高考总复习

聚焦新题型

2005

根据新课程最新《考试说明》编写

热点题型+创新题型　高考题型一网打尽

基础题+综合题+拔尖题　高考能力梯度闯关

数学

丛书主编：何传忠

本册主编：王登平

教育科学出版社

FOCUS 聚焦图书

·聚焦最佳设计丛书·

2005 高考总复习

聚焦新题型

FOCUS NEW TEST MODEL

丛书主编：何传忠

本册主编：王登平

副 主 编：高正国　付　其　杨受宇

编　　委：严奉军　付　其　李俊福

王登平　邓诗锐　杨受宇

高正国　张新坤

数学

教育科学出版社

·北　京·

执行策划　严　忠
责任编辑　陈春勇　严　忠
责任印制　曲凤玲

图书在版编目(CIP)数据

聚焦新题型. 数学. 2005年高考总复习/王登平主编, 北京：教育科学出版社，2004. 4
（聚焦最佳设计丛书/何传忠主编）
ISBN 7－5041－2791－4

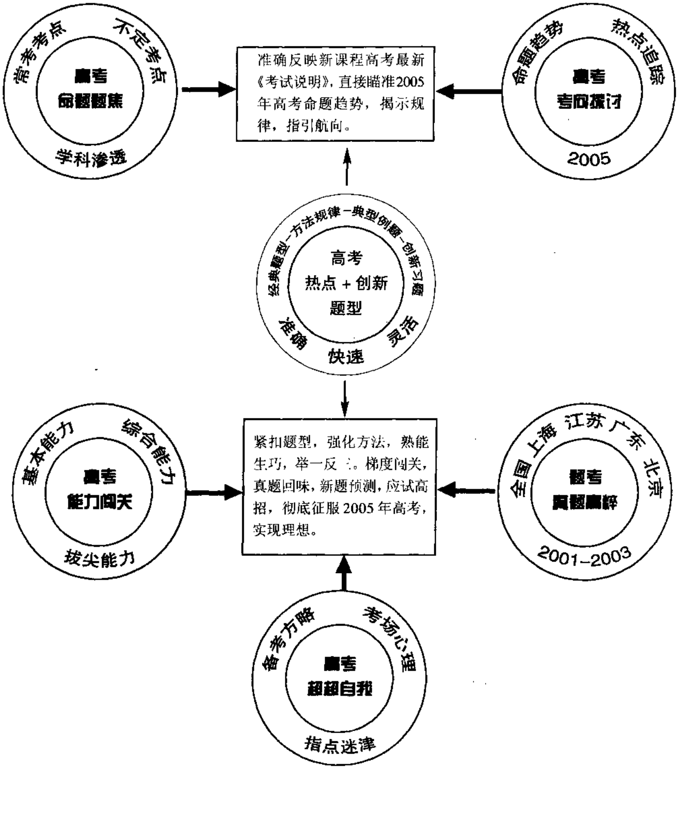
Ⅰ. 聚...　Ⅱ. 王...　Ⅲ. 数学课－高中－解题－升学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第032290号

出版发行	教育科学出版社	市场部电话	010－62003339
社　址	北京·北三环中路46号	网　址	http://www.esph.com.cn
邮　编	100088		
传　真	010-62013803		
经　销	各地新华书店		
印　刷	北京时代华都印刷有限公司		
开　本	889毫米×1194毫米　1/16		
印　张	138.25	版　次	2004年4月第1版
字　数	4353千	印　次	2004年4月第1次印刷
定　价	168.00元(全套共9册)	印　数	1　42 000册

导读图示

本书**不是**一般性的题解书，**不是**“题典”，**不搞**题海战术。它**是**“以题型为纲”，**是**高考备考研究专家、命题研究专家经过深入研究、分析、归纳而提炼出的题型，也是在2005年高考命题中最重要的和最可能考查的题型，并涉及这些题型的解题方法和规律。它还通过科学、实用的体例设计，让你使用本书后，迅速拔高**准确、快速、灵活的解题能力**，顺利实现高分理想。为了让你快速了解本书的内容并取得最佳的学习效果，请你在使用之前先阅读下面**图示**：



·复习指导·

高三复习如何事半功倍?

