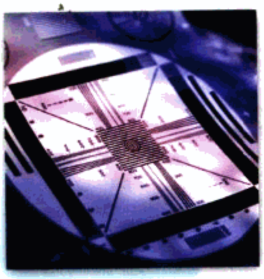
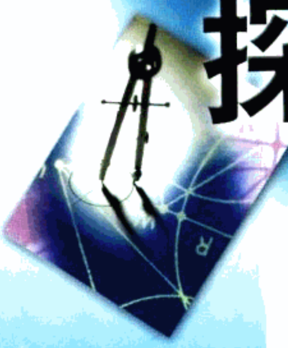
2004年

高考第二轮复习用

主体探究学习方略





总主编 单成林 张学志

本册主编 徐思新

更新理念

创新模式

学生为本

自主探究

胸有方略

胜券在握

数学

（教师用书）

山东教育出版社

主体探究学习方略

（2004年高考第二轮复习用）

数 学

（教师用书）

总 主 编：单成林 张学志

本册主编：徐思新

山东教育出版社

2003年·济南

前 言

帮助高三师生切实提高第二轮复习教学的针对性和实效性，这是本书所要达到的目标．全体编者以新的教育教学理念作指导，深入研究高考命题导向，认真总结教学的成功经验，精心设计，精心运作，创造了第二轮复习用书的新体例，为教学实践提供了新思路、新模式．

第一，重新构建知识体系．各分册都打破教材的章节界限，根据知识的纵横联系进行梳理整合、延伸拓展，增加新的知识链条，重构新的知识体系，进行专题教学，以便增强学生对知识把握的系统性、综合性和整体性，为学生提取、迁移和灵活应用知识奠定坚实的基础．

第二，注重学习方法指导．本书不仅通过对典型例题的分析，指导学生掌握解题的具体方法技巧，而且对分析和解决问题的通则通法进行系统整理．不仅指导学生掌握学科的特有方法，而且指导学生掌握各科共有的一般方法．目的是不仅让学生学会，而且让学生会学．

第三，注重思维能力的培养．各分册都采用多种形式，给学生留有自主学习的空间，尽量增加习题的思维含量，提高思维的层次，以便有效地培养学生的思维品质，提高学生的思维能力．

第四，合理配置教学的能力目标．本书所设置的栏目都有明确的功能定位，并覆盖高考的全部能力要求，且由低层次能力向高层次能力逐级提升；在兼顾低、中、高三个层次能力培养的前提下，侧重培养中、高层次能力，特别注重培养学生的创新能力和实践能力．

第五，注重提高练习的实效．本书的练习不仅采用套题形式，而且穿插于各个栏目之中，把知识复习、方法指导和例题演练有机结合起来，从而增强了练习的针对性和自觉性．成套练习既有快速跟进的随堂训练，也有采用考试方式的正规训练；既有针对综合能力测试的试卷，也有针对单科考试的试卷．从而增强了训练的灵活性、规范性和普适性．

第六，为师生互动搭建平台．本书所有分册都印制成学生用书和教师用书，既给学生发挥主体作用留下空间，又给教师发挥引领作用留有余地．使用本书必须转变教学观念，改革教学方式．

由于水平和时间所限，难免错误和疏漏，恳请读者批评指正．

编　者

2003 年 9 月

说 明

本书按知识专题和方法专题划分，全书共设18个专题，每个专题的栏目及其功能是：

【高考导向】回顾近几年高考，展望预测2004年高考，旨在让学生对本专题在高考中的地位有所认识，以增强复习的针对性.

【知识重构】以核心概念和主干知识为重点，按知识的纵向、横向联系进行整合，在整合的基础上建构知识网络，旨在使学生能够从整体上把握知识，并加深对知识的理解，提高掌握知识的熟练程度和灵活运用知识的能力.

【灵活应用】栏目多数专题分为三个层次："走进生活"，意在让学生了解实际生活中的数学问题，培养学生应用所学知识解决实际问题的能力；"方法探索"，是从学法、教法、解题方法规律上进行探索指导，培养学生科学的学习方法；"例题演练"，精选典型例题，引导学生按解题规律进行分步练习，以收举一反三、触类旁通之功效.

【探究创新】选用新材料，创设新情景，以开放式的设问提出深层次问题，引导学生自主探究，主要培养学生的探究精神和创新能力，培养和提高学生的学习潜能.

【能力测评】分A、B两卷，设在每专题之后，定时、定量、定分，用考试方式进行严格的正规训练，以检测专题的复习效果.

为了适应高考，书中还设计了三份"模拟训练"(配有参考答案)，模拟训练按高考题的题型、题量、分值和能力要求编写，旨在考查学生综合运用所学知识分析和解决问题的能力.

编 者

2003年9月

《主体探究学习方略》

编写委员会

主　　任　李广春

副 主 任　石胜明　张学志　单成林

委　　员　（按姓氏笔画排序）

马利杰　王立华　王汝序　王来旭　石胜明

仲宇尧　刘宝之　李广春　张　青　张学志

李宪臣　杭长庆　单成林　周建军　季　涛

郭金靖　徐思新　徐　勇　翟远杰

总 主 编　单成林　张学志

本册主编　徐思新

副 主 编　李士坤　张则国　刘有路　郭　勇

编　　者　李士坤　李书安　李中华　李建国

刘有路　郭　勇　徐思新　徐艳秋

谢大鹏　卜　倩　冯杰放　张则国

陈晓丹　张玉环

目 录

专 题 一

集合与简易逻辑

高考导向

集合与简易逻辑是高中数学教材的开篇内容，集合论是现代数学的重要基础，数学的概念与推理都离不开逻辑．集合语言、逻辑语言的掌握体现了高中数学发展符号意识这一重要目标．符号语言的交流能力是思维简洁、准确表述的具体体现，在高中数学各章节都有广泛的应用．

