

伯拉基斯著

中學數學教學法

第三冊 代數教學法



人民教育出版社

中學數學教學法

第三冊 代數教學法

伯拉基斯著

吳品三譯

人民教育出版社出版

中學數學教學法 第三冊 代數教學法

著 者： 伯 拉 基 斯
譯 者： 吳 品 三
責任校對： 陳 守 勳
出版者： 人 民 教 育 出 版 社
(營業許可證出字第 二 號)
發行者： 新 華 書 店
印刷者： (見 正 文 最 後 頁)

書號：參0145 1953年12月原 版
字數：104,300 1954年5月北京第一次印刷
1— 20,000
定價4,800元

中學數學教學法第三冊目次

第一章 中學代數課的一般內容	1
§ 1. 作為科學的代數上的革命觀點	1
§ 2. 學校代數課發展的一些主要系統, 作為教學科目的代數	2
§ 3. 學校代數課的學習目的, 代數課的教學大綱	5
§ 4. 代數的教學文獻和教學法文獻	7
§ 5. 代數習題	11
第二章 七年制中學的數的概念的發展	14
§ 6. 負數的引進、有理數集	14
§ 7. 有理數的加法和減法	17
§ 8. 有理數的乘法和除法	18
§ 9. 有理數運算的習題	21
§ 10. 求平方根, 平方和平方根的表	21
第三章 七年制中學中的恆等變換	25
§ 11. 文字符號	25
§ 12. 恆等變換的種類和效用	30
§ 13. 合併同類項、多項式的加法和減法	31
§ 14. 單項式和多項式的乘法、縮減乘法的公式	32
§ 15. 單項式和多項式的除法	36
§ 16. 多項式的分解因式	36
§ 17. 代數分式	38
第四章 一次方程和一次方程組	40
§ 18. 關於方程及方程組的初步理論	40
§ 19. 一個未知數的一次方程解法和布列成一次方程的習題	44
§ 20. 兩個未知數的兩個方程的一次方程組的解法以及布列 成這樣方程的習題	49
§ 21. 其他的一次方程組	51
§ 22. 在七年制中學中關於不等式的概念及其利用	53
第五章 函數相關性	54

§ 23. 在普通教育的數學課中函數思想的引進	54
§ 24. 中學學習函數的任務	56
§ 25. 函數的初步知識	59
§ 26. 八年級的‘函數及其圖象’	61
§ 27. 在九、十年級學習的函數	63
第六章 中學高年級數的概念的發展	65
§ 28. 無理數的引入, 實數集	65
§ 29. 虛數的引入, 複數集	68
第七章 中學高年級的恆等交換	71
§ 30. 在中學高年級學習的恆等變換的新類型	71
§ 31. 含有根號的式子的變換	72
第八章 中學高年級的方程和不等式	75
§ 32. 二次方程以及可以化爲二次的方程	75
§ 33. 未知數含在根號下的方程	78
§ 34. 高於一次的方程組	78
§ 35. 不等式	79
§ 36. 方程的研究	81
§ 37. 關於多項式被差 $(x-a)$ 除的剩餘定理及其推論	82
第九章 數列和級數	83
§ 38. 在代數課中學習級數的意義	83
§ 39. 有限項的級數	84
§ 40. 級數的各種習題	86
第十章 對數	88
§ 41. 關於方幂的指數概念的推廣和指數函數	88
§ 42. 對數的定義、對數作爲指數函數的逆函數、對數的一般性質	90
§ 43. 常用對數	92
§ 44. 對數表	95
§ 45. 對數計算的實踐	96
§ 46. 對數函數	98
§ 47. 指數方程和對數方程	100
§ 48. 對數計算尺	102

第十一章 組合 牛頓二項式	103
§ 49. 聯合論和機率論	103
§ 50. 排列	104
§ 51. 選列和組合	105
§ 52. 牛頓二項式	107
關於第三冊問題的書、文章的目錄	110

第一章 中學代數課的一般內容

§ 1. 作為科學的代數上的革命觀點

在流傳到我們現在的著作中，‘代數’這個詞是在‘Альджебр альму-кабала’這本書中第一次出現的，這本書寫於公元 820 年左右，它的著者是回教徒阿力哈瓦力士米（居住在現在的烏茲別克斯坦蘇維埃社會主義共和國哈力茲省）。在這本書內講到布列和解答一次方程和二次方程。‘Альджебр’這個字，以後被改寫成‘Алгебра’（代數），其意義為將方程一端的項移到另一端去的運算，後來這個字就被用來表示關於方程的科學。