高三复习如何做到事半功倍呢？为此，我们走访了全国十几所重点中学的数十名特级教师和考入北大、清华的状元们，他们对此做了较精辟的指点，在此展现出来，以期对即将进入高三复习的学生有所帮助。

语文：

特级教师：1.先做一套完整的与高考难度接近的模拟题，找准自己的弱项，对症下药，制定出自己这一年的复习计划，最好细化到每周。2.夯实课本，积累、归纳、总结基础知识，扫除知识盲点，不能因某个知识点分值不高而弃之，因为弃的东西多了，加在一起丢分就不少了。

状元支招：1.对于阅读，坚持每天一读，可以是优秀文章，也可以是阅读题。2.对于作文，最基本的是求稳，再求适度的创新。平时多积累写作素材，多背诵一些优美段落。通过看书或杂志，挑选一些新颖的有寓意的小片段，在作文中适当应用，不但可充实内容，还会让文篇显得新颖别致。3.准备一个错题本，将多次练习、测试中的错题加以总结，找准自己的薄弱环节，各个击破。4.常将一些易错的字音、字型、成语、近义词等记录下来，不断复习巩固，以加深印象。5.对于文言文阅读，通过掌握尽可能多的实词、熟记常用虚词来提高文言文阅读能力；另外，也可坚持每天做一篇文言文练习，这样一段时间后，您的语感定会大有提高

数学：

特级教师：1.弄清教材的基本概念、定义及其适用范围和条件。2.保持适当的练习，特别注意对各个知识点所考题型进行归纳和总结，找出该题型的解题思路和方法，做到以不变应万变。3.注意各知识点的和多种思想方法的综合运用。

状元支招：1.准备一本小册子，将所有的概念、公式准确地记下来。2.准备另一本小册子，将命题新颖、解法独到的题记下来，反复思考、认真体会。3.准备一个错题本，将易错题加以总结、归纳，过一段时间并重做一遍。4.做题——思考——做题，这是提高解题技巧和开阔思维的必经之路。

英语：

特级教师：1.将高中所学的单词分为必记、运用、了解三类，分配到各个阶段，有计划复习记忆，最好能放到某句话或某个段落里去记忆。2.将语法系统分类学习，注意特殊用法和特殊情况，及时通过做题来巩固该语法点。3.每天听10~20分钟英语广播，并试着复述或跟读。

状元支招：1.定期重复记忆，攻克单词关，每天25个单词为宜。2.做题后及时总结、记录、核对相应语法点，并定期回顾翻阅该记录本，解决语法难关。3.养成定时阅读的好习惯，每天2~3篇为宜。4.多读一些较简单的英语报刊，速度要快，读完后试着用英文复述一遍大意，这样既提高了阅读速度，又锻炼了英文表达。

文科综合：

特级教师：1.立足教材，提取框架，形成网络。2.纵向联系，串联各知识点，形成题型，将知识点和对应的题型结合起来记忆和思考。3.联系热点材料，紧扣社会生活，如最新科技和环境问题、时政热点话题等，找准与之相对应的知识点，进行多角度思考。

状元支招：

政治：1.先背知识点，形成框架，再往里填充内容。2.将知识串联，形成网络。3.研究高考大题，形成正确的答题结构。4.在高考前以时政热点作为线索与载体，综合各基础知识点，提高综合分析能力。

历史：1.学会多种记忆方法：比较记忆法——如根据各条线索比较记忆；浏览记忆法——多翻几遍课本，可随意翻；联想记忆法——不看书，将某一章节的内容在大脑中过一遍；选择记忆法——如背历史年代，并不需要将每一个历史事件发生的年代都记下来，要善于选择，去粗取精。2.多提出问题、思考问题，如根据不同材料进行多角度思考。3.归纳总结，形成体系。任何一个历史问题都是由各个条件促成和组成的，可以把它们一一写出来，最后将零散的知识串起来，组成一个体系。