近几年来，几乎每年都有考查集合的题目，一般情况下都是客观题，虽然很少在本单元单独出现解答题，但解答题中往往应用集合与逻辑知识，分值一般在5%～10%之间．

考试重点放在熟练掌握基本概念、基本运算上，充要条件在高考中要求在理解这一层次．由于数学是逻辑性很强的学科，它离不开各种等价与非等价的变换与推理，充要条件在高中各章中都有所体现，所以充要条件是高考几乎每年必考的内容之一，一般以客观题形式出现，多为容易题，有时出现中等难度的题目．

试题频繁出现了对集合的考查，主要以两种方式考查：一是集合本身的知识，主要涉及集合的表示，集合的关系和运算，以及通过文氏图来解一些抽象集合关系的问题；二是考查集合语言和集合思想在各类数学问题中的应用，如求定义域，方程与不等式的解集，排列组合问题，解析几何中的曲线间的相交问题等．集合与对应的思想，等价转化的思想都是重要的数学思想，在复习中应以强调．

知识重构

(一) 梳理整合

1．集合：

(1) 集合中元素的特性

确定性、互异性、无序性．

(2) 集合的表示方法

列举法、描述法、文氏图法．

(3) 元素与集合的关系

若元素 x 是集合 A 的元素，记作 $x\in A$；否则 $x\notin A$．

(4) 集合之间的关系

子集：若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）．

真子集：若 $A\subseteq B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$，（或 $B\supsetneqq A$）

相等：若 $A\subseteq B$，且 $B\supseteq A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$．

(5) 集合的运算

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$．

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$．

补集：$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$．

(6) 集合的性质

子集的性质：$A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，传递性（即，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$）．

交集的性质：$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$．

并集的性质：$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$．

补集的性质：$A\cup\complement_U A=U$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$\complement_U(\complement_U A)=A$．

(7) 空集 $\varnothing$ 是一个特殊的集合，是任何集合的子集，在解题中要注意对空集的讨论．

2．简易逻辑：

(1) 命题

可以判断真假的语句叫做命题．

(2) 逻辑联结词

“或”、“且”、“非”，“或”，“且”的理解即集合中的“并”，“交”，对“非”的理解是“否定”的意思，即集合中的“补”．

① 逻辑联结词中的“或”相当于集合中的“并集”

它与日常用语中的“或”含义不同．日常说“或”是两个中任选一个，不能都选；而逻辑联

结词中的"或"可以是两个都选,但又不是两个必须都选,而是两个中至少选一个.

② 逻辑联结词中的"且"相当于集合中的"交集",即两个必须都选.

③ 逻辑联结词中的"非"相当于集合在全集中的补集.

(3) 命题的分类

① 简单命题:不含逻辑联结词的命题.

② 复合命题:由简单命题与逻辑联结词构成的命题.

(4) 命题真假的判定方法

(真值表)

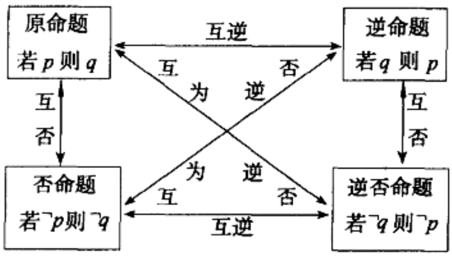
(5) 四种命题的表示形式

原命题:若p则q;逆命题:若q则p.

否命题:若$\neg p$则$\neg q$.

逆否命题:若$\neg q$则$\neg p$.

(6) 四种命题之间的关系



(7) 充分条件

如果A成立,那么B成立,即$A\Rightarrow B$,这时我们就说条件A是B成立的充分条件.

(8) 必要条件

如果B成立,那么A成立,即$B\Rightarrow A$,这时我们就说条件A是B成立的必要条件.

(9) 充要条件

若$A\Rightarrow B$且$B\Rightarrow A$,那么我们就说A是B成立的充分而且必要条件,简称充要条件.

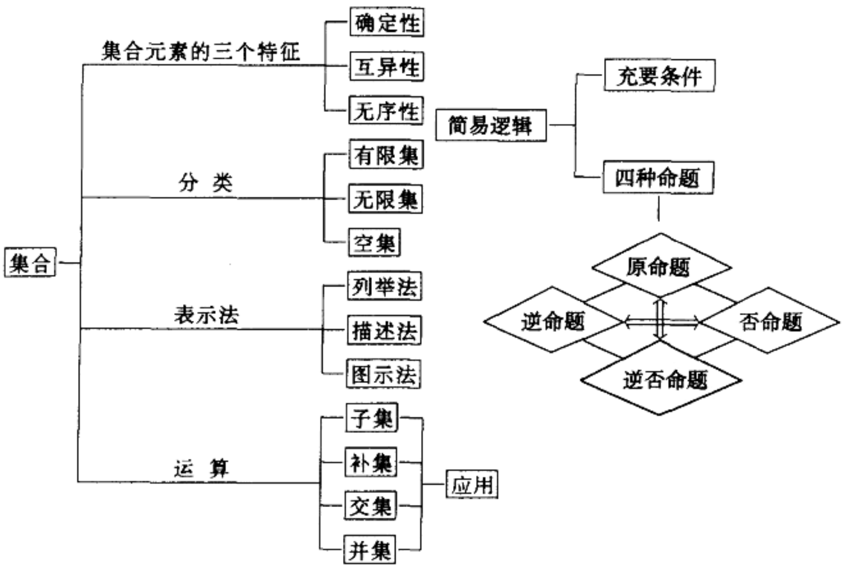
(10) 充要条件的回答方式有四种

充分必要条件、充分不必要条件、必要不充分条件、既不充分也不必要条件.

(11) 充要条件要注意与简易逻辑知识内容相联系

从集合的观点看:① 若集合$p\subseteq q$,则p是q的充分条件;② 若集合$q\subseteq p$,则p是q的必要条件(即q是p的充分条件);③ 若$p\subsetneqq q$,则p是q的充分不必要条件;④ 若$q\subsetneqq p$,则p是q的必要不充分条件;⑤ 若$p=q$,则p、q互为充分必要条件;⑥ 若$p\not\subseteq q$且$q\not\subseteq p$,则p是q的既不充分又不必要条件.