我們看到，在阿力哈瓦力士米的著作中，還完全沒有代數文字符號，都用語言來寫出（‘文辭’代數）。例如，我們現在寫成 $x^2 + 10x = 39$ 形狀的方程，他這樣的描述：‘根的平方和 10 個根等於 39 個單位’。在關於數學史的讀本 [III, 16] 中，可以找出對於阿力哈瓦力士米的概念的描述。

作為關於方程的科學的代數初步，在很早時候就已有萌芽。我們可以在很古的埃及數學史料中發現它們，這時是用特別的字 ‘xay’ 來表示未知數，‘xay’ 就是堆的意思（例如，在阿米士的手稿中，有這樣的習題：‘兩個三堆，一個半堆，七分之一堆總共為 33，一堆等於多少？’），在巴比倫的楔形文字的原文中，也可以發現這樣的習題，間或也有利用表來求解的三次方程，而且，在印度也是這樣。到了公元四世紀，有了以‘算術’為名的帶奧芳特（Диофант）希臘數學文集，但就其內容來說，幾乎全部是討論方程和不定方程，關於不定方程的整數解或者分數解，現在屬於數論的範疇。在帶奧芳特的著作中，已經遇到某些近世代數的象徵主義的萌芽，以特別的符號來表示未知數和它的平方，以特別的符號來表示減法。這些符號是對應名詞的縮寫，正好與現在所用的對數（logarithmus）符號 log 相類似。

首先作為研究方程理論的代數的進一步發展，按其需要應該是研究

數的概念的種種推廣；負數，沒有它一次方程的理論就不完備，解二次方程和三次方程不可避免的要引導到無理數和虛數的產生。對於解方程所做的必要計算，自然希望能夠比較簡短，比較直觀以及容易描述，這樣就導至代數符號的產生；不僅用文字來表示未知數，而且也用來表示已知數值；逐漸地引入表示各種數學運算和關係的各種符號。

系統地應用文字以表示一般形狀的數的書寫，韋達（十六世紀末）已經曉得，但是從他的印成讀本的著作中可以發現的符號與現在所應用的是有很大差別的。在彼得堡科學院院士尤拉著名教科書中，這些符號；逐漸地完成了現代的形式；尤拉所著的教科書初版是在1768—1769年，在彼得堡用俄文寫的〔III, 44〕。在尤拉的代數裏，內容是非常廣泛的，解方程僅僅是它所包括的一部分。作為現在中學裏學習的教學科目的代數，部分的重復着尤拉教科書的多樣性的內容。

關於學校的代數課，在下節我們將詳細的討論，現在讓我們略微的來看作為科學的代數的某些特點。

從尤拉時代以來，在很久的時間內，代數的基本問題停留在代數方程的解法上，所謂代數方程，就是可以化為下面形狀的方程：一個或者某些個未知數的多項式等於零。由於方程解法的一般研究而引導出的一些理論，開始僅為解方程時的輔助角色，然而逐漸地不論在數學本身內部，或是在其外部，都有着非常廣泛的應用領域。這些理論，即羣論，環論，體論，一次代數，伽羅華理論，代數數論等等，成為近世代數的基本內容。開始由於研究代數方程可用根號求解條件而產生的羣論，對於整個數學有着重要意義。由於研究一次代數方程組解法理論變為向量和矩陣理論而產生的一次代數，對於數學分析，幾何以及物理有着非常重要的價值。

因此，必須認定作為科學的近世代數與作為中學學習科目的代數中間巨大的差別。

§ 2. 學校代數課發展的一些主要系統，作為教學科目的代數

現代學校代數課的內容可以區分為下面的主要發展系統，這些系統是在五年之中互相更替和互相交錯着的（從六年級到十年級）。

I. 數的概念的發展。在開始學習代數時，學生就已知自然數，零和分數。在六年級學生們認識到了負數，把它加入過去已知的數內，就得出有理數體。在八年級討論到無理數（當然是很膚淺的），把它加入有理數一起，就組成了實數體。對於中學生來說，第三次而且也是最後一次的數的概念的擴張在十年級學習，這時引進虛數，把它加入實數一起，就組成了複數體。

