中国数学奥林匹克委员会 编译

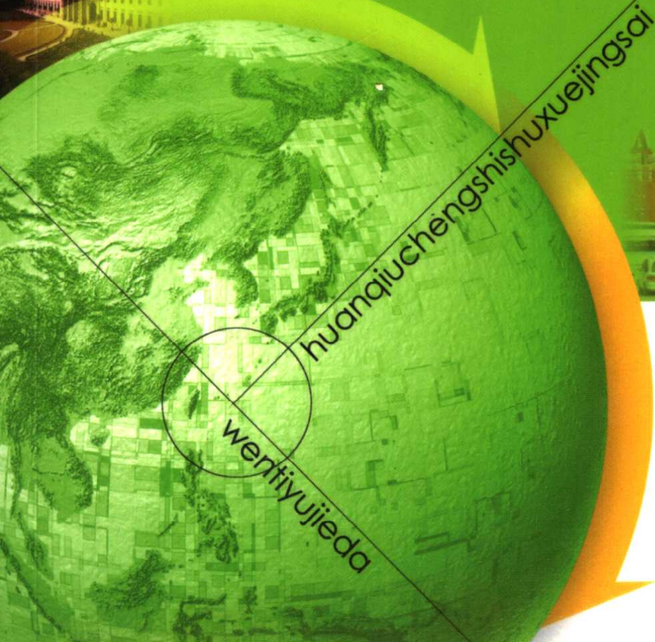
环球城市数学竞赛

问题与解答 2

Mathematics

huanqiuchengshishuxuejingsai

wentiyujieda



开明出版社
kaimingpress

中国数学奥林匹克委员会 编译

Mathematics

环球城市数学竞赛

问题与解答 ②

huanqiuchengshishuxuejingsai

wentiyujieda

开明出版社
Kaiming press

图书在版编目（CIP）数据

环球城市数学竞赛问题与解答②/中国数学奥林匹克委员会编译. —北京：开明出版社，2004.4

ISBN 7-80133-988-6

Ⅰ.环...　Ⅱ.中...　Ⅲ.数学课—中学—解题

Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 028562 号

封面设计： 羽　人

责任编辑： 赵　菲

环球城市数学竞赛问题与解答②

编译　中国数学奥林匹克委员会

出版　开明出版社（北京海淀区西三环北路 19 号）

印刷　保定市印刷厂

发行　新华书店北京发行所

开本　850×1168 毫米 1/32 开　印张 11.625　字数 324 千

版次　2004 年 5 月第 1 版　　2004 年 5 月第 1 次印刷

书号　ISBN 7-80133-988-6/ G·889

印数　00 001～10 000 册

定价　17.00 元

序

本书是环球城市数学竞赛考题及其解答的中译本，包含了从 1980 年至 1998 年春季的全部试题与解答. 从 1980 年至 1997 年春季的全部试题与解答译自四本书：Mathematics Competition Enrichment Series 6，3，7，15. International Mathematics Tournament of the Towns. Published by The Australian Mathematics Trust：Questions and Solutions 1980 to 1984；1985 to 1989；1990 to 1993，all edited by P. J. Taylor；1994 to 1997，edited by P. J. Taylor and A. M. Storozhev. 从 1997 年秋季至 1998 年春季的全部试题与解答译自 P. J. Taylor 教授提供的英文材料.

环球城市数学竞赛从 1980 年开始，每年举行一次. 从 1982 年开始，改为每年举行两次. 这项竞赛分低年级（初中二年级和三年级）与高年级（高中一年级和二年级）两种. 在多数年份每次考试共进行两场，它相当于国际数学竞赛的一试及二试. 第一试每次四道题或五道题，第二试每次六道题或七道题，每道题上标出它的分数值，它们不完全相同.

环球城市数学竞赛的中心组织委员会主席和出题的教授都是由俄罗斯人担任. 参加者以城市为单位，其条件为：一、要交纳费用，其数额由该城市总人口来核算；二、前几名的考卷要全部译成英文. 从 1998 年秋季开始，亚洲部分地区委托台湾九章出版社董事长孙文先先生管理. 到目前为止，世界上参赛城市已有一百个左右.