(二) 构建网络



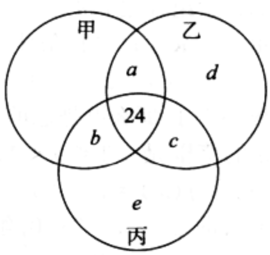
主体操

灵活应用

(一) 走进生活

我们生活中遇到的物和事，许多都可用集合表示，或用集合解决；推理当然离不开逻辑，因此可以说，集合与逻辑就在我们日常生活中，请看：

1. 某班有 50 人，学校开了甲、乙、丙三门选修课，选修甲这门课的有 38 人，选修乙这门课的有 35 人，选修丙这门课的有 31 人，兼选甲、乙两门的有 29 人，兼选甲、丙两门的有 28 人，兼选乙、丙两门的有 26 人，甲、乙、丙三门均选的有 24 人，问：此班三门均未选的有多少人？

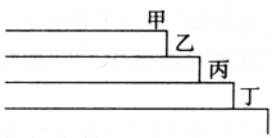


解：如右图，选甲、乙而不选丙的有 $a=29-24=5$(人)，选甲、丙而不选乙的有 $b=28-24=4$(人)，选乙、丙而不选甲的有 $c=26-24=2$(人)，仅选了乙的有 $d=35-24-a-c=4$(人)，仅选了丙的有 $e=31-24-b-c=1$(人)，至少选了一科的人数是：甲 $+d+c+e=45$(人)，故三门均未选的人数为 $50-45=5$(人).

2.

趣题游戏

这是一个有趣的智力游戏(如图)



老师为了测试甲、乙、丙、丁四名学生的分析推理能力，拿了五顶式样相同但颜色不同的帽子.

老师告诉他们，五顶帽子中有两顶是白色，其余三顶分别是红色、黄色和蓝色. 老师让四名学生依次坐在四级台阶上，叫他们闭上眼睛，替每人戴上一顶帽子，再让学生们张开眼睛，并判断自己头上戴的帽子的颜色.

结果却出人意料. 虽说坐在后面的人看得见前面的人所戴帽子的颜色，但甲、乙、丙三人看了看并想了想，都摇头说猜不出来. 丁坐在最前面，他看不到别人的帽子，但他却猜出了自己所戴帽子的颜色.

丁是如何判定自己帽子的颜色呢？

如果丁这样思考：

"甲坐得最高，能看到其余三人的帽子，他却猜不出自己所戴的帽子的颜色. 由此推断他一定看到前面有人戴着白色帽子. 因为，如果前面的人都戴杂色帽的话，那么他就猜出自己一定戴了白帽子. 而乙，他对甲的想法应该是清楚的，但他也不能判定自己所戴帽子的颜色. 为什么呢？

假设乙看到前面的两人(丙、丁)戴的帽子都是杂色的，那么他由甲的推断知道自己和丙、丁中一定有一个戴了白帽子，从而他就能断定自己所戴帽子为白色的了. 而他却不能做出上述断定，那么原因只有一个——他看到前两人中有人戴了白帽.

再说丙，他也是个聪明人，可他为什么也猜不到呢？理由只能是一个，就是他看到了丁头上戴着白帽."

就这样，丁从众人的否定中对自己的帽色做出了断定.

上面的游戏可以推广到多个人，但杂色帽要比人数少一顶，而白帽至少要两顶. 只是无论结论是肯定的还是否定的，思维都必须符合一定的规律.

想一想：还有哪些与集合和逻辑有关的问题？请你写出来.

(二) 方法探索

1. 集合

(1) 正确掌握集合的确定性、互异性和无序性. 判断一些事物是否构成集合要注意确定性，解决集合运算等问题要特别注意互异性.

(2) 要搞清楚集合的元素是什么？是函数关系中的自变量，还是因变量，还是曲线上的点.

(3) 搞清"$\in$, $\notin$"(元素与集合的关系)与"$\subseteq$, $\not\subseteq$, $\subsetneqq$"(集合与集合关系)的应用区别.

(4) 在进行集合的子，交，并，补运算时，要重视数形结合(数轴，坐标，文氏图)和等价

转化思想的应用.

(5) 掌握以下重要结论

① $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$

② $A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$

③ 含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集, 2^n-1个真子集.

④ 集合运算的两个恒等式

$\complement_U A\cup\complement_U B=\complement_U(A\cap B)$

$\complement_U A\cap\complement_U B=\complement_U(A\cup B)$

(6) 集合与数列的联系

若集合中的元素为正整数,则集合的某些性质可渗透到数列中去.

如:若集合 $P=\{x\mid x=3m+1,m\in\mathbf{N}^*\}$, $Q=\{y\mid y=5n+2,n\in\mathbf{N}^*\}$,求 $P\cap Q$. 可化归为数列问题:

已知数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n=3n+1$, ($n\in\mathbf{N}^*$),数列$\{b_n\}$的通项为: $b_n=5n+2$, ($n\in\mathbf{N}^*$). 求由$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中相同项且顺序不变构成的新数列$\{C_n\}$.

(7) 集合与排列组合的联系

求与集合中元素的个数问题,常与组合数有关:如 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的子集的个数为: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$,真子集有 2^n-1 个,非空子集有 2^n-1 个,非空真子集有 2^n-2 个.

(8) 集合与一元二次方程的解或二次函数的联系

利用两个集合的交集或并集的概念,可转化为求方程的解或求某些参数的值,或求某些函数的公共值域等问题.

例如:设集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$, $B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,若 $A\cap B=\{-3\}$,求实数 a 的值.

解: $\because$ $A\cap B=\{-3\}$, $\therefore$ $-3\in B$,故 $a-3=-3\Rightarrow a=0$ 或 $2a-1=-3\Rightarrow a=-1$,当 $a=0$ 时, $A=\{0,-1,3\}$, $B=\{-3,-1,1\}$, $A\cap B=\{-3,1\}$与 $A\cap B=\{-3\}$矛盾,经检验知: $a=-1$ 满足题意.

2. 简易逻辑

(1) 利用真值表判断复合命题的真假.