II. 恆等變換。用文字來表示數和文字式子的恆等變換在學習整個學校代數課的過程中都應用着。對於恆等變換概念內容的科學分析，顯示出有各種各樣的材料屬於這個概念的範疇內。在這裏可以分成以下各篇：1) 在數體（有理數體、實數體、複數體）內以及或多項式環和有理函數體內的有理運算；2) 根式和根式的運算（這一篇按其科學內容來說，屬於代數方程的範圍，因為求方根這種運算，就其本質來講，是解二項方程的運算）；3) 初等超越函數（一般的冪函數，指數函數，對數函數）和它們的函數性質，常常把它們利用來作為特殊的運算（對數和方冪）。

III. 方程。這一部分在現在的代數課中無疑的是最重要的。學生們在六年級已經與最簡方程發生關係。在七年級，解答一元一次方程和二元以及三元一次聯立方程；但在這裏不把它進行到最後一步；推究，亦即討論所有各種情形，這些留在十年級學習。在八年級學生認識到二次方程，可化為二次方程的高次方程以及簡單的二次聯立方程。在九年級遇見非代數方程（超越方程），即：指數方程和對數方程，在十年級把解一次方程和二次方程的問題進行到最後（推究！）並且知道解某些二項方程、三項方程以及不多的關於代數方程的一般理論。

IV. 函數。大家都公認，簡單函數的學習應該在學校代數課中佔有中心的地位，但是在現行的中學數學教學大綱中這個原則僅僅部分的實現着。學生在八年級第一次遇到函數相關性這個概念，大綱上對於這個項目‘函數及其圖象’給與十小時的時間。在九年級討論指數函數和對數函數，在十年級討論有理整函數某些一般性質（裴蜀(Bezy)定理及其推論）。然而在六七年級的大綱上，已經有一些項目與函數相關性概念緊密聯繫着而且為理解這個概念作了準備：溫度的圖象，函數 $y = ax$, $y = ax + b$ 等

等的圖象。幫助理解近代數學科學上最重要的概念之一的函數這個概念的各種問題，在所有中學代數課程的各篇都可引進。

被現行數學教學大綱所規定的學校代數課的全部內容，除了上述四條以外，安排在以下各章：

1) 比例，在七年級學習，補充六年級算術課學習的問題；由於比例和比例相關性的聯繫可以把它列入函數的研究一章內；

2) 求數值的平方根——純粹算術運算，然而聯繫到解二項二次方程的問題；

3) 級數——兩種最簡單的並且是特別重要的級數；級數的學習是屬於數學分析課的範圍；

4) 當作簡化計算的對數計算，就其本質來說，是屬於算術課的；

5) 組合論——這是獨特的一章，是屬於特別的一個數學分科的範圍，由於與牛頓二項式相關而把它引入學校的代數課內。但是這個理論的最有興趣的而且最重要的應用，是聯繫到機率論的初步理論；

6) 極限論——屬於九年級的幾何課教學大綱，本質上是屬於數學分析的。

學校代數課內容的這種名目繁多、五光十色的複雜性，使得極難回答‘代數是什麼？’這個問題。不可能給與這個課一個包括着它的所有內容的定義。乍一看以為學校代數課就是以文字來代替數碼的書寫，這種意見是錯誤的；算術，即使是在五年級學習的學校算術課，也在開始廣泛地利用文字寫法，除此以外，任何數學科學也是經常地利用文字符號。還有另一個錯誤的見解，是認為代數的主要特徵是應用了除了學校算術課所學習的整數和有理數以外的數；基本上數的概念的推廣是屬於算術的範圍。也不可為了使得學校代數課接近於代數的近代定義，而說學校代數課是關於給出的任意性質的集合（羣，環，體）上運算的科學；在學校中我們僅與數的集合和函數的集合發生關係。比較正確的見解是認為：學校代數課是研究最簡函數的理論，首先是關於有理整函數和分式函數以及關於某些超越函數；方程的理論是由於求已知函數的變數值而出現的課題，這些變數值能够使得已知函數有某個預先指出的值，特別是使得函數