中国的中学生数学竞赛活动开始于 1956 年. 在华罗庚教授的主持下，只在若干大城市中断断续续地进行了六届. 1967 年后，就被迫全部停止了. 从 1978 年起，又重新开始. 这一活动的范围，日益扩大到全国. 这是一项很好的中学生课外活

动，增加了中学同学学习数学的兴趣，提高了中学生的数学素质，增进了彼此间的友谊．同时，也对中学数学教师的提高与进修起到了很好的促进作用．不少数学家与中学老师都为之付出了心血与汗水．

从 1985 年开始，我国参加了国际数学奥林匹克竞赛（这项竞赛起始于 1959 年，在国际上，是中学生最重要的一项国际竞赛活动）．在 1986 年，我国选手的成绩就名列前茅．以后，多次取得国际数学奥林匹克竞赛国家团体总分第一，很多选手取得个人金牌、银牌和铜牌．我国还参加了少数地区国际数学竞赛，同样取得了很好的成绩．

关于数学竞赛的业务本身，我们虽然有很强的指导老师及取得了很好的竞赛成绩，但对数学竞赛考题的提出方面，我们与一些国家还有差距．我们应该认真地向他们学习．尤其要向数学竞赛有悠久历史积累与很强实力的俄国同行学习．这就是我们组织翻译这本书的主要目的．

本书是由九位中国数学奥林匹克委员会的委员分别编译而成，他们也都是中国数学奥林匹克委员会聘任的国家级教练．按姓氏笔画为序是：

王杰（北京大学），

许以超（中国科学院数学研究院），

李成章（南开大学），

张筑生（北京大学），

常庚哲（中国科学技术大学），

黄玉民（南开大学），

舒五昌（复旦大学），

裘宗沪（中国科学院数学研究院），

潘承彪（北京大学）.

他们在编译过程中，对于多数问题，采用了原始解答，但也作了不同程度的修改，因此本书并非完全按照原文作对应翻译，而是依据原文编译，作出了适合我国读者的解答．所以上述九位教授灌注了更多的心血．另一方面，在修改的过程中，或许会出现错误，还请读者指正．

中国数学奥林匹克委员会主席

王　元

中国科学院数学研究院

2003 年 10 月 25 日

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS

1991 初中组秋季赛问题

初级卷

1 给定两个圆. 第 1 个圆的中心在第 2 个圆上, A 和 B 是两圆的交点. 第 2 个圆过 B 点的切线与第 1 个圆相交于 C 点. 求证: $AB = BC$. (3 分)

2 给定 4×4 方格棋盘和一枚"飞棋", 飞棋的每一步允许从所在格出发跨过邻格到达同行除邻格外的任一格, 或者跨过邻格到达同列除邻格外的任一格. 试问该棋子能否从棋盘上某一格出发经过 16 步遍访棋盘的每一格回到原出发格? (3 分)

3 试证:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{1991}}}}}$$

$$+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{1991}}}}}}=1.$$

(3 分)

4 6 个数被放置在给定圆周上, 满足条件: 设 A,B,C 是顺时针方向一个紧接一个排在圆周上的三个数, 则 $A=|B-C|$. 已知所放置的所有数的总和等于 1. 试求所有这些数. (4 分)

高级卷

1 某王国有 32 名骑士. 其中某些骑士是另外骑士的仆从. 每名仆从最多只能有一名主人. 每名主人必须比他的任何一名仆从富有. 如果一名骑士拥有不少于四名仆从, 那么他就被封为贵族. 试求贵族数目的最大可能值. (该王国遵循这样的法律: 我的仆从的仆从不是我的仆从.) (4 分)

2 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 并且 $\angle BAC = 20°$. 点 D 在 AB 边上, 并且 $AD = BC$. 试求 $\angle BCD$. (6 分)

3 给定 4×4 方格表. 能否从小于 100 的正整数中选出 16 个不同的数填入方格表 (每格一数), 使得每一行所填数的乘积和每一列所填数的乘积统统等于同一个数? (8 分)

4 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: $a_0 = 9$, $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ 试证: a_{10} 的十进制表示中有多于 1000 个数字 9. (8 分)

5 某个 9×9 棋盘由 81 个单位方格组成. 给其中某些单位方格染色, 使得任意两个染色方格中心的距离大于 2.