(2) 正确写出四种命题的不同形式,其一要善于把原命题分解成"若 p 则 q"的形式,其二是对常用关联词进行否定.

一些常用词语的否定

原词语	都是	任意两个	所有的	任意	至多 n 个	或
否定词语	不都是	某两个	某些	某个	至少 $n+1$ 个	且

(3) 对直接证明一个具有否定形式的命题较困难时,可转化为它的等价命题来证,"$A\Rightarrow B$"与"$\neg B\Rightarrow\neg A$"是等价的;"$B\Rightarrow A$"与"$\neg B\Rightarrow\neg A$"是等价的,反证法的思想即如此,这也体现了转化思想的应用.

(4) 判断 p 与 q 的关系($p\Rightarrow q$, $p\Leftarrow q$, $p\Leftrightarrow q$). ① 若 p 与 q 之间的关系是间接的,可以用"$\Rightarrow$","$\Leftarrow$","$\Leftrightarrow$"建立 p 与 q 之间的"关系链". ② p 与 q 的关系还可以通过满足"p""q"的元素组成集合的包含关系去判断,如:条件甲: $a\in\mathbf{R}$, $|a|<1$,条件乙:二次方程 $x^2+(a^2-1)x+(a-2)=0$ 有一个根大于 1,另一个根小于 1,那么甲是乙的什么条件? 满足甲的 a 的范围是 $-1<a<1$,满足条件乙的 a 应有:令 $f(x)=x^2+(a^2-1)x+(a+2)$, $f(1)<0$,即 $a^2+a-2<0$,解得 $-2<a<1$,显然 $-1<a<1$ 一定满足 $-2<a<1$,所以甲是乙的充分不必要条件. 一般地,若满足"p"的元素的集合是 A,满足"q"的元素的集合是 B,当 A 是B 的真子集时, p 是 q 的充分不必要条件;当 B 是 A 的真子集时, A 是 B 的必要不充分条件;当 $A=B$ 时, p 是 q 的充要条件;当 A 不是B 的子集, B 也不是 A 的子集时, p 既不是 q 的充分条件,也不是必要条件.

(5) 对逻辑联结词中"非"的理解是重点又是难点

逻辑联结词中"非"的含义有否定的意思. 求一个命题"p"的复合命题是"非 p",需要对正面叙述的词语进行否定,要注意正面词语与否定词语分别所确定的集合的交集为$\varnothing$,其并集为全集. 如"等于"的否定是"不等于","大于"的否定是"不大于","都是"的否定为"不都是","至少有一个"的否定是"一个也没有","$x=a$ 或 $x=b$"的否定是"$x\neq a$ 且 $x\neq b$"等.

(6) 四种命题中,否命题与命题的否定是不同的

否命题是对形式为"若 p 则 q"的命题,把

"若$\neg p$则$\neg q$"叫做它的否命题，就是既否定条件又否定结论；而命题的否定是只否定结论，对"若 p 则 q"形式的命题的否定是"若 p 则$\neg q$". 如："若 $x^2+y^2=0$，则 x, y 全为 0"的否命题是"若 $x^2+y^2\neq 0$，则 x、y 不全为 0"，而它的否定是"$x^2+y^2=0$，则 x, y 不全为 0".

对于复合命题"r 且 s"与"r 或 s"的否定应是"$\neg r$ 或$\neg s$"与"$\neg r$ 且$\neg s$".

(三) 例题演练

例 1 设集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0, x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0, x\in \mathbf{R}\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的值.

命题意图：本题主要考查学生条件转化，集合讨论，计算等综合解题能力.

思路分析：首先解出集合 A，应用 $A\cup B=A$ 的转化条件$B\subseteq A$，对 B 分情况讨论.

解：$\because$ $A=\{x\mid x^2+4x=0, x\in \mathbf{R}\}$，

$\therefore$ $A=\{-4,0\}$，$\because$ $A\cup B=A$，$\therefore$ $B\subseteq A$

当 $B=A$，即 $B=\{-4,0\}$时，

由一元二次方程的根与系数关系，得

$\begin{cases}-2(a+1)=-4\\ a^2-1=0\end{cases}$ 解之得 $a=1$.

当 $B=\varnothing$，即方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无实数解时，$4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8<0$ 解得 $a<-1$.

当 $B=\{0\}$，即方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两个相等的实数根且为零时.

$\begin{cases}8a+8=0\\ a^2-1=0\end{cases}$解得 $a=-1$

当 $B=\{-4\}$时，即需

$\begin{cases}8a+8=0\\ 16-8(a+1)+a^2-1=0\end{cases}$ 无解

综上所述，知若 $A\cup B=A$，则 $a\leqslant -1$ 或 $a=1$.

解题回顾：由 $A\cup B=A$ 转化为$B\subseteq A$ 是解本题的关键. 另外在求出 $A=\{0,-4\}$后，应分别从 $B=A$，$\{0\}$，$\{-4\}$，$\varnothing$四种情况下求 a.

例 2 已知 $p:\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q: x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

命题意图：本题主要考查集合与逻辑的综合应用.

思路分析：首先计算出条件 p、q，然后求出$\neg p$，$\neg q$，得出关系式求解.

解：由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ 得：$1-m\leqslant x\leqslant 1+m$ $(m>0)$

所以："$\neg q$"：$A=\{x\in \mathbf{R}\mid x>1+m$ 或 $x<1-m, m>0\}$

由$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$ 得：

$-2\leqslant x\leqslant 10$，所以

"$\neg p$"：$B=\{x\in \mathbf{R}\mid x>10$ 或 $x<-2\}$.

由$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要而不充分条件，知：

$A\subsetneqq B\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 1-m\leqslant -2\\ 1+m\geqslant 10\end{cases}\Rightarrow m\geqslant 9$

故 m 的取值范围是 $m\geqslant 9$.

解题回顾：$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件，则$\neg q$ 确定的元素的集合是$\neg p$ 确定的元素的集合是真子集.

例 3 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=p^n+q(p\neq 0, q\neq 1)$，求数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件.

命题意图：本题主要以数列为载体，考查学生的逻辑知识，提高学生的综合解题能力.

