

高考总复习

聚焦新题型

2005

根据新课程最新《考试说明》编写

热点题型 + 创新题型 高考题型一网打尽
基础题 + 综合题 + 拔尖题 高考能力梯度闯关

丛书主编：何传忠

本册主编：王登平

数学

教育科学出版社



北京防伪印刷厂印刷



重点建设设计丛书

· 聚焦最佳设计丛书 ·



FOCUS NEW TEST MODEL

丛书主编：何传忠

本册主编：王登平

副主编：高正国

编委：严奉军

王登平

高正国

付其 杨受宇

付其 李俊福

邓诗锐 杨受宇

张新坤

数学

教育科学出版社

· 北 京 ·

执行策划 严 忠
责任编辑 陈春勇 严 忠
责任印制 曲凤玲

图书在版编目(CIP)数据

聚焦新题型, 数学, 2005 年高考总复习 / 王登平主编,
北京: 教育科学出版社, 2004. 4
(聚焦最佳设计丛书/何传忠主编)
ISBN 7-5041-2791-4

I. 聚... II. 王... III. 数学课—高中—解题—升
学参考资料 IV. G634

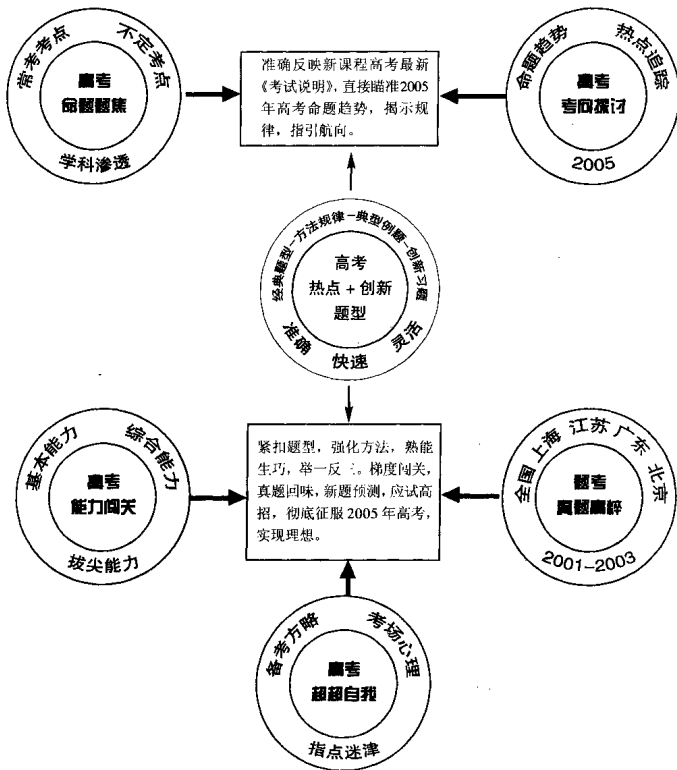
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 032290 号

出版发行	教育科学出版社	市场部电话	010-62003339
社 址	北京·北三环中路 46 号	网 址	http://www.esph.com.cn
邮 编	100088		
传 真	010-62013803		
经 销	各地新华书店		
印 刷	北京时代华都印刷有限公司		
开 本	889 毫米×1194 毫米 1/16		
印 张	138.25	版 次	2004 年 4 月第 1 版
字 数	4353 千	印 次	2004 年 4 月第 1 次印刷
定 价	168.00 元(全套共 9 册)	印 数	1 42 000 册

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

导读图示

本书不是一般性的题解书，不是“题典”，不搞题海战术。它是“以题型为纲”，是高考备考研究专家、命题研究专家经过深入研究、分析、归纳而提炼出的题型，也是在2005年高考命题中最重要的和最可能考查的题型，并涉及这些题型的解题方法和规律。它还通过科学、实用的体例设计，让你使用本书后，迅速拔高准确、快速、灵活的解题能力，顺利实现高分理想。为了让你快速了解本书的内容并取得最佳的学习效果，请你在使用之前先阅读下面图示：



高三复习如何事半功倍?

高三复习如何做到事半功倍呢?为此,我们走访了全国十几所重点中学的数十名特级教师和考入北大、清华的状元们,他们对此做了较精辟的指点,在此展现出来,以期对即将进入高三复习的学生有所帮助。

语文:

特级教师: 1. 先做一套完整的与高考难度接近的模拟题,找准自己的弱项,对症下药,制定出自己这一年的复习计划,最好细化到每周。2. 夯实课本,积累、归纳、总结基础知识,扫除知识盲点,不能因某个知识点分值不高而弃之,因为弃的东西多了,加在一起丢分就不少了。

状元支招: 1. 对于阅读,坚持每天一读,可以是优秀作文,也可以是阅读题。2. 对于作文,最基本的是求稳,再求适度的创新。平时多积累写作素材,多背诵一些优美段落。通过看书或杂志,挑选一些新颖的有寓意的小片段,在作文中适当应用,不但可充实内容,还会让文章显得新颖别致。3. 准备一个错题本,将多次练习、测试中的错题加以总结,找准自己的薄弱环节,各个击破。4. 常将一些易错的语音、字型、成语、近义词等记录下来,不断复习巩固,以加深印象。5. 对于文言文阅读,通过掌握尽可能多的实词、熟记常用虚词来提高文言文阅读能力;另外,也可坚持每天做一篇文言文练习,这样一段时间后,您的语感定会有提高。

数学:

特级教师: 1. 弄清教材的基本概念、定义及其适用范围和条件。2. 保持适当的练习,特别注意对各个知识点所考题型进行归纳和总结,找出该题型的解题思路和方法,做到以不变应万变。3. 注意各知识点的和多种思想方法的综合运用。

状元支招: 1. 准备一本小册子,将所有的概念、公式准确地记下来。2. 准备另一本小册子,将命题新颖、解法独到的题记下来,反复思考、认真体会。3. 准备一个错题本,将易错题加以总结、归纳,过一段时间并重做一遍。4. 做题——思考——做题,这是提高解题技巧和开阔思维的必经之路。

英语:

特级教师: 1. 将高中所学的单词分为必记、运用、了解三类,分配到各个阶段,有计划复习记忆,最好能放到某句话或某个段落里去记忆。2. 将语法系统分类学习,注意特殊用法和特殊情况,及时通过做题来巩固该语法点。3. 每天听10~20分钟英语广播,并试着复述或跟读。

状元支招: 1. 定期重复记忆,攻克单词关,每天25个单词为宜。2. 做题后及时总结、记录,核对相应语法点,并定期回顾阅读记录本,解决语法难关。3. 养成定时阅读的好习惯,每天2~3篇为宜。4. 多读一些较简单的英语报刊,速度要快,读完后试着用英文复述一遍大意,这样既提高了阅读速度,又锻炼了英文表达。

文科综合:

特级教师: 1. 立足教材,提取框架,形成网络。2. 纵向联系、串联各知识点,形成题型,将知识点和对应的题型结合

起来记忆和思考。3. 联系热点材料,紧扣社会生活,如最新科技和环境问题、时政热点话题等,找准与相对应的知识点,进行多角度思考。

状元支招:

政治: 1. 先背知识点,形成框架,再往里填充内容。2. 将知识串联,形成网络。3. 研究高考大题,形成正确的答题结构。4. 在高考前以时政热点作为线索与载体,综合各基础知识,提高综合分析能力。

历史: 1. 学会多种记忆方法:比较记忆法——如根据各条线索比较记忆;浏览记忆法——多翻几遍课本,可随意翻;联想记忆法——不看书,将某一章节的内容在大脑中过一遍;选择记忆法——如背历史年代,并不需要将每一个历史事件发生的年代都记下来,要善于选择,去粗取精。2. 多提出问题、思考问题,如根据不同材料进行多角度思考。3. 归纳总结,形成体系。任何一个历史问题都是由各个条件促成和组成的,可以把它一一写出来,最后将零散的知识串起来,组成一个体系。

地理: 1. 以知识为线,识图当先;2. 注意专题归纳,结合社会热点问题,如环境污染、气候变暖、地震灾害等问题,进行纵向和横向思考。

理科综合:

特级教师: 1. 掌握基本概念、公式、原理,特别注意这些原理的使用条件和范围;另外,还要注意一些易混淆概念的区别与运用。2. 掌握各种题型,触类旁通。3. 注意文字表述的专业性、规范性和严密性,这是同学们容易忽视和丢分的地方。

状元支招: 1. 整理知识点,挖掘定理的深层次内容。怎样挖掘呢?方法就是努力寻找不满足定理条件的情况来问自己,看看该如何解决,这样您在下次碰到类似情况时,就知道该公式是否适用,并且知道该如何解决了。2. 注意错题总结和及时回顾错题所涉及的知识点。3. 注意实验,高考绝不会将原实验照搬,一般都是经过变化或重新组合了的,因此必须掌握每一步骤的关键点和所起的作用。4. 要做一定量的习题,一方面通过做题来强化知识点,加深对定理、公式、概念的记忆;另一方面也易发现自己的薄弱环节。但做题一定要学会思考、做题前,可以想一想它的考查点在哪里,涉及哪几方面的知识;做题后,多思考一下是否有其他解法,若变化角度可能会怎样出题等,最好能归纳出该类题型的通解方法。

最后,在考前特别注意心态的调整,不急不燥,不要有太大的压力。考前几天可以做几套较容易的模拟题,这对保持最佳的考试状态很重要。总之,在高三复习中,同学们只要具备了完善的知识结构、正确的学习方法、良好的心态,再加上老师的正确引导,就一定成功。

目 录

第1讲 集合	(1)	高考能力闯关	(23)
高考命题聚焦	(1)	高考超越自我	(24)
高考考向探讨	(1)	高考真题精选	(24)
高考题型巧解巧练	(1)	第9讲 二次函数、方程与等式	(26)
高考能力闯关	(2)	高考命题聚焦	(26)
高考超越自我	(3)	高考考向探讨	(26)
高考真题精选	(3)	高考题型巧解巧练	(26)
第2讲 简易逻辑	(4)	高考能力闯关	(27)
高考命题聚焦	(4)	高考超越自我	(28)
高考考向探讨	(4)	高考真题精选	(28)
高考题型巧解巧练	(4)	第10讲 函数的综合应用与实际应用	(29)
高考能力闯关	(5)	高考命题聚焦	(29)
高考超越自我	(6)	高考考向探讨	(29)
高考真题精选	(6)	高考题型巧解巧练	(29)
第3讲 函数及其性质	(7)	高考能力闯关	(31)
高考命题聚焦	(7)	高考超越自我	(32)
高考考向探讨	(7)	高考真题精选	(32)
高考题型巧解巧练	(7)	第11讲 等差、等比数列的概念与运算	(33)
高考能力闯关	(9)	高考命题聚焦	(33)
高考超越自我	(9)	高考考向探讨	(33)
高考真题精选	(10)	高考题型巧解巧练	(33)
第4讲 反函数	(11)	高考能力闯关	(34)
高考命题聚焦	(11)	高考超越自我	(34)
高考考向探讨	(11)	高考真题精选	(34)
高考题型巧解巧练	(11)	第12讲 等差、等比数列的性质与应用	(35)
高考能力闯关	(12)	高考命题聚焦	(35)
高考超越自我	(13)	高考考向探讨	(35)
高考真题精选	(13)	高考题型巧解巧练	(35)
第5讲 函数的值域与最值	(14)	高考能力闯关	(36)
高考命题聚焦	(14)	高考超越自我	(36)
高考考向探讨	(14)	高考真题精选	(37)
高考题型巧解巧练	(14)	第13讲 数列求和	(38)
高考能力闯关	(15)	高考命题聚焦	(38)
高考超越自我	(16)	高考考向探讨	(38)
高考真题精选	(16)	高考题型巧解巧练	(38)
第6讲 指数、对数	(17)	高考能力闯关	(39)
高考命题聚焦	(17)	高考超越自我	(40)
高考考向探讨	(17)	高考真题精选	(40)
高考题型巧解巧练	(17)	第14讲 归纳—猜想—证明与数学归纳法	(41)
高考能力闯关	(18)	高考命题聚焦	(41)
第7讲 指数函数、对数函数	(19)	高考考向探讨	(41)
高考命题聚焦	(19)	高考题型巧解巧练	(41)
高考考向探讨	(19)	高考能力闯关	(42)
高考题型巧解巧练	(19)	高考超越自我	(43)
高考能力闯关	(20)	高考真题精选	(43)
高考超越自我	(21)	第15讲 数列的综合应用与实际应用	(44)
高考真题精选	(21)	高考命题聚焦	(44)
第8讲 函数的图象	(22)	高考考向探讨	(44)
高考命题聚焦	(22)	高考题型巧解巧练	(44)
高考考向探讨	(22)	高考能力闯关	(45)
高考题型巧解巧练	(22)	高考超越自我	(46)