地理：1.以知识为线，识图当先；2.注意专题归纳、结合社会热点问题，如环境污染、气候变暖、地震灾害等问题，进行纵向和横向思考。

理科综合：

特级教师：1.掌握基本概念、公式、原理，特别注意这些原理的使用条件和范围；另外，还要注意一些易混淆概念的区分与运用。2.掌握各种题型，触类旁通。3.注意文字表述的专业性、规范性和严密性，这是同学们容易忽视和丢分的地方。

状元支招：1.整理知识点，挖掘定理的深层次内容。怎样挖掘呢？方法就是努力寻找不满足定理条件的情况来问自己，看看该如何解决，这样您在下次碰到类似情况时，就知道该公式是否适用，并且知道该如何解决了。2.注意错题总结和及时回顾错题所涉及的知识点。3.注意实验，高考绝不会将原实验照搬，一般都是经过变化或重新组合了的。因此必须掌握每一步骤的关键点和所起的作用。4.要做一定量的习题，一方面通过做题来强化知识点，加深对定理、公式、概念的记忆；另一方面也易发现自己的薄弱环节。但做题一定要学会思考，做题前，可以想一想它的考查点在哪里，涉及哪几方面的知识；做题后，多思考一下是否有其他解法，若变化角度可能会怎样出题等，最好能归纳出该类题型的通解方法。

最后，在考前特别注意心态的调整，不急不燥、不要有太大的压力。考前几天可以做几套较容易的模拟题，这对保持最佳的考试状态很重要。总之，在高三复习中，同学们只要具备了完善的知识结构、正确的学习方法、良好的心态、再加上老师的正确引导，就一定能成功。

目 录

第1讲 集 合

高考命题聚焦

·命题热点

1.集合的基本特征,集合的表示方法,元素与集合的关系,集合与集合的关系,集合的运算.

2.绝对值不等式,一元二次不等式及简单的分式不等式的解法.

·学科渗透

1.以集合语言为工具考查其他知识内容,如用有关术语、符号、数轴与韦恩图解决实际应用问题.

2.不等式知识渗透于中学数学的各个方面,属高考的必考内容.

高考考向探讨

生:*集合在高考试题中是如何体现的?*

师:集合是每年高考必考的知识点之一,主要考查集合的概念,集合的交、并、补运算及有关术语、符号、数轴与韦恩图.

同时,集合概念是研究函数、方程与不等式的基础,贯穿中学数学始终.

生:*试题表现形式如何?*

师:题型多为选择题、填空题,以容易题居多,但以集合语言为工具的中等难度的选择题、填空题也可能出现,解答题中单纯的集合试题不可能出现.

高考题型巧解巧练

> **高考题型(1):集合的概念及集合的相关关系**
>
> **方法规律**:解答集合问题,首先要认真审题,弄清题目要求;其次要正确理解各集合及符号的涵义、变形,同时学会简化集合、寻求集合的相关关系.

【典例巧解1】

设集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,则 ( )

A. $M=N$ B. $M\subsetneqq N$ C. $M\supsetneqq N$ D. $M\cap N=\varnothing$

(2002年全国高考题)

思路:可从集合的概念及整数的性质等方面思考.将集合 M、N 中元素分别变形为 $x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}$,$(k\in\mathbf{Z})$

$x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}$,$(k\in\mathbf{Z})$

再考虑数 $2k+1$ 与 $k+2(k\in\mathbf{Z})$ 之间的关系就清楚了.

解:对集合 M,$x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$

对集合 N,$x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$

当 k 取整数时,

有 $M=\{\cdots,-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}\cdots\}$

$N=\{\cdots,-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\cdots\}$

$\therefore M\subsetneqq N$ 选 B.

点评:(1)本题直接从集合元素的表达式出发,将集合等价转换为熟悉的、简单的集合再进行判别,这是一种常见的解题策略.

(2)本题也可从分式结构出发,运用整数奇偶性求解,但由于题目的特殊结构,可取 $K=1,2,3\cdots$ 即可简捷求解.