思路分析：本题是先给出的数列前 n 项和，于是利用 a_n 与 S_n 的关系找出通项公式，然后再用等比数列的定义求解，从而就找出充要条件.

解：$n=1$ 时，$a_1=S_1=p+q$，$n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p^{n-1}(p-1)$，$\because$ $p\neq 0$，$p\neq 1$，$\therefore$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{p^n(p-1)}{p^{n-1}(p-1)}=p$. 若$\{a_n\}$为等比数列，则$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p$，$\therefore$ $\dfrac{p(p-1)}{p+q}=p$. $\because$ $p\neq 0$，$\therefore$ $p-1=p+q$，$\therefore$ $q=-1$. 这是$\{a_n\}$为等比数列的必要条件. 再证 $q=-1$ 是$\{a_n\}$为等比数列的充分条件. 当 $q=-1$ 时，$a_1=p-1$，也适合 $a_n=p^{n-1}(p-1)$. $\therefore$ $a_n=p^{n-1}(p-1)(n\in \mathbf{N}^*)$. 则$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p(n\in \mathbf{N}^*)$，$\therefore$ $\{a_n\}$是等比数列，

$\therefore$ $q=-1$ 是$\{a_n\}$为等比数列的充要条件.

解题回顾：解题时，离不开命题的不断转化，在这些转化过程中，应注意其充分性、必要性、充要性.

有关充要条件的证明一般有两种证法：一是分必要性、充分性两步，二是利用充要条件来证. 在分必要性、充分性两步证时，不要把必要性和充分性证明颠倒了，一般地是 A 成立的充要条件是 B，由 $A\Rightarrow B$ 是证必要性，由 $B\Rightarrow A$ 是证充分性.

例 4 在下列两个命题 A、B 中，要使一个成立，另一个不成立，求实数 a 的取值范围. 命题 A：方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个相异

负根；命题 B：方程 $4x^2+4(a-2)x+1=0$ 无实根.

命题意图：本题主要考查逻辑知识中命题的否定，分类讨论，恒等变型等重要知识、思想和方法，提高学生的分析问题和解决问题的能力.

思路分析：解法 1，分 A 成立，B 不成立和 A 不成立，B 成立两种情况讨论. 解法 2，求出 A、B 都成立时 a 的范围然后分情况求解.

解法 1：① A 成立，B 不成立.

即：方程 $x^2+ax+1=0$，有两个相异负根.

方程 $4x^2+4(a-2)x+1=0$，有实根.

$\therefore \begin{cases}\Delta_1=a^2-4>0\\-a<0\end{cases}$

且 $\Delta_2=[4(a-2)]^2-4\times4\times1\geqslant0$.

$\therefore \begin{cases}a>2,\\a\geqslant3 \text{ 或 } a\leqslant1.\end{cases}$ $\therefore a\geqslant3$.

② A 不成立，B 成立，由 $x_1\cdot x_2=1$ 对 A 讨论分三种情况：一是 A 中有两正根，二是 A 中有两等根，三是 A 中无实根.

$\therefore \begin{cases}\Delta_1>0,\\x_1+x_2>0,\\\Delta_2<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta_1=0,\\\Delta_2<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta_1<0,\\\Delta_2<0.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a^2-4>0,\\-a>0,\\16(a-2)^2-16<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2-4=0,\\16(a-2)^2-16<0,\end{cases}$

或 $\begin{cases}a^2-4<0,\\16(a-2)^2-16<0.\end{cases}$ 解之，得 $1<a\leqslant2$.

综上所述，a 的取值范围是 $1<a\leqslant2$ 或 $a\geqslant3$.

解法 2：A：$\begin{cases}\Delta_1>0,\\x_1+x_2<0,\\x_1x_2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2-4>0,\\-a<0,\\1>0.\end{cases}$ 解之，得 $a>2$.

B：$\Delta_2=16(a-2)^2-16<0$，即 $1<a<3$.

所以 A 成立，B 不成立时，a 的取值范围为 $a\geqslant3$；

当 A 不成立，B 成立时，a 的取值范围是 $1<a\leqslant2$，

综上，得 $a\geqslant3$ 或 $1<a\leqslant2$.

解题回顾：上述给出了两种解法，解法 1 运用了分类思想，而解法 2 比较简捷明了，运用了补集思想.

探究创新

(一) 探究示范

问题：设集合 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1, x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$，问是否存在自然数 k、b，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$？证明你的结论.

探究：假设存在 k，b 使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，结合条件推理论证，若求出 k，b 的值，说明存在，否则 k、b 不存在.

解析：要使 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$，须 $A\cap C=\varnothing$，且 $B\cap C=\varnothing$. 由 $\begin{cases}y^2=x+1,\\y=kx+b.\end{cases}$ 可得 $k^2x^2+(2kb-1)x+b^2-1=0$. 当 $k=0$ 时，有解 $x=b^2-1$，不合题设要求. 当 $k\neq0$ 时，$\Delta_1=(2kb-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$，从而 $b>\dfrac{4k^2+1}{4k}=\dfrac{1}{4}\left(4k+\dfrac{1}{k}\right)\geqslant\dfrac{1}{4}\cdot4=1$

$\therefore b>1$. ①

由 $\begin{cases}4x^2+2x-2y+5=0,\\y=kx+b.\end{cases}$ 可得 $4x^2+2(1-k)x+5-2b=0$，$\Delta_2=4(1-k)^2-16(5-2b)<0$. $b<\dfrac{20-(k-1)^2}{8}\leqslant\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}$. ②

由①②知 $1<b<\dfrac{5}{2}$. $\therefore b=2$. 将 $b=2$ 代入①、②两式，得到 $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<k<1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $k=1$.

解题回顾：如果由①②直接得到 $\dfrac{4k^2+1}{4k}<\dfrac{20-(k-1)^2}{8}$，则得到一个一元三次不等式. 大部分同学至此受阻. 其实，如果我们注意到 $\dfrac{4k^2+1}{4k}=k+\dfrac{1}{4k}>1$，而 $\dfrac{20-(k-1)^2}{8}\leqslant\dfrac{20}{8}$，就可直接得到 $b=2$，从而解出 $k=1$. 这种解法中利用了基本不等式及 k、$b\in\mathbf{N}^*$ 进行估值起到了关键作用.