高考真题精选	(46)	高考题型巧解巧练	(67)
第16讲 三角函数基本概念及公式	(47)	高考能力闯关	(68)
高考命题聚焦	(47)	高考超越自我	(69)
高考考向探讨	(47)	高考真题精选	(69)
高考题型巧解巧练	(47)	第24讲 解三角形	(70)
高考能力闯关	(48)	高考命题聚焦	(70)
高考超越自我	(48)	高考考向探讨	(70)
高考真题精选	(48)	高考题型巧解巧练	(70)
第17讲 三角函数的性质	(49)	高考能力闯关	(71)
高考命题聚焦	(49)	高考超越自我	(72)
高考考向探讨	(49)	高考真题精选	(72)
高考题型巧解巧练	(49)	第25讲 向量的综合应用及实际应用	(73)
高考能力闯关	(50)	高考命题聚焦	(73)
高考超越自我	(50)	高考考向探讨	(73)
高考真题精选	(51)	高考题型巧解巧练	(73)
第18讲 三角函数的图像及图像变换	(52)	高考能力闯关	(74)
高考命题聚焦	(52)	高考超越自我	(75)
高考考向探讨	(52)	高考真题精选	(75)
高考题型巧解巧练	(52)	第26讲 不等式的性质	(76)
高考能力闯关	(53)	高考命题聚焦	(76)
高考超越自我	(54)	高考考向探讨	(76)
高考真题精选	(54)	高考题型巧解巧练	(76)
第19讲 三角函数的恒等变形与求值	(55)	高考能力闯关	(77)
高考命题聚焦	(55)	高考超越自我	(77)
高考考向探讨	(55)	高考真题精选	(77)
高考题型巧解巧练	(55)	第27讲 不等式的证明	(78)
高考能力闯关	(56)	高考命题聚焦	(78)
高考超越自我	(56)	高考考向探讨	(78)
高考真题精选	(57)	高考题型巧解巧练	(78)
第20讲 三角形中的三角函数	(58)	高考能力闯关	(79)
高考命题聚焦	(58)	高考超越自我	(80)
高考考向探讨	(58)	高考真题精选	(80)
高考题型巧解巧练	(58)	第28讲 不等式的解法(一)	(81)
高考能力闯关	(59)	高考命题聚焦	(81)
高考超越自我	(59)	高考考向探讨	(81)
高考真题精选	(59)	高考题型巧解巧练	(81)
第21讲 三角函数的综合应用及实际应用	(61)	高考能力闯关	(82)
高考命题聚焦	(61)	高考超越自我	(82)
高考考向探讨	(61)	高考真题精选	(82)
高考题型巧解巧练	(61)	第29讲 不等式的解法(二)	(84)
高考能力闯关	(62)	高考命题聚焦	(84)
高考超越自我	(63)	高考考向探讨	(84)
高考真题精选	(63)	高考题型巧解巧练	(84)
第22讲 平面向量及其运算	(64)	高考能力闯关	(85)
高考命题聚焦	(64)	高考超越自我	(86)
高考考向探讨	(64)	高考真题精选	(86)
高考题型巧解巧练	(64)	第30讲 不等式的综合应用及实际应用	(87)
高考能力闯关	(65)	高考命题聚焦	(87)
高考超越自我	(66)	高考考向探讨	(87)
高考真题精选	(66)	高考题型巧解巧练	(87)
第23讲 两点间距离公式、线段的定比分点与图形平移	(67)	高考能力闯关	(88)
高考命题聚焦	(67)	高考超越自我	(89)
高考考向探讨	(67)	高考真题精选	(89)
		第31讲 直线的方程	(90)
		高考命题聚焦	(90)

高考考向探讨	(90)	高考命题聚焦	(113)
高考题型巧解巧练	(90)	高考考向探讨	(113)
高考能力闯关	(91)	高考题型巧解巧练	(113)
高考超越自我	(91)	高考能力闯关	(114)
高考真题精选	(91)	高考超越自我	(115)
第32讲 两条直线的位置关系	(92)	高考真题精选	(115)
高考命题聚焦	(92)	第40讲 轨迹问题	(116)
高考考向探讨	(92)	高考命题聚焦	(116)
高考题型巧解巧练	(92)	高考考向探讨	(116)
高考能力闯关	(93)	高考题型巧解巧练	(116)
高考超越自我	(93)	高考能力闯关	(117)
高考真题精选	(93)	高考超越自我	(117)
第33讲 简单的线性规划及实际运用	(95)	高考真题精选	(118)
高考命题聚焦	(95)	第41讲 平面与空间直线	(119)
高考考向探讨	(95)	高考命题聚焦	(119)
高考题型巧解巧练	(95)	高考考向探讨	(119)
高考能力闯关	(96)	高考题型巧解巧练	(119)
高考超越自我	(97)	高考能力闯关	(120)
高考真题精选	(97)	高考超越自我	(121)
第34讲 圆的方程	(98)	高考真题精选	(121)
高考命题聚焦	(98)	第42讲 直线与平面平行与垂直	(122)
高考考向探讨	(98)	高考命题聚焦	(122)
高考题型巧解巧练	(98)	高考考向探讨	(122)
高考能力闯关	(99)	高考题型巧解巧练	(122)
高考超越自我	(99)	高考能力闯关	(123)
高考真题精选	(100)	高考超越自我	(124)
第35讲 直线与圆的位置关系	(101)	高考真题精选	(124)
高考命题聚焦	(101)	第43讲 平面与平面平行与垂直	(125)
高考考向探讨	(101)	高考命题聚焦	(125)
高考题型巧解巧练	(101)	高考考向探讨	(125)
高考能力闯关	(102)	高考题型巧解巧练	(125)
高考超越自我	(102)	高考能力闯关	(126)
高考真题精选	(103)	高考超越自我	(127)
第36讲 椭圆	(104)	高考真题精选	(127)
高考命题聚焦	(104)	第44讲 平面直线、直线与平面所成的角、二面角的平面角	(128)
高考考向探讨	(104)	高考命题聚焦	(128)
高考题型巧解巧练	(104)	高考考向探讨	(128)
高考能力闯关	(105)	高考题型巧解巧练	(128)
高考超越自我	(106)	高考能力闯关	(129)
高考真题精选	(106)	高考超越自我	(130)
第37讲 双曲线	(107)	高考真题精选	(130)
高考命题聚焦	(107)	第45讲 异面直线的距离、点到平面的距离、平面与平面间的距离	(131)
高考考向探讨	(107)	高考命题聚焦	(131)
高考题型巧解巧练	(107)	高考考向探讨	(131)
高考能力闯关	(108)	高考题型巧解巧练	(131)
高考超越自我	(109)	高考能力闯关	(132)
高考真题精选	(109)	高考超越自我	(133)
第38讲 抛物线	(110)	高考真题精选	(133)
高考命题聚焦	(110)	第46讲 棱柱、棱锥	(134)
高考考向探讨	(110)	高考命题聚焦	(134)
高考题型巧解巧练	(110)	高考考向探讨	(134)
高考能力闯关	(111)	高考题型巧解巧练	(134)
高考超越自我	(112)		
高考真题精选	(112)		
第39讲 直线与圆锥曲线的位置关系	(113)		