【活学活用】

1.已知集合 $M=\{x|x=\cos\frac{n\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\sin\frac{(2m-3)}{6}\pi,m\in\mathbf{Z}\}$,则 M 与 N 满足 ( )

A. $M\subsetneqq N$ B. $M=N$ C. $M\supsetneqq N$ D. $M\cap N=\varnothing$

> **高考题型(2):一元二次函数、方程与不等式、集合的运算**
>
> **方法规律**:一元二次函数和图象,一元二次方程的根及一元二次不等式的解集,可以相互转化.一元二次不等式的解集的端点是一元二次方程的根,也是一元二次函数图象与坐标系中 x 轴交点的横坐标,考生要学会根据集合的关系发现集合的意义.

【典例巧解2】

已知集合 $A=\{x|\frac{2x-3}{x+5}<0\}$,$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant0\}$,且 $A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=\{x|-5<x\leqslant2\}$,求实数 a、b 的值.

思路:先解分式不等式 $\frac{2x-3}{x+5}<0$,确定集合 $A=\{-5<x<\frac{3}{2}\}$.借助于 $A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=\{x|-5<x\leqslant2\}$,分析知 $B=\{\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant2\}$,由韦达定理可以求出 a、b 的值.

解:解分式不等式 $\frac{2x-3}{x+5}<0$,得 $-5<x<\frac{3}{2}$

于是,$A=\{x|-5<x<\frac{3}{2}\}$

设 $x^2+ax+b=0$ 的两根为 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$

且 $B=[x_1,x_2]$

$\because A\cap B=\varnothing$,$\therefore x_1\geqslant\frac{3}{2}$,或 $x_2<-5$

又 $A\cup B=[-5,2]$

$\therefore B=\{x|\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2\}$

即不等式 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 的解集是 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$

由韦达定理得 $a=-\frac{7}{2}$，$b=3$

点评：(1)用描述法表示集合，考虑化简集合.

(2)掌握分式不等式，一元二次不等式的解法及韦达定理的应用.

(3)善于从集合与集合的关系中分析集合的意义.

【活学活用】

2. 设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+2=0\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a.

> **高考题型(3)：集合的应用**
>
> **方法规律**：应用集合的观点分析和认识数学现象，可以更深刻地揭示问题的本质；存在型探索性问题将思维空间拓展、开放；分类讨论则体观集合并、交的思想.

【典例巧解 3】

已知集合 $A=\{y|y=(\frac{1}{2})^x,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x|(m+6)x^2+2mx+1\leqslant 0\}$，是否存在实数 m，使 $B\subseteq A$ 成立，并说明理由.

思路：这是存在型探索性问题，先假设实数 m 存在，然后在假设成立的前提下推理和论证. 由指数函数 $y=(\frac{1}{2})^x(x\in\mathbf{R})$ 的值域知 $A=\mathbf{R}^+$. 再由 $B\subseteq A$ 转化为关于 m 的一元二次不等式 $(m+6)x^2+2mx+1\leqslant 0$ 是否存在正实数根问题，借助一元二次函数图象加以分析，讨论.

解：假设符合题目条件中的实数 m 存在.

由 $y=(\frac{1}{2})^x$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$y>0$，即 $A=\mathbf{R}^+$，

对 B 中不等式：$(m+6)x^2+2mx+1\leqslant 0$

(1)当 $m+6=0$，即 $m=-6$ 时，

有 $B=\{x|x\geqslant\frac{1}{12}\}$，$B\subseteq A$

(2)当 $m+6<0$，即 $m<-6$ 时，

有 $\triangle=4m^2-4(m+6)>0$

此时 $x\leqslant\frac{-m+\sqrt{m^2-(m+6)}}{m+6}<0$

或 $x\geqslant\frac{-m-\sqrt{m^2-(m+6)}}{m+6}>0$，有 $B\subseteq A$ 不成立.

(3)当 $m+6>0$，即 $m>-6$ 时，

①$\triangle=4m^2-4(m+6)<0$，即 $-2<m<3$，

有 $B=\varnothing$，$B\subseteq A$

②$\begin{cases}\triangle=4m^2-4(m+6)\geqslant 0\\ x_1+x_2=\frac{-2m}{m+6}>0\\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{m+6}>0\end{cases}$

解之得 $-6<m\leqslant -2$

有 $B=\{x|0<x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$，$B\subseteq A$

综上所述，存在 m，且 $m\in[-6,3)$ 时，$B\subseteq A$ 成立.