(a) 试举一个有 17 个染色方格的例子; (3 分)

(b) 试证染色方格的数目不能超过 17. (5 分)

6 凸八边形 $ABCDEFGH$ 的各内角相等. 并且各边交错相等, 即 $AB = CD = EF = GH$, $BC = DE = FG = HA$. (我们称这类八边形为准正则八边形.) 对角线 $AD, BE, CF, DG, EH, FA, GB$ 和 HC 将该八边形的内部区域分成若干部分. 考察含八边形中心的那个部分. 如果该部分是八边形, 那么这个中心八边形也是准正则的 (显而易见). 对此情形, 我们再作相应的对角线, 考察新的中心图形 $\cdots\cdots$ 这样继续作下去, 直到中心图形不再是八边形时停止. 试证: 如果此过程不能停止, 那么初始八边形是正八边形. (8 分)

7　n 名儿童希望将 m 块相同的巧克力糖分成分量相等的 n 堆. 规定每块巧克力糖至多被分成两部分.

(a)　如果 $m=9$, 那么对怎样的 n, 所述要求能实现？

(5 分)

(b)　更一般地，对怎样的 n 和 m, 所述的要求能实现？

(7 分)

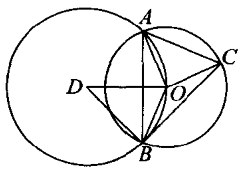
1991 初中组秋季赛解答

初级卷

1 解 参看下图. 设 O 是第 1 个圆的中心, D 是第 2 个圆的中心. 我们有 $DB = DO$, 因而 $\angle DBO = \angle DOB$. 因为 $OD \perp AB$, $DB \perp BC$. 所以

$$\angle ABO = 90^\circ - \angle DOB = 90^\circ - \angle DBO = \angle CBO.$$

又因为 $OA = OC$, 所以 $\angle OAC = \angle OCA$. 因此 $\angle BAC = \angle BCA$, $BA = BC$.



2 解一 如下页表一所示, 题目提出的任务可以完成.

解二 如下页表二显示了另一枚逐格前进的棋子, 遍访棋盘各格, 回到起点的整个旅行路线. 我们在表二的各行作同样的置换, 使得置换后的各行都是"飞棋"所允许的路线. 这样就得到表三.

然后, 我们又用类似的做法, 对表三的各列作同样的置换, 使得置换后的各列也都是"飞棋"所允许的路线, 这样, 我们得到了"飞棋"遍访 16 格, 最后回到起点的允许路线, 如表一所示.

9	15	10	8
3	1	4	2
12	14	11	13
6	16	5	7

表一

1	2	3	4
16	7	6	5
15	8	9	10
14	13	12	11

表二

3	1	4	2
6	16	5	7
9	15	10	8
12	14	11	13

表三

3 解 我们记

$$x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{1991}}}},$$

则题目所要求的等式可验证如下：

$$\frac{1}{2+x}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1+x}{2+x}=1.$$

4 解 设圆周上的六个数，按顺时针顺序依次记为 A, B, C,

D, E, F. 所有这些数都是非负的. 不妨设 A 不小于其他五个数. 因为 $A=|B-C|$, 所以或者 $A=B-C$, 或者 $A=C-B$. 可分两种情形讨论: (1) 若 $A=B-C$, 则 $B=A$, $C=0$; (2) 若 $A=C-B$, 则 $C=A$, $B=0$. 对前一情形, 因为 $B=|C-D|=D$, $D=|E-F|$, $F=|A-B|=0$. 所以 $A=B=D=E$, $C=F=0$. 对后一情形, 同样可知 $A=C=D=F$, $B=E=0$. 对两种情形, 都有一对处于相对位置的数等于 0, 其余的数相等. 因为六个数之和等于 1, 所以四个非 0 的数都等于 $\frac{1}{4}$.