高考能力闯关	(135)	高考题型巧解巧练	(155)
高考超越自我	(136)	高考能力闯关	(156)
高考真题精选	(136)	高考超越自我	(157)
第 47 讲 球	(137)	高考真题精选	(157)
高考命题聚焦	(137)	第 55 讲 离散型随机变量的分布列、期望与方差	(158)
高考考向探讨	(137)	高考命题聚焦	(158)
高考题型巧解巧练	(137)	高考考向探讨	(158)
高考能力闯关	(138)	高考题型巧解巧练	(158)
高考超越自我	(139)	高考能力闯关	(159)
高考真题精选	(139)	高考超越自我	(160)
第 48 讲 空间向量及其运算	(140)	高考真题精选	(160)
高考命题聚焦	(140)	第 56 讲 统计初步	(161)
高考考向探讨	(140)	高考命题聚焦	(161)
高考题型巧解巧练	(140)	高考考向探讨	(161)
高考能力闯关	(141)	高考题型巧解巧练	(161)
高考超越自我	(142)	高考能力闯关	(162)
高考真题精选	(142)	高考超越自我	(163)
第 49 讲 两个原理及排列组合	(143)	高考真题精选	(163)
高考命题聚焦	(143)	第 57 讲 数列的极限	(164)
高考考向探讨	(143)	高考命题聚焦	(164)
高考题型巧解巧练	(143)	高考考向探讨	(164)
高考能力闯关	(144)	高考题型巧解巧练	(164)
高考超越自我	(144)	高考能力闯关	(166)
高考真题精选	(144)	高考超越自我	(167)
第 50 讲 排列、组合的简单应用	(145)	高考真题精选	(167)
高考命题聚焦	(145)	第 58 讲 函数的极限	(168)
高考考向探讨	(145)	高考命题聚焦	(168)
高考题型巧解巧练	(145)	高考考向探讨	(168)
高考能力闯关	(146)	高考题型巧解巧练	(168)
高考超越自我	(146)	高考能力闯关	(169)
高考真题精选	(146)	高考超越自我	(170)
第 51 讲 二项式定理	(147)	高考真题精选	(170)
高考命题聚焦	(147)	第 59 讲 导数的概念与运算法则	(171)
高考考向探讨	(147)	高考命题聚焦	(171)
高考题型巧解巧练	(147)	高考考向探讨	(171)
高考能力闯关	(148)	高考题型巧解巧练	(171)
高考超越自我	(148)	高考能力闯关	(172)
高考真题精选	(148)	高考超越自我	(173)
第 52 讲 随机事件的概率	(149)	高考真题精选	(173)
高考命题聚焦	(149)	第 60 讲 导数的应用	(174)
高考考向探讨	(149)	高考命题聚焦	(174)
高考题型巧解巧练	(149)	高考考向探讨	(174)
高考能力闯关	(150)	高考题型巧解巧练	(174)
高考超越自我	(151)	高考能力闯关	(176)
高考真题精选	(151)	高考超越自我	(177)
第 53 讲 互斥事件有一个发生的概率	(152)	高考真题精选	(177)
高考命题聚焦	(152)	第 61 讲 复数	(178)
高考考向探讨	(152)	高考命题聚焦	(178)
高考题型巧解巧练	(152)	高考考向探讨	(178)
高考能力闯关	(153)	高考题型巧解巧练	(178)
高考超越自我	(154)	高考能力闯关	(179)
高考真题精选	(154)	高考超越自我	(179)
第 54 讲 相互独立事件同时发生的概率	(155)	高考真题精选	(179)
高考命题聚焦	(155)	参考答案	(180)
高考考向探讨	(155)		

第1讲 集合



高考 命题聚焦

• 命题热点

1. 集合的基本特征, 集合的表示方法, 元素与集合的关系, 集合与集合的关系, 集合的运算.

2. 绝对值不等式, 一元二次不等式及简单的分式不等式的解法.

• 学科渗透

1. 以集合语言为工具考查其他知识内容, 如用有关术语、符号、数轴与韦恩图解决实际问题.

2. 不等式知识渗透于中学数学的各个方面, 属高考的必考内容.



高考 考题原析

生: 集合在高考试题中是如何体现的?

师: 集合是每年高考必考的知识点之一, 主要考查集合的概念, 集合的交、并、补运算及有关术语、符号、数轴与韦恩图.

同时, 集合概念是研究函数、方程与不等式的基础, 贯穿中学数学始终.

生: 试题表现形式如何?

师: 题型多为选择题、填空题, 以容易题居多, 但以集合语言为工具的中等难度的选择题、填空题也可能出现, 解答题中单纯的集合试题不可能出现.



高考题型 巧解巧练

高考题型(1): 集合的概念及集合的相关关系

方法规律: 解答集合问题, 首先要认真审题, 弄清题目要求; 其次要正确理解各集合及符号的含义、变形, 同时学会简化集合、寻求集合的相关关系.

【典例巧解1】

设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则

A. $M=N$ B. $M \subseteq N$ C. $M \supseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

(2002年全国高考题)

思路: 可从集合的概念及整数的性质等方面思考, 将集合

M, N 中元素分别变形为 $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4}, (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{4}, (k \in \mathbb{Z})$

再考虑数 $2k+1$ 与 $k+2$ ($k \in \mathbb{Z}$) 之间的关系就清楚了.

解: 对集合 $M, x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbb{Z}$

对集合 $N, x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{4}, k \in \mathbb{Z}$

当 k 取奇数时,

有 $M = \{\dots, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \dots\}$

$N = \{\dots, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \dots\}$

$\therefore M \subseteq N$ 选 B.

点评: (1) 本题直接从集合元素的表达式出发, 将集合等价转换为熟悉的、简单的集合再进行判别, 这是一种常见的解题策略.

(2) 本题也可从分式结构出发, 运用整数奇偶性求解, 但由于题目的特殊结构, 可取 $k=1, 2, 3, \dots$ 即可简捷求解.

【活学活用】

1. 已知集合 $M = \{x | x = \cos \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x =$

$\sin \frac{(2m-3)\pi}{6}, m \in \mathbb{Z}\}$, 则 M 与 N 满足

A. $M \subseteq N$ B. $M=N$ C. $M \supseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

高考题型(2): 一元二次函数、方程与不等式、集合的运算

方法规律: 一元二次函数和图象, 一元二次方程的根及一元二次不等式的解集, 可以相互转化. 一元二次不等式的解集的端点是一元二次方程的根, 也是一元二次函数图象与坐标系中 x 轴交点的横坐标, 考生要学会根据集合的关系发现集合的意义.

【典例巧解2】

已知集合 $A = \{x | \frac{2x-3}{x+5} < 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且

$A \cap B = \emptyset, A \cup B = \{x | -5 < x \leq 2\}$, 求实数 a, b 的值.

思路: 先解分式不等式 $\frac{2x-3}{x+5} < 0$, 确定集合 $A = \{-5 < x <$

$\frac{3}{2}\}$. 借助于 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \{x | -5 < x \leq 2\}$, 分析知 $B = \{\frac{3}{2} \leq x \leq 2\}$, 由韦达定理可以求出 a, b 的值.

解: 解分式不等式 $\frac{2x-3}{x+5} < 0$, 得 $-5 < x < \frac{3}{2}$

于是, $A = \{x | -5 < x < \frac{3}{2}\}$

设 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$

且 $B = [x_1, x_2]$

$\therefore A \cap B = \emptyset, \therefore x_1 \geq \frac{3}{2}$, 或 $x_2 < -5$

又 $A \cup B = [-5, 2]$





$$\therefore B = \{x | \frac{3}{2} \leq x \leq 2\}$$

即不等式 $x^2 + ax + b \leq 0$ 的解集是 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

由韦达定理得 $a = -\frac{7}{2}, b = 3$

点评: (1) 用描述法表示集合, 考虑化简集合.