的值爲零。如果僅限於算術上已知的數的種類，在解決這類課題時，很多情形必須引起數的概念的擴張；關於恆等變換的理論很自然的與研究函數連接起來；同一函數觀念的種種形式被研究着。可以把算術級數看作爲對應於等距離的諸變數值的一次函數值的數列，而幾何級數可以看作爲同樣情形的指數函數值的數列。也可以這樣說，學校代數課一般地並不是什麼數學科學的一個確定分支，而僅僅是教學科目，其中包含着數學教育初步所需的必要內容，這些內容部分屬於算術，部分屬於真正意義上的代數。

關於學校代數課的內容，還有一個很重要的意見。在代數課中有一些章節，這些是可以而且是應該完全地、詳盡無遺地研究的，例如，化有理整式和分式爲最簡形狀（化有理整式爲標準的多項式，化有理分式爲既約分式），一次方程和二次方程的解以及另外一些。除此以外，也有一些章節，其中所提出的課題是不能完全解決的，只能討論一些最重要的而且是最簡單情形，例如解高次方程。但是也有不少的問題，在中學內甚至不能正確地提出，例如關於無理式的恆等變換問題（把什麼認爲是含有根號式子的標準形式？），關於無理代數方程以及超越方程（關於這些，在(III, 3)的文章最後，被詳細地談到）。教師應該很清楚地理解教學大綱上這三種類型的章節之間的差別，力求達到詳盡無遺地研究第一類的章節，不要把主要的精力放在第二、三類的章節上。企圖嘗試給與學生關於無理式恆等變換的某種詳細理論，將要是一個重大的錯誤。在這裏僅能指出這樣變換的一些習題，而且，在一種情形是比較方便的，在另一種情形則又是不方便的，例如，以 $8\sqrt{2}$ 代替 $\sqrt{128}$ ，當化簡式子 $\sqrt{128} - \sqrt{98} = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2}$ 時是方便的，在求 $x = \sqrt{128}$ 的值時，就不如直接查表方便了。

§ 3. 學校代數課的學習目的，代數課的教學大綱

蘇俄教育部批准的、現行中學數學教學大綱中，這樣規定着學習代數的目的：‘講授代數的任務是擴大學生關於數的概念，教會學生自覺地、迅速而又最合理地作出代數式恆等的變形，發展函數相關的概念及其圖解，教會學生布列和解答方程，並且教會學生應用獲得的知識，以解答有關各課程的簡單習題；物理、化學、天文學、技術方面、農業方面的課程。’

蘇俄教育科學院教學法研究所在1947年擬定的中學數學教學大綱草案將代數課區分爲代數的開頭課（在七年制中學）和代數的基本課（在

中學高年級)。開頭課的目的‘在於使學生熟悉文字符號，正負數，運算的性質，最簡單的恆等變換，使學生學會布列和解答不複雜的方程以及作最簡單的圖象’。基本課的目的‘在於擴張關於數的概念；應該使恆等變換的技能完善起來並且擴張其內容以及使其系統化；學會布列和解答方程及聯立方程的方法以及發展函數相關性的思想及其圖象的觀念’。

布列方程不過就是構成某個函數的式子以及使其等於某個已知數或者構成兩個互等的函數式子，而解方程不過就是求這些變數值使得函數得到預先指定的值。因此，對於在學習代數上佔有很重要位置的方程的所有工作，本質上就是對函數所做的工作。另一方面，應用代數於解答與代數相鄰學科（算術，幾何，物理，天文等）的習題，基本上就是將這些學科中所討論的各種量之間的相關性用文字式子表示出來，亦即歸結於函數的工作，而且首先是有理函數，很自然的而且是不可避免的也要引導到函數相關性的比較複雜的情形，例如，研究沒有初速的自由落體的時間與路程的相關性引導到函數 $s = \frac{1}{2}gt^2$ ，而相反的問題引導到函數 $t = \sqrt{2s/g}$ 。

知道了研究函數相關性是學校代數課的基本課題，就需要盡力的着重強調數的概念的發展以及掌握恆等變換的重要性，沒有它們就不可能很好的研究函數相關性。

使兒童明確學習代數的目的，僅能在學習過程中逐步達到，而且與算術比較起來，是相當困難的，因為代數課與算術課不同，很少在日常生活中找到應用。六年級學生如果不知道學習代數課的目的，顯然在學習第一章時將要產生特別困難。最好指出這樣的兩個目的：第一，學會運用文字符號，它可以非常方便地、簡短地、清晰地表達出各種關於數的規則，性質，法則，首先是在算術課中學習過的這些性質，在代數開頭課中再來復習它，這些是學習恆等變換的基礎（例如，可以把規則‘為了減去差，應該減去被減數再加上減數’寫成簡略的公式 $a - (b - c) = a - b + c$ ；第二，學會利用方程解答算術習題，這時是引進表示未知數的文字符號而且是以運算的定義和規則為基礎的，在學習恆等變換以前就解方程也是完全可能的。