此题若利用数形结合的方法，比较直观.

A 中抛物线在 y 轴上截距为 -1，1，$b\in\mathbf{N}^*$. 若 $b=1$，$A\cap C\neq\varnothing$，B 中抛物线在 y 轴上截距为 $\dfrac{5}{2}$，若 $b\geqslant3$，则 $\begin{cases}4x^2+2x-2y+5=0,\\y=kx+b.\end{cases}$ 知 $4x^2+(2-2k)x+5-2b=0$，$\Delta=4[(1-k)^2+4(2b-5)]\geqslant4[(1-k)^2+4]\geqslant16>0$，$A\cap C\neq\varnothing$，故 $b=2$（以下同原解法），但切不可"由图可知"而一笔带过.

(二) 自主探究

问题：a、$b\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{(x,y)\mid x=n, y=na+b, n\in\mathbf{Z}\}$. $B=\{(x,y)\mid x=m, y=3m^2+15, m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant144\}$，是否存在 a、b，使① $A\cap B\neq\varnothing$，② $(a,b)\in C$ 同时成立？

解析：设 $P(n, na+b)\in A\cap B$，则应有 $na+b=3n^2+15$，把它看作是关于 (a,b) 的二元一次方程，此直线上至少有一点满足 $a^2+b^2\leqslant144$，即到原点距离

$\leqslant 12$，至少需此直线到原点距离 $d=\dfrac{3n^2+15}{\sqrt{1+n^2}}\leqslant 12$，$(n^2-3)^2\leqslant 0$，从而 $n=\pm\sqrt{3}$，但它不是整数，故答案是否定的.

能力测评(A)

(45 分钟　100 分)

一、选择题（本题共 8 个小题，每小题 6 分，共 48 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-1>0\}$，$B=\{x\mid \log_2 x>0\}$，则 $A\cap B$ 等于(A).

A. $\{x\mid x>1\}$

B. $\{x\mid x>0\}$

C. $\{x\mid x<-1\}$

D. $\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$

2. 设集合 $M=\{x\mid x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则(B).

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

3. 满足 $\{1\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4\}$ 的集合 M 有(C).

A. 5 个　　B. 6 个

C. 7 个　　D. 8 个

4. “$a=1$”是“函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π”的(A).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分条件也非必要条件

5. 函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$ 是单调函数的充要条件是(A).

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$

C. $b>0$　　D. $b<0$

6. 已知 a,b 为两条不同的直线，α,β 为两个不同的平面，且 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则下列命题中的假命题是(D).

A. 若 $a/\!/b$，则 $\alpha/\!/\beta$

B. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $a\perp b$

C. 若 a,b 相交，则 α,β 相交

D. 若 α,β 相交，则 a,b 相交

7. $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的(C).

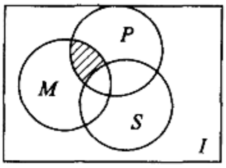
A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

8. 如图，I 是全集，M、P、S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是(C).



A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(\complement_I S)$

D. $(M\cap N)\cup(\complement_I S)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.）

9. 设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid \cos\dfrac{x}{2}>0,x\in\mathbf{R}\}$. 则 $A\cap B$ 的元素个数为 $\underline{1}$ 个.

10. 集合 $M=\{1,x,x^2-x\}$ 中的 x 不可以取的值是 $\underline{0,1,2,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

11. 设集合 $A=\{x\mid |x|<4\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$，则集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=\underline{[1,3]}$.

12. 在空间中，① 若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；

② 若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中，逆命题为真命题的是 $\underline{②}$.（把符合要求的命题序号都填上）

三、解答题（本大题共两小题，每小题 14 分，共 28 分，解答应写出文字说明、证明过程

或演算步骤.)

13. 已知 R 为全集,$A=\{x\mid\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\}$,$B=\{x\mid\frac{5}{x+2}\geqslant1\}$,求$\complement_R A\cap B$.

解:由已知 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}4$.

因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数,所以 $3-x\leqslant4$.

由$\begin{cases}3-x\leqslant4,\\3-x>0.\end{cases}$解得 $-1\leqslant x<3$.

所以 $A=\{x\mid-1\leqslant x<3\}$.

由$\frac{5}{x+2}\geqslant1$,解得 $-2<x\leqslant3$.

所以 $B=\{x\mid-2<x\leqslant3\}$.

于是$\complement_R A=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant3\}$,

故$\complement_R A\cap B=\{x\mid-2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

14. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$,$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$,且 $A\cup B=A$,$A\cap C=C$,求实数 a,m 的值.

解:$x^2-3x+2=0$ $\therefore$ $A=\{1,2\}$. $\because$ $A\cup B=A$. $\therefore$ $B\subseteq A$.对于集合 B 中的一元二次方程的判别式 $\Delta_1=a^2-4(a-1)=(a-2)^2\geqslant0$. $\therefore$ $B\neq\varnothing$.

又 1 满足方程 $x^2-ax+(a-1)=0$. $\therefore$ 当 $a=2$ 时,$B=\{1\}$.当 $a\neq2$ 时,集合 B 中有两个元素,另一个一定是 $x=2$,由韦达定理知 $a=3$.所以 $a=2$ 或 $a=3$.

$\because$ $A\cap C=C$,$\therefore$ $C\subseteq A$.

$\therefore$ C 分为两种情况:$C=\varnothing$和 $C\neq\varnothing$.

(1) 当 $C=\varnothing$时,方程 $x^2-mx+2=0$ 无实根,$\Delta_2<0$.

即 $m^2-8<0$,即 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

(2) 当 $C\neq\varnothing$时,又分为三种情形.$c=\{1\}$.$c=\{2\}$.$c=\{1,2\}$.

① 若 $C=\{1\}$或$\{2\}$时应有 $\Delta_2=0$,即 $m=\pm2\sqrt{2}$,此时方程的解是$\{\sqrt{2}\}$或$\{-\sqrt{2}\}$不符合条件.