点评：含参变量的存在型问题是数学探索性问题的一种常见题型. 其基本解题思路是：

(1)假设满足题设的参变量存在；

(2)在假设存在的前提下进行推理论证和运算；

(3)得出结论，如果能求出满足条件的参数值，则假设成立，否则不成立.

【活学活用】

3. 对于集合 $A=\{x|x^2-2ax+4a-3=0\}$，$B=\{x|x^2-2\sqrt{2}ax+a^2+a+2=0\}$，是否存在实数 a，使 $A\cup B=\varnothing$ 成立，若存在，求出 a 值；若不存在，请说明理由.

高考能力闯关

基本能力题

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*|\frac{12}{6-x}\in\mathbf{N}^*\}$，用列举法表示集合 $A=$ ________.

2. 已知集合 $A=\{1,2\}$，集合 B 满足 $A\cup B=\{1,2\}$，则这样的集合 B 有______个.

3. 设集合 $M=\{x|-1\leqslant x<2\}$，$N=\{x|x\leqslant a\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$，则 a 的取值范围是________.

4. 不等式 $2x+3-x^2>0$ 的解集是 ( )

A. $\{x|-\frac{3}{2}\leqslant x<1\}$　B. $\{x|-1<x<3\}$

C. $\{x|1\leqslant x<3\}$　D. $\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$

5. 若全集 $U=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|y=x+1,x,y\in\mathbf{R}\}$，则 $(\complement_U A)\cap B$ 是 ( )

A. $\complement_U A$　B. B　C. $\varnothing$　D. $\{(2,3)\}$

6. 若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T$ 是 ( )

A. S　B. T　C. $\varnothing$　D. 有限集

7. 若 $a\in\mathbf{R}$，且对于一切实数 x，都有 $ax^2+ax+a+3>0$，那么 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,+\infty)$　B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,4)$　D. $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

8. 定义 $M-N=\{x|x\in M$ 且 $x\notin N\}$，若 $M=\{1,3,5,7,9\}$，$N=\{2,3,5\}$，则 $M-N=$ ________.

综合能力题

9. 含有 5 个元素的集合 A 的真子集的个数为 m，由 A 中 3 个元

素组成的真子集个数为 n,则 $\frac{n}{m}=$ ________.

10. 关于 x 的方程 $3x^2-6x+ax=0$ 的两根 x_1、x_2,已知 $x_1\in(-2,0)$,$x_2\in(\frac{1}{2},3)$,则 a 的取值范围是______.

11. 设集合 $A=\{x||x-a|<2\}$,$B=\{x|\frac{2x-1}{x+2}<1\}$,若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是________.

12. 已知集合 $A\{x|x^2+(P+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 P 的取值范围.

高考拔尖题

13. 已知不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 的解集是 $\{x|\alpha<x<\beta,0<\alpha<\beta\}$,求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

14. 解关于 x 的不等式 $(m+1)x^2-4x+1<0$.

高考预测题

15. 设函数 $y=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ 的定义域为集合 A,关于 x 的不等式组 $\begin{cases}ax>0\\2ax<a+x\end{cases}(a\in\mathbf{R}^+)$ 的解集为 B,求使 $A\cap B=A$ 的实数 a 的取值范围.

高考 超越自我

高考数学复习一般分为三轮:第一轮是以突出基础知识和基本技能的训练为重点,落实好每一个知识点;第二轮以突出数学思想方法和综合能力为重点的专题复习,旨在提高学生运用所学知识解决问题的能力;第三轮以查漏补缺及模拟训练为主.经过三轮的系统复习,学生能熟练掌握中学数学知识网络结构和知识间的联系,将知识内化为能力,使学生的解题能力、解决实际问题的能力都有较大的提高.