(2) 掌握分式不等式, 一元二次不等式的解法及韦达定理的应用.

(3) 善于从集合与集合的关系中分析集合的意义.

【活学活用】

2. 设 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x | x^2 - ax + 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 a .

高考题型(3): 集合的应用

方法规律: 应用集合的观点分析和认识数学现象, 可以更深刻地揭示问题的本质; 存在型探索性问题将思维空间拓展、开放; 分类讨论则体现集合并、交的思想.

【典例巧解 3】

已知集合 $A = \{y | y = (\frac{1}{2})^x, x \in \mathbb{R}\}$, 集合 $B = \{x | (m+6)x^2 + 2mx + 1 \leq 0\}$, 是否存在实数 m , 使 $B \subseteq A$ 成立, 并说明理由.

思路: 这是存在型探索性问题, 先假设实数 m 存在, 然后在假设成立的前提下推理和论证. 由指数函数 $y = (\frac{1}{2})^x (x \in \mathbb{R})$ 的值域知 $A = \mathbb{R}^+$. 再由 $B \subseteq A$ 转化为关于 m 的一元二次不等式 $(m+6)x^2 + 2mx + 1 \leq 0$ 是否存在正实数根问题, 借助一元二次函数图象加以分析, 讨论.

解: 假设符合题目条件中的实数 m 存在.

由 $y = (\frac{1}{2})^x$, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $y > 0$, 即 $A = \mathbb{R}^+$,

对 B 中不等式, $(m+6)x^2 + 2mx + 1 \leq 0$

(1) 当 $m+6=0$, 即 $m=-6$ 时,

有 $B = \{x | x \geq \frac{1}{12}\}$, $B \subseteq A$

(2) 当 $m+6 < 0$, 即 $m < -6$ 时,

有 $\Delta = 4m^2 - 4(m+6) > 0$

此时 $x \leq \frac{-m + \sqrt{m^2 - (m+6)}}{m+6} < 0$

或 $x \geq \frac{-m - \sqrt{m^2 - (m+6)}}{m+6} > 0$, 有 $B \subseteq A$ 不成立.

(3) 当 $m+6 > 0$, 即 $m > -6$ 时,

① $\Delta = 4m^2 - 4(m+6) < 0$, 即 $-2 < m < 3$,

有 $B = \emptyset$, $B \subseteq A$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4(m+6) \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-2m}{m+6} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m+6} > 0 \end{cases}$$

解之得 $-6 < m \leq -2$

有 $B = \{x | 0 < x_1 \leq x \leq x_2\}$, $B \subseteq A$

综上所述, 存在 m , 且 $m \in [-6, 3]$ 时, $B \subseteq A$ 成立.

点评: 含参变量的存在型问题是数学探索性问题的一种常见题型. 其基本解题思路是:

(1) 假设满足题设的参变量存在;

(2) 在假设存在的前提下进行理论论证和运算;

(3) 得出结论, 如果能求出满足条件的参数值, 则假设成立, 否则不成立.

【活学活用】

3. 对于集合 $A = \{x | x^2 - 2ax + 4a - 3 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 + a + 2 = 0\}$, 是否存在实数 a , 使 $A \cup B = \emptyset$ 成立, 若存在, 求出 a 值; 若不存在, 请说明理由.



高考

能力闯关

基本能力题

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N}^+ | \frac{12}{6-x} \in \mathbb{N}^+\}$, 用列举法表示集合 $A =$

2. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, 集合 B 满足 $A \cup B = \{1, 2\}$, 则这样的集合 B 有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.

3. 设集合 $M = \{x | -1 \leq x < 2\}$, $N = \{x | x \leq a\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 不等式 $2x + 3 - x^2 > 0$ 的解集是 $(\hspace{2cm})$

A. $\{x | -\frac{3}{2} < x < 1\}$

B. $\{x | -1 < x < 3\}$

C. $\{x | 1 \leq x < 3\}$

D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$

5. 若全集 $U = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = x+1, x, y \in \mathbb{R}\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B$ 是 $(\hspace{2cm})$

A. $\complement_U A$ B. B C. $\emptyset$ D. $\{(2, 3)\}$

6. 若集合 $S = \{y | y = 3^x, x \in \mathbb{R}\}$, $T = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $S \cap T$ 是 $(\hspace{2cm})$

A. S

B. T

C. $\emptyset$

D. 有限集

7. 若 $a \in \mathbb{R}$, 且对于一切实数 x , 都有 $ax^2 + ax + a + 3 > 0$, 那么 a 的取值范围是 $(\hspace{2cm})$

A. $(0, +\infty)$

B. $[0, +\infty)$

C. $(-\infty, 4)$

D. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

8. 定义 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$, 若 $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N = \{2, 3, 5\}$, 则 $M - N =$

综合能力题

9. 含有 5 个元素的集合 A 的真子集的个数为 m , 由 A 中 3 个元



素组成的真子集个数为 n , 则 $\frac{n}{m} =$ _____.

10. 关于 x 的方程 $3x^2 - 6x + ax = 0$ 的两根 x_1, x_2 , 已知 $x_1 \in (-2, 0), x_2 \in (\frac{1}{2}, 3)$, 则 a 的取值范围是 _____.

11. 设集合 $A = \{x | |x - a| < 2\}, B = \{x | \frac{2x-1}{x+2} < 1\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

12. 已知集合 $A = \{x | x^2 + (P+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, 求实数 P 的取值范围.

高考拔尖题

13. 已知不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$ 的解集是 $\{x | \alpha < x < \beta, 0 < \alpha < \beta\}$, 求不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集.
14. 解关于 x 的不等式 $(m+1)x^2 - 4x + 1 < 0$.

高考模拟题

15. 设函数 $y = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ 的定义域为集合 A , 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} ax > 0 \\ 2ax < a+x \end{cases} (a \in \mathbb{R}^+)$ 的解集为 B , 求使 $A \cap B = A$ 的实数 a 的取值范围.



高考 自我挑战

高考数学复习一般分为三轮: 第一轮是以突出基础知识和基本技能的训练为重点, 落实好每一个知识点; 第二轮以突出数学思想方法和综合能力为重点的专题复习, 旨在提高学生运用

所学知识解决问题的能力; 第三轮以查漏补缺及模拟训练为主. 经过三轮的系统复习, 学生能熟练掌握中学数学知识网络结构和知识间的联系, 将知识内化为能力, 使学生的解题能力、解决实际问题的能力都有较大的提高.