② 若 $C=\{1,2\}$时,应有 $\Delta_2>0$,即 $m>2\sqrt{2}$或 $m<-2\sqrt{2}$.由韦达定理知 $m=3$.

综上所述:m 的值为 $m=3$ 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

能力测评(B)

(45 分钟　100 分)

一、选择题(本大题共 8 个小题,每小题 6 分,共 48 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

1. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$,集合 $M=\{(x,y)\mid\frac{y-3}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$,那么集合$\complement_I M\cap\complement_I N$ 等于(B).

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

2. 若集合 $M=\{y\mid y=2^{-x}\}$,$P=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$,则 $M\cap P=$(C).

A. $\{y\mid y>1\}$　　B. $\{y\mid y\geqslant1\}$

C. $\{y\mid y>0\}$　　D. $\{y\mid y\geqslant0\}$

3. 已知集合 $A\cap B=\{a,b\}$,$A\cup B=\{a,b,c,d\}$,则符合条件的不同集合 A、B 共有(B).

A. 3 对　　B. 4 对

C. 8 对　　D. 16 对

4. 函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 为奇函数的充要条件是(D).

A. $ab=0$　　B. $a+b=0$

C. $a=b$　　D. $a^2+b^2=0$

5. 条件 p:方程 $f(x)=x^2+(a-1)x+1=0$ 在区间$(0,2)$上有两个根;条件 q:$\Delta\geqslant0$,且 $f(0)>0$,$f(2)>0$,那么 q 是 p 的(B).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 非充分也非必要条件

6. 在下列四个结论中,正确的有:(C).

(1) $x^2>4$ 是 $x^3<-8$ 的必要充分条件

(2) 在$\triangle ABC$ 中,"$AB^2+AC^2=BC^2$"是$\triangle ABC$ 为直角三角形的充要条件

(3) 若 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a^2+b^2\neq0$",是"a,b 全不为零"的充要条件

(4) 若 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a^2+b^2\neq0$"是"a,b 不全为零"的充要条件

A. (1)(2)　　B. (3)(4)

C. (1)(4)　　D. (2)(3)

7. 若集合 $S=\{y\mid y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $S\cap T$ 是(A).

A. S　　B. T

C. $\varnothing$　　D. 有限集

8. 定义集合 A 与B 的运算:$A\cdot B=\{x\mid$

$x\in A$, $x\in B$, 且 $x\notin A\cap B\}$, 则 $(A\cdot B)\cdot A$ 等于(B)

A. A　　　　B. B

C. $A\cap B$　　　　D. $A\cup B$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

9. 已知全集 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$, 集合 $A=\{(x,y)\mid \frac{y-1}{x^2-1}=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)\mid y=x^2, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$. 则 $(\complement_U A)\cap B=\underline{\{(-1,1),(1,1)\}}$.

10. 三个实数既可用集合 $\{1,\frac{a}{b},b\}$ 表示,又可用集合 $\{0,a+b,b^2\}$ 表示,则 $a^{2003}+b^{2004}$ 的值为 $\underline{\ 1\ }$.

11. 已知全集 $I=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$, 集合 $A=\{(x,y)\mid \frac{y+3}{x+1}=-1\}$, 集合 $B=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$, 若 $A\cup B=B$, 则实数 k 的值为 $\underline{-1}$, 实数 b 的值为 $\underline{-4}$.

12. 有下列四个命题:

① "若 $xy=1$, 则 x、y 互为倒数"的逆命题;

② "面积相等的三角形全等"的否命题;

③ "若 $m\leqslant 1$, 则 $x^2-2x+m=0$ 有实根"的逆否命题;

④ "若 $A\cap B=B$, 则 $A\subseteq B$"的逆否命题

其中真命题的代号是<u>①②③</u>

三、解答题(本大题共两小题,每小题 14 分,共 28 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

13. 设原命题是"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a=b,c=d$, 则 $a+c=b+d$."写出它的逆命题,否命题和逆否命题,并分别说明它们的真假.

解:逆命题:已知 a,b,c,d 是实数,若 $a+c=b+d$, 则"$a=b,c=d$".

否命题:"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a\neq b$, 或 $c\neq d$, 则 $a+c\neq b+d$".

逆否命题:"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a+c\neq b+d$, 则 $a\neq b$ 或 $c\neq d$".

由等式性质知,原命题为真;由 $3+5=2+6$, 但 $3\neq 2, 5\neq 6$, 说明逆命题为假,由 $5\neq 7$, 但 $5+4=7+2$, 说明否命题为假,逆否命题为真,也可如下说明:若 $a+c\neq b+d$, 可分两种情况:(1) $a\neq b$, 于是命题为真,(2) $a=b$, 从而指出, $c\neq d$(否则 $a+c=b+d$), 命题也为真.

14. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=a+1\}$, 集合 $B=\{(x,y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=30\}$, 若 $A\cap B=\varnothing$, 求实数 a 的值.

解: $A=\{(x,y)\mid y=(a+1)x-2a+1$(去掉点 $(2,3)$)$\}\neq\varnothing$

$\because A\cap B=\varnothing$, $\therefore B=\varnothing$ 或 $\begin{cases}B\neq\varnothing\\ A\text{ 与 }B\text{ 无公共点}.\end{cases}$

(1) 当 $a=1$ 时, $B=\varnothing$, $\therefore A\cap B=\varnothing$

(2) 当 $a\neq 1$ 时, $B\neq\varnothing$, $\therefore B=\{(x,y)\mid (a+1)x+y=\frac{30}{a-1}\}$

即 $B=\{(x,y)\mid y=-(a+1)x+\frac{30}{a-1}\}$

$\because A\cap B=\varnothing$

$\therefore$ 两直线 $y=(a+1)x-2a+1$(去掉点 $(2,3)$)与 $y=-(a+1)x+\frac{30}{a-1}$ 平行或直线 $y=-(a+1)x+\frac{30}{a-1}$ 过点 $(2,3)$.