如果將文字符號看作為特別的數學語言，而且是有着顯然簡短而且

清晰的優越性的數學語言，那麼學生對於掌握文字符號的目的以及文字符號的恆等變換就會很容易的理解。學生也很容易達到正確的認識方程的價值，因為它可以使得各種各樣的習題用同一的方法來解答，這些習題在算術課中每一種都有一種新的方法來求解的：按照兩數的和與差或者和與比求這兩數的習題，‘推測’習題，‘運動’習題，‘已知諸數均等’習題以及許多其他的、在算術課中相當困難的習題，可以用列方程的同一個方法毫無困難的同樣解答。如果教師保證學生成功地理解這兩種思想，亦即數的文字表示和布列方程的方法，那麼就對於學習所有代數課打下了良好基礎。

現行的中學數學教學大綱上規定代數課學習五年，分配了總共約400小時的時間，每學年以及每學期每週時數變動頗大：在六年級每週三小時，在七年級第一學期每週四小時而在第二學期每週三小時，在八年級和七年級時數一樣，在九年級和十年級每週二小時。在六年級，學生認識到文字式子，負數，單項式和多項式，分解多項式為因式也包括在內；這裏還沒有關於方程的專門章節，但是根據算術運算的定義和性質來布列方程和解方程在教學大綱的頭兩章就已規定着。七年級學校代數課的基本內容是代數分式和一次方程；除此以外，還有講比例的和數字開平方的章節。在八年級學習方冪和方根，然後學習二次方程以及可化為二次的高次方程（一個未知數的和兩個未知數的）；不多的章節談論函數及其圖象。在九年級學習級數，講授關於指數的概念，學習指數函數對數函數及其應用。以下的一些章節是屬於十年級代數課的：組合及牛頓二項式，複數，不等式（聯繫到條件方程的研究），有理整函數的某些一般性質（裴蜀定理及其推論）。

§ 4. 代數的教學文獻和教學法文獻

流傳最廣的以及與現行代數教學大綱最相適應的教科書是蘇俄教育部批准作為中學教本的 А. П. 基雪達夫‘代數’（第一冊為六七年級用，第二冊為八至十年級用）。這本書的第一版還是在 1888 年，到現在已經經過了許多次的修訂再版。在這本書內有某些節談論關於函數相關性的問

題，但是就全體來講，這本書對於近代科學的反映還是比較少的。以後我們將要好多次地談論到關於這本書對於各個問題的敘述的特點。

在1940年，П. С. 阿歷山大洛夫和 А. Н. 科模哥洛夫的‘代數’試驗版出版了，這本書的使命是要代替基雪遼夫的代數教科書。這本書是蘇聯最偉大的兩位數學家寫的，書的第一冊是按照近代科學的要求來進行代數課的教學，並且不愧為真正已集中注意於這方面。第一冊是按照六至七年級教學大綱寫的，經過廣大範圍的教師同志的熱烈討論，但是由於戰爭，阻止了預定的修訂再版。在1941年原著者發表了一篇‘不等式的性質和關於近似計算的概念’的文章(III, 2, 6)，是他們的代數教科書第二冊的一章。中學數學教師完全的得到了這種新的代數教科書以後，將有可能從本質上改善自己的代數教學。

某些俄羅斯的青年一代曾經按照 А. Ю. 大衛道夫的‘初等代數教科書’學習代數，這本書是在1865年初版，由於它的內容豐富，清楚和正確，得到了廣泛的流傳；這本書在十月革命以後，還有再版發行(III, 19)。

К. Ф. 雷貝金才夫(III, 28)的‘中學代數教程’除了包含傳流的內容以外，還包含着很多新的內容，讓學生熟悉函數的概念，熟悉直角座標，函數圖象。在著者的另一著作中很好的擬定了比一般更早的引進方程的教學法。