高考 自我挑战

1. 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是 ()
 A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
 C. $\{x | -1 < x < 1\}$ D. $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
 (2002, 全国)
2. 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
 (2002, 北京)
3. 集合 $S = \{a, b, c, d, e\}$, 包含 $\{a, b\}$ 的 S 的子集共有 ()
 A. 2 个 B. 3 个 C. 5 个 D. 8 个
 (2003, 全国春)
4. 设集合 $A = \{x | x^2 - 1 > 0\}$, 集合 $B = \{x | \log_2 x > 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
 A. $\{x | x > 1\}$ B. $\{x | x > 0\}$
 C. $\{x | x < -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
5. 设集合 $A = \{x | |x| < 4\}, B = \{x | x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x | x \in A, \text{ 且 } x \in A \cap B\} =$ _____.
 (2003, 上海)

第2讲 简易逻辑



高考命题聚焦

·命题热点

1. 命题的基本知识, 复合命题的构成, 逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义.
2. 四种命题及其相互关系, 充要条件及其意义.
3. 反证法.
- 学科渗透

1. 逻辑知识在高考中虽然很少刻意去考查, 但实际上, 包含逻辑知识的试题却无处不在, 这是无法回避的.
2. 与计算机、物理学知识联系紧密, 如计算机的“智能”装置, 电路中“或门电路”、“与门电路”等.



高考考前练习

生: 本专题知识在考题中难度如何把握?

师: 本专题知识在高考命题中, 一般出较容易的选择题、填空题, 但反证法知识则可能出中等难度的解答题.

生: 该专题知识属高考新增内容, 复习时如何掌握好“度”?

师: 该专题知识点在 2003 年全国新课程卷, 江苏卷试题中均未出现, 但北京卷 2002 年, 2003 年试题均在选择题中考查了充要条件知识, 因此 2005 年该专题知识点复习要引起重视.



高考题型巧解巧练

高考题型(1): 命题的相互关系

方法规律: 熟练掌握四种命题间的关系, 并能应用原命题与其逆否命题的真值相同来解题, 熟练掌握复合命题真值表.

【典例巧解 1】

下列命题中, 真命题的个数是 ()

- ①若“ p 且 q ”“ p 或 q ”都是假命题, 则“非 p 且非 q ”是真命题
- ② $x^2 \neq y^2 \Rightarrow x \neq y$ 或 $x = -y$
- ③命题“存在一个实数 x , 使得 $x^2 + x + 1 \leq 0$ ”的否定是“对所有的实数 x , 有 $x^2 + x + 1 > 0$ ”
- ④若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0 (a \neq 0)$ 的解集是 $\mathbb{R}$ 的充要条件是: $a > 0$, 且 $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

思路: 利用复合命题真值表, 分析命题真假, 写出其他三种命题形式.

解: ①是真命题. 因为“ p 且 q ”与“ p 或 q ”为假, 则“非 p 假, q

假”, 所以“非 p 且非 q ”为真.

②为假命题. 因为“ $x^2 \neq y^2 \Rightarrow x \neq y$ 或 $x \neq -y$ ”, 但 $x \neq y$ 或 $x \neq -y \nRightarrow x^2 \neq y^2$.

③为真命题. 因为该命题是对原命题的否定, 但不是原命题的否命题.

④为真命题. 由函数与方程知识, 一元二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 图象在 x 轴上方, 则 $a > 0$, 且 $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$.

故此题选择 D.

点评: (1) 判断一个命题是真命题, 应作出相应证明, 判断一个命题是假命题只需举出一个反例.

(2) 注意区分“非命题与否命题”, 非命题是否定命题的结论, 否命题是将条件和结论都进行否定.

(3) “ p 或 q ”的否定是“非 p 且非 q ”.

【活学活用】

1. 写出下列四个命题

①“若 $xy=1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题是 _____

②“相似三角形的周长相等”的否命题是 _____

③“若 $b \leq -1$, 则方程 $x^2 - 2bx + b^2 + b = 0$, 有实根”的否命题是 _____

④“若 $A \cup B = B$, 则 $B \subseteq A$ ”的逆否命题是 _____

其中真命题序号是 _____.

高考题型(2): 充要条件

方法规律: 分清条件与结论, 充要条件问题证明: 充分性是: 条件 $\Rightarrow$ 结论; 必要性是: 结论 $\Rightarrow$ 条件.

【典例巧解 2】

设 $x, y \in \mathbb{R}$, 求证 $|x+y| = |x| + |y|$ 成立的充要条件是 $xy \geq 0$.

思路: 条件是“ $xy \geq 0$ ”, 结论是“ $|x+y| = |x| + |y|$ ”. 充分性是由 $xy \geq 0$, 证 $|x+y| = |x| + |y|$; 必要性是由 $|x+y| = |x| + |y|$, 证 $xy \geq 0$.

证明: 充分性: (1) 若 $xy=0$, 则 $x=0$ 或 $y=0$,

此时 $|x+y| = |x| + |y|$;

(2) 若 $xy > 0$, 则 $x > 0, y > 0$ 或 $x < 0, y < 0$,

当 $x > 0, y > 0$ 时, $|x+y| = |x| + |y|$,

当 $x < 0, y < 0$ 时, $|x+y| = -x - y = |x| + |y|$.

总之, 当 $xy \geq 0$ 时, 有 $|x+y| = |x| + |y|$.

必要性: 若 $|x+y| = |x| + |y|$, 且 $x, y \in \mathbb{R}$.

将等式两边平方有 $|x+y|^2 = (|x| + |y|)^2, |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$,

即 $x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$.

于是 $xy = |x||y|$.

即 $xy \geq 0$.

点评:(1)分清题目条件与结论,不得混淆.

(2)证明过程中,分类不得遗漏.

(3)掌握充分条件、必要条件、充要条件和既不充分又不必要条件的意义,能判别两个命题之间的关系.

【活学活用】

2. 已知条件 $p: A = \{x | |x - \frac{(a+1)^2}{2}| \leq \frac{(a-1)^2}{2}\}$, 条件 $q: B = \{x | x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0\}$, 若条件 p 是条件 q 的充分条件, 求实数 a 的取值范围.

高考题型(3): 反证法

方法规律: 用反证法证题的方法是:(1)假设结论不成立, 即结论的反面成立;(2)由此假设出发, 利用已知条件、结论, 推理论证, 得出矛盾的结论;(3)由矛盾判定假设不成立, 得到所要证明的结论.

【典例巧解3】

用反证法证明: 如果 $p > 0, q > 0$, 且 $p^3 + q^3 = 2$, 求证: $p + q \leq 2$.

思路: 运用反证法的证题步骤证明, 证明过程注意恒等变形.

解: 假设 $p + q > 2$.

$$\text{则 } (p+q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p+q) > 8$$

$$\text{由已知 } p^3 + q^3 = 2,$$

$$\text{有 } 2 + 3pq(p+q) > 8, \text{ 即 } pq(p+q) > 2.$$

$$\text{于是 } pq(p+q) > p^3 + q^3 = (p+q)(p^2 + q^2 - pq),$$

$$\text{即 } pq > p^2 + q^2 - pq, \text{ 即 } (p-q)^2 < 0.$$

这与一个数(或式)的平方为非负数矛盾, 故 $p + q \leq 2$.

点评:(1)用反证法证题的步骤: ①假设命题的结论不成立, 即假设结论的反面成立; ②从这个假设出发, 经过推理论证得出矛盾; ③判定假设不成立, 从而肯定命题的结论正确.

