 A 和集合 B 中各取一个元素作为直角坐标系中点的坐标，共有多少个点？

(2)从 $A\cup B$ 中取出不同三个元素组成一个三位数，且从左到右的数字要逐渐增大，这样的三位数有多少？

3. 在乒乓球单循环赛中，有两名选手都只赛了三场便因故退出比赛且它们之间也还未赛，这样共赛 84 场赛完，求原参加的人数。

4. 8 个人站队，在下列情况下，有多少种不同的站法？

(1)前排站 4 个人，后排站 4 个人；

(2)某 3 个人站队的顺序一定；

(3)排成三行。第一行，第二行都是 3 人，第三行 2 人，若甲必须在第一行，乙，丙不能同在一行。

5. 今有红色球15个，白色球13个混在 一起，从其中任取3个球，要求 取出的7个球是红、白两种颜色的球，共有多少种取法？

6. 有15名男生分配在 A、B、C 三个宿舍，其中有2名必须住在同一宿舍内，若宿舍 A 住8名，宿舍 B 位3名，宿舍 C 住4名，问有多少种不同的分配方法？

7. 七件不同奖品全部赠给竞赛的六名优胜者，如果每人至少得一件，那么有多少种赠送方法？

（三）巩固提高题

1. 填空。

(1)把6本不同的书分给三人，一人三本，一人二本，一人一本，共有分法______种。

(2)从 -11，-7，0，1，2，3，4，5 这8个数字中，每次取3个不重复的数字作直线方程 $AX+BY+C=0$ 的系数 A、B、B，则其中斜率小于0的不同直线有____条。

(3)在小于1000的非负整数中，含有数字1的数有____个。

(4)四对兄妹坐成一排，若每对兄妹不能隔开坐，则共有____种不同的坐法？

(5)平面内有10个点，其中有4个红点，6个白点，除有3个白点共线外，再若3个点共线，这样过同色的点所有的直线共有______条。

(6)有8把椅子排成两排，每排4把，有6人就坐，其中甲，乙两人必须相邻的坐法共有______种。

(7)从男乒乓球队7人和女乒乓球队5人中选出4人进行男女混合双打，共有______种不同的编排方法。

(8)将 $n+1$ 个不同的小球放入 n 个不同的盒子，不出现空盒的情况有______种。

(9)从 7 个班中抽 10 个人去作某项工作，每班至少抽一人，如果只考虑各班所抽人数，不考虑人选，有______种抽法。

(10)以正方体的顶点为顶点，作出三棱锥的个数为____。

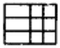
(11)从字母 a,b,c,d,e,f,g 里选五个作排列①字母 a 在 b 前也在 c 前面有____个。②a,b,c 不同时参加排列有____个。

(12)数 300030 有不同的异于 1 的正的约数有____个。

(13)用 1,2,3,4,5,6 这六个数字组成没有重复数字的，且:①比 6000 小的四位数有______个。②四位偶数有______个。③奇数位是奇数，偶数位是偶数的五位数有______个。④偶数在奇数位上的五位数有______个。⑤三个偶数连在一起的六位数有______个。⑥任意两个奇数不相邻的六位数有______个。⑦各位数字从高位到低位顺次递减的四位数有______个。

(14)已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，由集合 A 中每两个元素相加的和作为集合 B 的元素，则集合 B 的非空真子集的个数有______个。

(15)如图



矩形的个数为______。

2. 解答题。

(1)有 11 名学生，其中 5 人只会打篮球，4 人只会打排球，还有 2 人既会打篮球又会打排球，现在从这 11 名学生中选出篮球队员 4 名，排球队员 4 名，有多少种选法？

(2)语文、数学、英语、物理、体育这五科中抽四科排在上午四节课中，求：

①共有多少种排法？②数学、物理不连排。③有数学就不排物理有多少种排法？④体育不排第一节，数学不排第四节，有多少种排法？

(3)已知集合 A 和集合 B 各有 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数：

①$C\subset A\cup B$，且 C 中含有 3 个元素；

②$C\cap A\neq\varnothing$。

(4)组成一个由 10 人组成的球队，他们由七个班的学生组成，每个班至少一人，其名额分配方案共有多少种？

(5)在参加劳动的学生中，选出 4 个组长的方法种数与只选出正副组长的种数之比是 3∶2，那么参加劳动的学生总共有多少人？

(6)平面上有 6 个点，并且已知这些点为顶点的三角形有 16 个，试求这 6 个 中至少有 3 个点共线的直线条数。

(7)从 1,3,5,7,9 中任取两个数，从 0,2,4,6,8 中任取三个数，组成没有重复数字的五位数，一共可以组成多少个偶数？

(8)有两位高一学生参加高二年级的象棋比赛，比赛时，

每两个选手都对弈一局，胜者得 1 分，败者得 0 分，平局各得 $\frac{1}{2}$ 分，现知两位高一选手共得 8 分，每位高二学生得分相等且都是整数，问高二有多少学生参加比赛？

二、二项式定理

(一)典型例题

例 1:求$(x+\frac{\sqrt{2}i}{x})^8$展开式中的常数项。

解:设T_{r+1}项为常数项,$T_{r+1}=C_8^r\cdot x^{8-r}(\frac{\sqrt{2}i}{x})^r=C_8^r\cdot(\sqrt{2}i)^r x^{8-2r}$

若为常数,只须$8-2r=0$,即$r=4$,

$\therefore T_5=280$为常数项。

例 2:求$(x-\frac{1}{x})^9$展开式中含x^3项的系数。

解:$\because T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}(-\frac{1}{x})^r=C_9^r(-1)^r x^{9-2r}$,令$9-2r=3$,则$r=3$,

$\therefore T_4$为含x^3的项,其系数为$-C_9^3=-84$。

例 3:求二项式$(x-2)^9$的展开式中

(1)各项的二项式系数的和;

(2)各项系数的和。

解:(1)$C_9^0+C_9^1+\cdots+C_9^9=2^9=512$。

(2)由于$(x-2)^9$展开式各项系数的和就是$x=1$时二项式的值,所以各项系数的和为

$(1-2)^9=-1$。

从例 3 中可看出,展开式中某项的二项式系数与该项的