① 若两直线平行时,有 $\begin{cases}a+1=-(a+1)\\ -2a+1\neq\frac{30}{a-1}\end{cases}$

$\therefore a=-1$.

② 若直线 $y=-(a+1)x+\frac{30}{a-1}$ 过点 $(2,3)$ 时,

有 $3=-2(a+1)+\frac{30}{a-1}$, $\therefore 2a^2+3a-35=0$,

$\therefore a=\frac{7}{2}$ 或 $a=-5$.

综上所述 $a=\pm 1, \frac{7}{2}, -5$.

主体探

专题二

函数的图象及性质

高考导向

函数是高中数学最重要的内容之一，相关的知识点多面广，运动与变换，数形结合，分类讨论等数学思想方法体现既有深度又有广度，是历年数学高考的重点，每年这方面的高考试题往往两至三道客观题(如 2003 年的 3，5 小题)和一道解答题(如 2003 年第 19 题)，分值占整个试卷的 15%左右．

函数考查的重点内容有：函数的定义，函数的要素，求反函数，证明函数的奇偶性与单调性，二次函数，指数函数，对数函数的特征等．

函数知识是形成函数思想，数形结合思想和等价转化等重要数学思想方法的基础，复习时应以函数为载体，注重培养和运用换元，化归，数形结合与分类讨论等重要的数学思想和方法．

随着对实际应用问题的重视，以函数为主线的联系实际的应用题成为高考命题的趋向，以函数为主体应用数学知识解决问题的能力要求将逐年上升．因此，可以预测：函数与导数、最值、不等式、数列、三角、几何等知识的综合题还将以主观题的形式出现，并且将作为中、高档题或压轴题．

知识重构

(一) 梳理整合

1．函数的概念

(1) 函数的定义：如果 A、B 都是非空数集，那么 A 到 B 的映射 $f: A\to B$，就叫做 A 到 B 的函数．

(2) 构成函数的三要素：定义域、对应法则、值域．

(3) 函数的三种表示方法：列表法、解析法、图象法．

2．函数的主要性质指的是函数的定义域，值域，奇偶性，单调性，周期性．

3．函数的奇偶性，单调性，周期性一览表：

	奇偶性	单调性	周期性
定义	对于定义域内的任意 x 都有 $f(-x)=f(x)$ $[f(-x)=-f(x)]$，则 $f(x)$ 是偶(奇)函数.	对给定区间 D 上任意 x_1, x_2，如果 $x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$，则函数 $f(x)$ 为这个区间 D 上的递增(减)函数.	设 T 为非零常数，对函数定义域内的一切 x，如果总有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则函数 $f(x)$ 是周期函数.
判断方法	定义或定义的等价形式 $f(-x)=\pm f(x) \Leftrightarrow f(-x)\mp f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1$ $(f(x)\neq 0)$	(1) 定义 (2) 复合函数判断法 (3) 导数法 (4) 图象法	定　义

续表

	奇偶性	单调性	周期性
几何性质	(1) 奇函数的图象关于原点对称; (2) 偶函数的图象关于y轴对称.	增(减)函数图象上任意两点$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$连线的斜率都大于(小于)零.	每隔 T 个单位,图象重复出现.
性质	(1) 在公共定义域上两个奇(或偶)函数的和差为奇(偶)函数; (2) 在公共定义域上两个奇(偶)函数的积商为偶函数; (3) 函数 $f(x)$与函数 $af(x)$, $\frac{1}{f(x)}$,有相同的奇偶性.	(1) 两个增(减)函数的和为增(减)函数; (2) 一个增(减)函数与一个减(增)函数的差是增(减)函数; (3) 互为反函数的两个函数有相同的单调性; (4) 如果 $y=f(u)$和 $u=g(x)$单调性相同,那么 $y=f[g(x)]$是增函数;如果 $y=f(u)$和 $u=g(x)$单调性相反那么 $y=f[g(x)]$是减函数.	(1) 如果总有 $f(x+a)=f(x-a)$成立则函数是周期函数且 $T=2a$ 是它的一个周期; (2) 若 T 为函数的周期那么 nT $(n\in N^*)$为函数的周期.

4. 画函数图象的一般步骤:

(1) 确定函数的定义域;(2) 化简函数的表达式;(3) 讨论函数的图象性质;(4) 利用基本函数画出所需的图象.

5. 函数图象的变换主要有:平移、对称、伸缩三种基本变换.

(1) 平移变换

① $y=f(x\pm a)(a>0)$的图象,可由 $y=f(x)$的图象向左("+")或向右("-")平移 a 个单位得到;

② $y=f(x)\pm b(b>0)$的图象可由 $y=f(x)$的图象向上("+")或向下("-")平移 b 个单位得到.

(2) 对称变换

① $y=f(-x)$的图象与 $y=f(x)$的图象关于y轴对称;

② $y=-f(x)$的图象与 $y=f(x)$的图象关于x轴对称;

③ $y=-f(-x)$的图象与 $y=f(x)$的图象关于原点对称;

④ $y=f^{-1}(x)$的图象与 $y=f(x)$的图象关于$y=x$ 对称;

⑤ $y=f(|x|)$的图象是由 $y=f(x)$的图象中y轴右侧的部分加上这部分关于 y 轴的对称图象构成;

⑥ $y=|f(x)|$是由 $y=f(x)$的图象中x轴上方的部分加上其余部分关于 x 轴的对称图象构成;

⑦ 对于函数 $y=f(x)$,若对定义域内的一切 x 都有$f(x+m)=f(m-x)$,则 $f(x)$的图象本身关于直线$x=m$ 对称.

(3) 伸缩变换

① $y=af(x)(a>0)$的图象,可由 $y=f(x)$的图象上每点横坐标不变,纵坐标伸长$(a>1)$或缩短$(0<a<1)$到原来的 a 倍得到;

② $y=f(ax)(a>0)$的图象可由 $y=f(x)$的图象上每点纵坐标不变,横坐标伸长$(a<1)$或缩短$(a>1)$到原来的$\frac{1}{a}$倍得到.

6. 初等函数的定义、图象和性质