高考 真题精讲

1. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是 ( )

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|x<0$ 且 $x\neq-1\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. $\{x|x<1$ 且 $x\neq-1\}$

(2002,全国)

2. 满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是 ( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

(2002,北京)

3. 集合 $S=\{a,b,c,d,e\}$,包含 $\{a,b\}$ 的 S 的子集共有 ( )

A. 2个　B. 3个　C. 5个　D. 8个

(2003,全国春)

4. 设集合 $A=\{x|x^2-1>0\}$,集合 $B=\{x|\log_2 x>0\}$,则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|x>0\}$

C. $\{x|x<-1\}$　　D. $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

5. 设集合 $A=\{x||x|<4\}$,$B=\{x|x^2-4x+3>0\}$,则集合 $\{x|x\in A$,且 $x\in A\cap B\}=$ ________.

(2003,上海)

第2讲 简易逻辑

• 命题热点

1. 命题的基本知识,复合命题的构成,逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.

2. 四种命题及其相互关系,充要条件及其意义.

3. 反证法.

• 学科渗透

1. 逻辑知识在高考中虽然很少刻意去考查,但实际上,包含逻辑知识的试题却无处不在,这是无法回避的.

2. 与计算机、物理学知识联系紧密,如计算机的"智能"装置,电路中"或门电路"、"与门电路"等.

生:本专题知识在考题中难度如何把握?

师:本专题知识在高考命题中,一般出较容易的选择题、填空题.但反证法知识则可能出中等难度的解答题.

生:该专题知识属高考新增内容,复习时如何掌握好"度"?

师:该专题知识点在2003年全国新课程卷,江苏卷试题中均未出现,但北京卷2002年,2003年试题均在选择题中考查了充要条件知识,因此2005年该专题知识点复习要引起重视.

高考题型(1):命题的相互关系

方法规律:熟练掌握四种命题间的关系,并能应用原命题与其逆否命题的真值相同来解题,熟练掌握复合命题真值表.

【典例巧解1】

下列命题中,真命题的个数是 ( )

①若"p且q""p或q"都是假命题,则"非p且非q"是真命题

②$x^2\neq y^2\Leftrightarrow x\neq y$或$x\neq -y$

③命题"存在一个实数x,使得$x^2+x+1\leqslant 0$"的否定是"对所有的实数x,有$x^2+x+1>0$"

④若a、b、$c\in\mathbf{R}$,关于x的不等式$ax^2+bx+c\geqslant 0(a\neq 0)$的解集是$\mathbf{R}$的充要条件是:$a>0$,且$\triangle=b^2-4ac\leqslant 0$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

思路:利用复合命题真值表,分析命题真假,写出其他三种命题形式.

解:①是真命题.因为"p且q"与"p或q"为假,则"p假,q假",所以"非p且非q"为真.

②为假命题.因为"$x^2\neq y^2$"⇒"$x\neq y$或$x\neq -y$",但$x\neq y$或$x\neq -y\nRightarrow x^2\neq y^2$.

③为真命题.因为该命题是对原命题的否定,但不是原命题的否命题.

④为真命题.由函数与方程知识,一元二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$图象在x轴上方,则$a>0$,且$\triangle=b^2-4ac\leqslant 0$.

故此题选择D.

点评:(1)判断一个命题是真命题,应作出相应证明,判断一个命题是假命题只需举出一个反例.

(2)注意区分"非命题与否命题",非命题是否定命题的结论;否命题是将条件和结论都进行否定.

(3)"p或q"的否定是"$\neg p$且$\neg q$".

【活学活用】

1. 写出下列四个命题

①"若$xy=1$,则x,y互为倒数"的逆命题是____________.

②"相似三角形的周长相等"的否命题是____________.

③"若$b\leqslant -1$,则方程$x^2-2bx+b^2+b=0$,有实根"的逆否命题是____________.

④"若$A\cup B=B$,则$B\subseteq A$"的逆否命题是____________.

其中真命题序号是____________.

高考题型(2):充要条件

方法规律:分清条件与结论,充要条件问题证明:充分性是:条件⇒结论;必要性是:结论⇒条件.

【典例巧解2】

设x,$y\in\mathbf{R}$,求证$|x+y|=|x|+|y|$成立的充要条件是$xy\geqslant 0$.

思路:条件是"$xy\geqslant 0$",结论是"$|x+y|=|x|+|y|$".充分性是由$xy\geqslant 0$,证$|x+y|=|x|+|y|$;必要性是由$|x+y|=|x|+|y|$,证$xy\geqslant 0$.