(2)矛盾含义包含实际生活经验、定义、定理、法则及题设等方面.

【活学活用】

3. 用反证法证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是增函数, 那么方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上至多只有一个实根.



高考能力闯关

是基本能力题

- 已知 A 和 B 是两个命题, 如果 A 是 B 的充分不必要条件, 那么 B 是 A 的 _____ 条件, $\neg A$ 是 $\neg B$ 的 _____.
- 命题“若 a, b 是偶数, 则 $a+b$ 是偶数”的非命题是 _____.

_____, 否命题是 _____.

3. 四个条件: (1) $b > 0 > a$; (2) $0 > a > b$; (3) $a > 0 > b$; (4) $a > b > 0$ 中, 能使 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的充分条件的是 _____.

4. 下列命题中是真命题的序号为 _____.

- (1) 原命题为真, 它的逆命题不一定是真;
- (2) 原命题为真, 它的否命题不一定是真;
- (3) 原命题为真, 它的逆否命题一定是真;
- (4) 一个命题的否命题为真, 则它的逆命题一定是真.

5. 已知全集 $U = \mathbb{R}, A \subseteq U, B \subseteq U$, 如果命题 $p: \sqrt{3} \in A \cup B$, 则“非 p ”是 _____.

- A. $\sqrt{3} \notin A$ B. $\sqrt{3} \in \complement_U B$
C. $\sqrt{3} \notin A \cap B$ D. $\sqrt{3} \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

6. 下列命题是真命题的是 _____.

- A. 对所有的正实数 $x, \sqrt{x}$ 为正, 且 $\sqrt{x} < x$
B. 对实数 x , 若 $x^2 - 3x - 4 = 0$, 则 $x^2 - 3x - 4 \geq 0$
C. 不存在实数 x , 使得 $x < 4$ 且 $x^2 + 5x = 24$
D. 存在实数 x , 使得 $|x+1| \leq 1$ 且 $x^2 > 4$

7. 命题 $p: (x-1)(y-2) > 0$, 命题 $q: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$, 则命题 p 是命题 q 的 _____.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

8. 用反证法证明命题“ $a, b \in \mathbb{N}^*$, ab 可被 5 整除, 那么 a, b 中至少有一个能被 5 整除”, 那么假设的内容是 _____.

- A. a, b 都能被 5 整除 B. a, b 都不能被 5 整除
C. a 不能被 5 整除 D. a, b 有一个不能被 5 整除

综合能力题

9. 已知 A 是 B 的充分条件, B 是 C 的充要条件, C 是 A _____ 的条件.

10. 已知命题 $p: 3$ 是质数, 命题 $q: 2$ 是合数, 试写出 p 或 q, p 且 q , 非 p 三种命题, 并判断其真假.

11. 设 α, β 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个实根, 试分析 $a > 2$ 且 $b > 1$ 是两根 α, β 均大于 1 的什么条件?

12. 用反证法证明: 若 a, b, c 均为实数, 且 $a = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2}, b = y^2 - 2x + \frac{\pi}{3}, c = z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$, 求证: a, b, c 中至少有一个大于 0.

高考拔尖题

13. 试证关于 θ 的方程 $\cos^2 \theta + a \cos \theta + 1 = 0$ 的有解的充要条件是 $|a| \geq 2$.

高考预测题

14. 设 p 是 s 的充分而不必要条件, q 是 s 的充分条件, t 是 s 的必要条件; t 是 q 的充分条件, 则

- (1) t 是 s 的 _____ 条件.
- (2) p 是 q 的 _____ 条件.
- (3) $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 _____ 条件.



高考 命题预测

简易逻辑知识属新教材新增的内容, 在复习中, 训练试题难度在容易题或中档题之间, 注意该知识内容与实际生活的联系, 以加深对该知识理解.



高考 命题预测

1. 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么

" $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ " 是 " $M = N$ " 的 _____ ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分又不必要条件

2. " $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ " 是 " $\alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$ " 的 _____ ()

- A. 必要不充分条件
- B. 充分不必要条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分又不必要条件

(2003, 北京)

3. 函数 $y = x^2 + bx + c$ ($x \in [0, +\infty)$) 为单调函数的充要条件是 _____ ()

- A. $b \geq 0$
- B. $b \leq 0$
- C. $b > 0$
- D. $b < 0$

4. 函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数的充要条件是 _____ ()

- A. $ab = 0$
- B. $a + b = 0$
- C. $a = b$
- D. $a^2 + b^2 = 0$

(2002, 全国)

第3讲 函数及其性质



高考命题聚焦

• 命题热点

1. 映射、函数、一一映射的概念及其作为基本语言的工具。
2. 函数的性质：包括对定义域、奇偶性、单调性、周期性定义的了解或理解。

3. 函数性质的定义及深层次内涵的运用。

4. 对函数在抽象函数中的体现的准确把握。

• 学科渗透

1. 函数作为工具在方程、数列、立几、解几的运用是相当频繁的，它贯穿于整个高中数学。函数的思想是一种重要的数学思想。

2. 函数在实际生活中的应用。



高考命题预测

生：函数在高考中一般占多大的比例？为什么函数在整个高中数学学习中占有相当重要的地位？

师：高中中单考函数的知识一般占整份试卷的15%~20%，但是，加上三角函数及数列、立几、解几中的函数问题，大约占50%。因此，学好函数，等于学好了数学的一半。

生：近几年高考对抽象函数的考查比较多，我们见到这样的题目就比较烦，应该怎样应对？

师：抽象函数并不可怕，应对方法一是赋值法，二是正确运用函数性质的定义，转化、变形就可以了。



高考题型 巧留马练

高考题型(1)：函数的单调性的证明及应用

方法规律：判断函数的单调性有几种方法：一是利用单调函数的定义，二是利用复合函数单调性判断方法，三还可以用求导法。

【典例巧解1】

设函数 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - ax$ ，其中 $a > 0$ ，求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数。

思路：从单调函数的定义或求导数出发，通过使不等式恒成立的条件进行分析、比较，最后综合得出结论。

解：方法一：设 $0 \leq x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_2) - f(x_1) &= \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} - a(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1) \left(\frac{x_2 + x_1}{\sqrt{x_2^2+1} + \sqrt{x_1^2+1}} - a \right) \end{aligned}$$

①当 $a \geq 1$ 时，

$$\therefore 0 < x_1 + x_2 < \sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} < 1$$

又 $x_2 - x_1 > 0$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) < 0, \text{ 即 } f(x_2) < f(x_1)$$

②当 $a \geq 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调减函数。

②当 $0 < a < 1$ 时，

$$\therefore f(0) = 1, \quad f\left(\frac{2a}{1-a^2}\right) = 1, \text{ 且 } \frac{2a}{1-a^2} > 0,$$

③当 $0 < a < 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不是单调函数。

$$\text{方法二：} f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - a$$

$$\text{①令 } f'(x) < 0 \text{ 得：} a > \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore 0 \leq x < \sqrt{x^2+1}, \quad \therefore 0 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1.$$

$$\text{由 } a > \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ 恒成立得：} a \geq 1,$$