С. И. 諾佛西洛夫的‘代數’書中包含着新穎的內容，出版於1947年，是作為師範專科學校教本用的，預定為了更深刻的學習初等代數，已經為中學教師所熟悉。

按照需要，我們僅談到了不多的老的和新的代數教科書。現在讓我們轉入習題課本的討論，也僅限於對教師有特別價值的不多幾本。

在十九世紀末和二十世紀初，在俄羅斯流傳很廣的是‘初等代數課習題與例題彙編’，為 Ф. 貝乞柯夫所編(III, 13)。這本書與革命前的中學的代數教學大綱完全相適應，它含有大量的細心選擇的例題和習題，這些題目可以練習獲得完全有價值的技能，但僅僅是在比較弱的程度上幫助掌握代數課的理論基礎。這本書就全體來講，無疑地是陳腐了的，但是仍然保有一部分到現在為止仍然是有價值的練習材料。

下面是從其中擇出的兩道題(1910年版)。

1. 計算 $\sqrt[4]{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{6}}$ 。這個題目，載在原書的第四章515題，如果將平方根表成下面形狀：

$$\sqrt[4]{(3-\sqrt{6})^2} = \sqrt[4]{3(5-2\sqrt{6})},$$

馬上就可得到解答：

2. 兩個人由相距45俄里的不同地方沿着相同的方向出發。第一個人比第二個人先出發了若干時間，這個時間是：時針通過的分的格數與分針通過的分的格數的和是104，這樣，經過11小時36分以後，第一個人趕上了第二個人。要求算出每個人每小時的速度為若干俄里？但已知按照上述速度，兩人同時相向出發，經過下述時間後，就可相遇：這個時間是無窮等比級數的和，這個等比級數的第2項為

$$1 + \left(3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \right), \text{ 而公比是 } (3 + \sqrt{3.66\dots}) + 6. \text{ (‘混合雜題’一章的第155題).}$$

這裏，我們看到了‘混合’習題的範例。

以後，H. A. 沙頗斯尼柯夫和 H. K. 瓦尼佐夫的‘代數習題彙編’代替了貝乞柯夫的習題課本，這本書就其選題的完備性和教學法上的正確性來說較之貝乞柯夫的習題課本毫無遜色，而且給與更多的通曉代數課思想方面的材料。這本書由於具有以下兩個特點，更促成其成功，即：每節開頭都具有簡短的理論知識，指示出為了解這一節習題所必須知道的（加上所有前面的知識），而且有着許多同類的習題（教師解答了其中一個，學生可以沒有特別困難的獨立解答類似的）。這本習題課本的優點就保證了它流傳在蘇維埃學校中作為學校教本，而且它經過了多次的修訂。然而這本書內遠不是已經消除了所有缺點的，例如關聯到文字式子的種種習題所引進的答案，幾乎完全未指出特別情形，由於特別情形以致使得答案為另一個或者沒有答案。例如，第一冊第六章第253題（按照1948年版）要求解聯立方程 $ax + by = 1$, $a^2x + b^2y = a$ ，而在書後引進答案為 $x = \frac{1}{a}$, $y = 0$ 。為了得到這個答案必須演算被 $a-b$ 以及被 a 除，這時，僅當假定 $a-b \neq 0$ 及 $a \neq 0$ 才是有效的。當 $a=b$ 時，這組聯立方程變成 $a(x+y) = 1$, $a^2(x+y) = a$ 的形狀，而當 $a \neq 0$ 時有無限多組解答，可以用式子 $x = t$, $y =$

$\frac{1}{a} - t$ 表示, 此時 t 是任何數, 當 $a=0$ 時, 這組聯立方程不共存。如果 $a-b \neq 0$, 但 $a=0$, 則 $b \neq 0$, 這組方程也不共存。沒有這樣細密的推究, 聯立方程的解就是不完備的; 如果認為學生的力量還不能達到這步, 那麼就應附加條件 $a \neq b, a \neq 0$ 以避免必須討論特別情形。忽視這種處理文字字式的複雜性, 將使得學生慣於機械地、形式地處理這類問題。在習題課本上也有不恰當的述說。必須以批判的態度, 很好考慮遇到的利用習題課本上的材料, 按照必要性給與以修正。