证明:充分性:(1)若$xy=0$,则$x=0$或$y=0$,

此时$|x+y|=|x|+|y|$;

(2)若$xy>0$,则$x>0$,$y>0$或$x<0$,$y<0$,

当$x>0$,$y>0$时,$|x+y|=|x|+|y|$,

当$x<0$,$y<0$时,$|x+y|=-x-y=|x|+|y|$.

总之,当$xy\geqslant 0$时,有$|x+y|=|x|+|y|$.

必要性:若$|x+y|=|x|+|y|$,且x,$y\in\mathbf{R}$.

将等式两边平方有$|x+y|^2=(|x|+|y|)^2$,$|x|^2=x^2$,$|y|^2=y^2$,

即 $x^2+2xy+y^2=|x|^2+2|xy|+|y|^2$.

于是 $xy=|xy|$.

即 $xy\geq 0$.

点评:(1)分清题目条件与结论,不得混淆.

(2)证明过程中,分类不得遗漏.

(3)掌握充分条件、必要条件、充要条件和既不充分又不必要条件的意义,能判别两个命题之间的关系.

【活学活用】

2.已知条件 $p:A=\{x||x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leq\frac{(a-1)^2}{2}\}$,条件 $q:B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leq 0\}$,若条件 p 是条件 q 的充分条件,求实数 a 的取值范围.

高考题型(3):反证法

方法规律:用反证法证题的方法是:(1)假设结论不成立,即结论的反面成立;(2)由此假设出发,利用已知条件、结论,推理论证,得出矛盾的结论;(3)由矛盾判定假设不成立,得到所要证明的结论.

【典例巧解3】

用反证法证明:如果 $p>0,q>0$,且 $p^3+q^3=2$,求证:$p+q\leq 2$.

思路:运用反证法的证题步骤证明,证明过程注意恒等变形.

解:假设 $p+q>2$.

则 $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)>8$

由已知 $p^3+q^3=2$.

有 $2+3pq(p+q)>8$,即 $pq(p+q)>2$.

于是 $pq(p+q)>p^3+q^3=(p+q)(p^2+q^2-pq)$,

即 $pq>p^2+q^2-pq$,即 $(p-q)^2<0$.

这与一个数(或式)的平方为非负数矛盾,故 $p+q\leq 2$.

点评:(1)用反证法证题的步骤:①假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;②从这个假设出发,经过推理论证得出矛盾;③判定假设不成立,从而肯定命题的结论正确.

(2)矛盾涵义包含实际生活经验、定义、定理、法则及题设等方面.

【活学活用】

3.用反证法证明:若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数,那么方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上至多只有一个实根.

高考能力闯关

基本能力题

1.已知 A 和 B 是两个命题,如果 A 是 B 的充分不必要条件,那么 B 是 A 的______条件,$\neg A$ 是 $\neg B$ 的______.

2.命题"若 a,b 是偶数,则 $a+b$ 是偶数"的非命题是______,否命题是______.

3.四个条件:(1)$b>0>a$;(2)$0>a>b$;(3)$a>0>b$;(4)$a>b>0$ 中,能使 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的充分条件的是______.

4.下列命题中是真命题的序号为______.

(1)原命题为真,它的逆命题不一定是真;

(2)原命题为真,它的否命题不一定是真;

(3)原命题为真,它的逆否命题一定是真;

(4)一个命题的否命题为真,则它的逆命题一定是真.

5.已知全集 $U=\mathbf{R}$,$A\subsetneqq U$,$B\subsetneqq U$,如果命题 $p:\sqrt{3}\in A\cup B$,则"非 p"是 ( )

A. $\sqrt{3}\notin A$ B. $\sqrt{3}\in \complement_U B$

C. $\sqrt{3}\in\notin A\cap B$ D. $\sqrt{3}\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

6.下列命题是真命题的是 ( )