④当 $a \geq 1$ 时， $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上递减。

②同方法一：当 $0 < a < 1$ 时，由 $f(0) = f\left(\frac{2a}{1-a^2}\right) = 1$ 知，函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不是单调函数。

点评：关于函数单调性问题，在以下几种类型：一是证明函数的单调性，二是根据单调性比较数的大小，三是根据单调性列出不等式或证明不等式，四是根据单调性求参数的范围，如本例。

【活学活用】

1. 设 $f(x) = \lg \frac{1+2^x+\dots+(n-1)^x+n^x}{n}$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ ， $n \in \mathbb{N}^+$ 且 $n \geq 2$ ，如果 $f(x)$ 在 $x \in (-\infty, 1]$ 上有意义，求 a 的取值范围。

高考题型(2)：函数的奇偶性及其他

方法规律：函数的奇偶性与其他性质是紧密相联的，只有在定义域上恒有 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(-x) = -f(x)$ ，才能断定 $y = f(x)$ 是偶函数还是奇函数。

【典例巧解2】

$$\text{设 } a \in \mathbb{R}, f(x) \text{ 为奇函数，且 } f(2x) = \frac{a^2 \cdot 4^x + a - 2}{4^x + 1}$$

①试求 a 的值及 $f^{-1}(x)$

②设 $g(x) = \log_{\frac{1}{k}} \frac{1+x}{k}$ ，若 $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ ， $f^{-1}(x) \leq g(x)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围。

思路：由 $f(x)$ 为奇函数，则对任意 x ，都应该有 $f(-x) =$

$-f(x)$,由此用待定系数法求出 a ,而第②问应该用化归的思想将其转化为最值问题.

$$\text{解: ①由题意 } f(2x) = \frac{a \cdot 2^x + a - 2}{4^x - 1},$$

$$\text{则 } f(x) = \frac{a \cdot 2^x + a - 2}{2^x - 1}$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数

$$\therefore f(-x) = \frac{a \cdot 2^{-x} + a - 2}{2^{-x} - 1} = -f(x) = -\frac{a \cdot 2^x + a - 2}{2^x - 1}$$

$$\text{即 } \frac{a + (a - 2) \cdot 2^x}{2^x - 1} = -\frac{a \cdot 2^x + a - 2}{2^x - 1}$$

$$\Leftrightarrow (2a - 2)(2^x + 1) = 0$$

$$\therefore 2^x + 1 \neq 0$$

$$\therefore a = 1 \quad \therefore f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x - 1} = y,$$

$$\text{则 } 2^x = \frac{1+y}{1-y} \quad \therefore f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x} (-1 < x < 1)$$

② $\because$ 当 $x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ 时, $f^{-1}(x) \leq g(x)$ 恒成立,

$$\text{即 } \log_2 \frac{1+x}{1-x} \leq \log_2 \frac{1+x}{k}$$

$$\therefore \log_2 \frac{1+x}{1-x} \leq \log_2 \left(\frac{1+x}{k} \right)^2 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} \leq \left(\frac{1+x}{k} \right)^2 \quad ①$$

$$\text{又 } \because x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \quad \therefore 1-x > 0, 1+x > 0, k > 0$$

$$\therefore \text{不等式①化为: } k^2 \leq 1-x^2, \text{ 令 } t = 1-x^2,$$

则函数 $t = 1-x^2$ 在 $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ 上单调递减,

$$\therefore \text{当 } x = \frac{2}{3} \text{ 时, } t_{\min} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9},$$

$$\therefore k^2 \leq \frac{5}{9} \quad \therefore k > 0$$

$$\therefore 0 < k \leq \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

点评:① $f(x)$ 在 R 上是奇函数,则 $f(0)=0$,可用于第①问中求 a 的值,但这是 $f(x)$ 为奇函数的必要条件,严格地说,用这种方法求出 $a=1$ 后,还需验证 $f(x)$ 是否为奇函数,否则,该值就不是所求的值.

②关于 $a \leq g(x)$ 对 x 取任意值恒成立的问题,只需

$$a \leq g(x)_{\min} \text{ 且 } a \geq p(x) \text{ 恒成立,只需 } a \geq p(x)_{\max}.$$

【活学活用】

2. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数,它的图象关于直线 $x=2$ 对称,已知 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$,求 $x \in [-b, -2]$ 时, $f(x)$ 的表达式.

高考题型(3):抽象函数问题、奇偶性与对称性及其衍生的周期性

方法规律:由于没有函数的具体的解析式,而又具有基本初等函数的一些性质,所以把这样一些函数叫抽象函数,应对策略见高考考向探讨.

【典例巧解3】

设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数,其图象关于直线 $x=1$ 对

称,对任意的 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$,都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$,且 $f(1) = a > 0$.

$$(1) \text{求 } f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right).$$

(2)证明 $f(x)$ 是周期函数.

$$(3) \text{记 } a_n = f(2n + \frac{1}{2n}), \text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n).$$

思路:求特殊点的函数值,一般用赋值法,周期函数的证明利用周期函数的定义, a_n 的求法可以从特殊值推断出一般情况下的值.

$$\text{解: (1) 对 } x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}],$$

$$\text{都有 } f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

$$\therefore f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, x \in [0, 1].$$

$$\text{又 } \because f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f^2\left(\frac{1}{2}\right) = a$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a}.$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = f^2\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{a} \quad \therefore f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt[4]{a}.$$

(2)依题设 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称,

$$\text{故 } f(x) = f(2-x) \quad (x \in R)$$

$$\text{又由 } f(x) \text{ 是偶函数知 } f(-x) = f(x) \quad (x \in R)$$

$$\therefore f(-x) = f(2-x) \quad \text{即 } f(x) = f(x+2)$$

这表明 $f(x)$ 是有一个周期为2的函数.

(3)由(1)知: $f(x) \geq 0, x \in [0, 1]$,

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(n + \frac{1}{2n}\right) = f\left[\frac{1}{2n} + (n-1)\frac{1}{2n}\right]$$

$$= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left[(n-1) \cdot \frac{1}{2n}\right] = \dots$$

$$= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right) \dots f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^n = a^{\frac{1}{2n}}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2n}\right) = a^{\frac{1}{2n}}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的一个周期是 } 2, \therefore f(2n + \frac{1}{2n}) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

因此, $a_n = a^{\frac{1}{2n}}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \ln a\right) = 0$$

点评:(1)本题是一道高考题,属于分层递进式的题目,从 $f(1)$ 到 $f(\frac{1}{2})$,从 $f(\frac{1}{2})$ 再到 $f(\frac{1}{4})$.但是,求 $f(\frac{1}{2n})$ 时,一般学生就不会思考了,当年也就是(3)这一问把绝大部分同学难住了,正确的思路应该是: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}, \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n},$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{2}{6}\right) f\left(\frac{1}{6}\right) = \left[f\left(\frac{1}{6}\right)\right]^2, \dots,$$