高级卷

1 解 最富的骑士不是其他骑士的仆人. 因此, 至多有 31 位骑士可能成为其他骑士的仆人. 每位至多有一位主人, 因此至多有 7 位贵族. 下面指出 7 位贵族的情形是可能的. 假定 32 位骑士, 各位拥有的财产互不相同. 按财产递减的顺序, 用 $1,2,\cdots,32$ 给骑士们编号. 对于 $n=1,5,9,13,17,21,25$, 让 n 作为 $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ 的主人. 于是, 恰好有 7 名贵族.

2 解 参看下页图, 依次在 AB 上取 E 点, 在 AC 上取 F 点, 再在 AB 上取 G 点, 使得

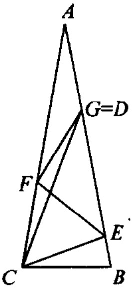
$$BC=CE=EF=FG.$$

于是

$$\angle CEB=\angle CBE=80^\circ,\quad \angle ECF=\angle EFC=60^\circ,$$
$$\angle FEG=\angle FGE=40^\circ,\quad \angle GFA=20^\circ=\angle GAF.$$

因而

$$AG=GF=FE=EC=CB.$$



我们看到：G 与 D 是同一点．因为 ΔCEF 是等边三角形，所以

$$FG = FE = FC.$$

又因为 $\angle GFA = 20°$, 所以

$$\angle GCF = 10°, \quad \angle BCD = 70°.$$

3 解 如下页表 1 所示，我们首先将四种花色的 A, K, Q, J 牌共 16 张放置在 4×4 方格表的各个格子中 (每格一张牌), 使得每一行的四张牌的花色和字母各不相同，每一列也如此．约定用 1,2,3, 4 分别表示字母 A, K, Q, J, 约定用 1,5,6,7 分别表示黑桃、红桃、方块、梅花这四种花色．然后如下页表 2 所示，将每个格子所放牌代之以表示该牌字母的数与表示该牌花色的数之乘积．这样，每行每列所放数的乘积都等于 $1\times2\times3\times4\times1\times5\times6\times7 = 5040$.

4 解一 我们有

$$a_{n+1}+1 = 3a_n^4+4a_n^3+1 = (a_n+1)^2(3a_n^2-2a_n+1).$$

下面将对 n 归纳证明这样的论断：a_n 的十进制表示最后的 2^n 个数字都是 9．首先，a_0 的最后一位数字是 9．假定 a_n 的最后 2^n 位数字都是 9．则 a_n+1 能被 10^m 整除．此处 $m=2^n$．于是，

♠A	♡J	◇K	♣Q
♡Q	♠K	♣J	◇A
◇J	♣A	♠Q	♡K
♣K	◇Q	♡A	♠J

表 1

1	20	12	21
15	2	28	6
24	7	3	10
14	18	5	4

表 2

能被 $(a_n+1)^2$ 整除的 $a_{n+1}+1$ 必能被 10^{2m} 整除. 因而 a_{n+1} 的最后 $2m=2^{n+1}$ 位数字都是 9. 至此完成了归纳证明. 特别地, a_{10} 的最后 $2^{10}=1024$ 位数字都是 9.

解二 将对 n 归纳证明以下论断:

$$a_n \equiv -1, \quad (\bmod 10^m).$$

此处 $m=2^n$. 对于 $n=0, m=2^n=1$, 显然有

$$a_0 = 9 \equiv -1, \quad (\bmod 10).$$

假定对于 n, 有整数 b_n, 使得 $a_n = 10^m b_n - 1$. 则有

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n^3(3a_n+4) \\ &= (10^m b_n - 1)^3(3(10^m b_n - 1)+4) \\ &= (10^m b_n - 1)^3(3\times 10^m b_n + 1). \end{aligned}$$

将 $(10^m b_n - 1)^3$ 展开得到

$$10^{3m}b_n^3 - 3\times 10^{2m}b_n^2 + 3\times 10^m b_n - 1 \equiv 3\times 10^m b_n - 1, \quad (\bmod 10^{2m}).$$