還可以看到在革命前出版的一本習題課本, 而且遠不是無可非議的, 但是也包含着許多新穎的, 對於學生有興趣的材料。這本‘初等代數課練習和習題彙編’是由三個人編著(Д. Я. 貝墨, А. А. 瓦柯夫, Р. Э. 斯特魯夫), 1913 年出版於歲金(Сытин), 在蘇維埃時代仍重版過全本以及縮減本。

不久以前出版了新的‘代數習題彙編’, 編著者為蘇俄學校功勳教師 П. А. 拉尼切夫, 是預定作為十年制中學以及七年制中學的六七年級用的。在這本習題課本內反映着某些進步的趨向, 例如, 更早的引進了方程, 對於圖象以及計算技巧賦於較多的注意等等, 值得教師同志們加以嚴重注意的。

在 1937 年, ОНТИ 出版了 В. А. 克雷乞馬爾教授的‘代數習題課本’, 預定作為高年級對數學有興趣的學生以及教師用的, 其中包含着大量的比較困難的習題, 這些習題可以引進許多具有原則上重要性的理論問題。國立教育出版社(Учпедгиз)出版了改訂的縮簡本。在 1941 年, Учпедгиз 還出版了 П. 奧貝爾和 Г. 巴培尼編的一本‘初等代數練習’, 其中含有大量的表示代數初步觀念的習題。這本書內特別有價值的是必需用方程來研究的經過很好選擇了的練習和習題。

關於代數教學法的書, 讓我們提出 И. И. 乞斯卡柯夫教授的‘代數教學法’ 1934 年由 Учпедгиз 出版, 除了包含一些數學問題的討論以外, 還有許多歷史知識。比較新的是 С. С. 勃龍斯兌恩的‘代數教學法’(Учпедгиз, 1937), 不僅是教學法的教科書, 而且也是敘述真正代數的教科書(關於這本書的缺點, 參見[III, 33])。

談到初等代數教育的個別問題的，還有很多書和文章。以後我們將指出其中重要的。現在讓我們僅談到一本試驗教科書，1949年出版，爲B. Л. 岡察洛夫教授所編，是重新修定了傳統的代數課的一本書，近幾年來在一些學校實際試驗中。（參考[III, 18 B]）

§ 5. 代數習題

正如我們在第二篇 § 4 中所見，算術習題可以分成三類：1) ‘習題—例題’；這類題目的解答歸諸於簡單地應用已建立起的理論部分的一般規則的特殊情形；2) 具有實際內容的‘計算習題’，對於這類題目必須選擇運算，但是其解答是沒有任何困難的；3) ‘發展性習題’，這類題目的解答需要某些機智而且並不是由於相應理論的簡單知識就能保證的。在代數上，我們也有這三種類型的習題，而且是在學校代數課的哪一章都是這樣，與算術課不同的僅僅是在於這三種類型習題分量的比例不同而已！對於恆等變換，對於解答現成的方程以及聯立方程，對於有理數（正的和負的），實數，複數的計算，旨在保證有價值的技巧性的技能的習題—例題，有着首要的意義。逐漸複雜的習題—例題，不知不覺的就轉至發展性習題，對於這樣題目的解答，已經是數學創作的初級形式。例如，分解三項式 $4x^2 - 12x + 9$ 爲單因式是典型的習題—例題，而分解多項式 $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 3 = (2x - 3y + 1)(2x + y - 3)$ 就已要求中學學生較大的深思熟慮，機智性以及頑強的精神。所有列方程的習題，應該算入計算習題之內，這類題目要求利用問題的具體條件以及某些一般的方法。沙頗斯尼斯柯夫和瓦尼佐夫習題課本第二冊第十四章第 129 題（按照 1948 年版），要求計算物體的真正重量，按照兩次量得的不正確的結果（天平臂長不等，故在兩個盤上量得的結果不同）是這類習題中的很好的一個；如果 p 和 q 相差很小，應該提出補充問題關於以 $\frac{p+q}{2}$ 代替 $\sqrt{pq}$ 的可能性。幾乎所有應用代數於其他學科的問題都可歸結於習題—例題以及計算習題之列，而且很自然的，對於這類習題代數課應賦以最大的關懷。與這兩種習題同時，非常希望也給與某些數量的發展性習題，要求學生不僅是簡單的知道基本途徑，而且會動員自己全部知識尋找應有的途徑，會開闢新的