A.对所有的正实数 t,$\sqrt{t}$ 为正,且 $\sqrt{t}<t$

B.对实数 x,若 $x^2-3x-4=0$,则 $x^2-3x-4\geq 0$

C.不存在实数 x,使得 $x<4$ 且 $x^2+5x=24$

D.存在实数 x,使得 $|x+1|\leq 1$ 且 $x^2>4$

7.命题 $p:(x-1)(y-2)>0$,命题 $q:(x-1)^2+(y-2)^2=0$,则命题 p 是命题 q 的 ( )

A.充分不必要条件 B.必要不充分条件

C.充要条件 D.既不充分又不必要条件

8.用反证法证明命题"$a,b\in\mathbf{N}^*$,ab 可被5整除,那么 a,b 中至少有一个能被5整除",那么假设的内容是 ( )

A.a,b 都能被5整除 B.a,b 都不能被5整除

C.a 不能被5整除 D.a,b 有一个不能被5整除

综合能力题

9.已知 A 是 B 的充分条件,B 是 C 的充要条件,C 是 A______的条件.

10.已知命题 p:3是质数,命题 p:2是合数,试写出 p 或 q,p 且 q,非 p 三种命题,并判断其真假.

11.设 α,β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个实根,试分析 $a>2$ 且 $b>1$ 是两根 α,β 均大于1的什么条件?

12.用反证法证明:若 a,b,c 均为实数,且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$,$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$,求证:a,b,c 中至少有一个大于0.

高考拔尖题

13.试证关于 θ 的方程 $\cos^2\theta+a\cos\theta+1=0$ 的有解的充要条件是 $|a|\geq 2$.

高考预测题

14. 设 p 是 s 的充分而不必要条件，q 是 s 的充分条件，t 是 s 的必要条件；t 是 q 的充分条件，则

(1) t 是 s 的________条件.

(2) p 是 q 的________条件.

(3) $\neg p$ 是 $\neg q$ 的________条件.

高考 超越自我

简易逻辑知识属新教材新增的内容，在复习中，训练试题难度在容易题或中档题之间，注意该知识内容与实际生活的联系，以加深对该知识理解.

高考 真题精讲

1. 设 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数，不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 M 和 N，那么"$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$"是"$M=N$"的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

2. "$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$"是"$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\in \mathbf{Z}$"的　　(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

(2003，北京)

3. 函数 $y=x^2+bx+c\quad(x\in[0,+\infty))$ 为单调函数的充要条件是　　(　　)

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$　　C. $b>0$　　D. $b<0$

4. 函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是　　(　　)

A. $ab=0$　　B. $a+b=0$

C. $a=b$　　D. $a^2+b^2=0$

(2002，全国)

第3讲 函数及其性质

• **命题热点**

1.映射、函数、一一映射的概念及其作为基本语言的工具.

2.函数的性质:包括对定义域、奇偶性、单调性、周期性定义的了解或理解.

3.函数性质的定义及深层次内涵的运用.

4.对函数在抽象函数中的体现的准确把握.

• **学科渗透**

1.函数作为工具在方程、数列、立几、解几的运用是相当频繁的,它贯穿于整个高中数学.函数的思想是一种重要的数学思想.

2.函数在实际生活中的应用.

生:函数在高考中一般占多大的比例?为什么函数在整个高中数学学习中占有相当重要的地位?

师:高考中单考函数的知识一般占整份试卷的15%～20%,但是,加上三角函数及数列、立几、解几中的函数问题,大约占50%.因此,学好函数,等于学好了数学的一半.

生:近几年高考对抽象函数的考查比较多,我们见到这样的题目就比较怵,应该怎样应对?

师:抽象函数并不可怕,应对方法一是赋值法,二是正确运用函数性质的定义,转化、变形就可以了.

> **高考题型(1):函数的单调性的证明及应用**
>
> **方法规律**:判断函数的单调性有几种方法:一是利用单调函数的定义,二是利用复合函数单调性判断方法,三还可以用求导数法.

【典例巧解1】

设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$,求 a 的取值范围,使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

思路:从单调函数的定义或求导数出发,通过使不等式恒成立的条件进行分析、比较,最后综合得出结论.

解:方法一:设 $0\leqslant x_1<x_2$

则 $f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1}-a(x_2-x_1)$

$$=(x_2-x_1)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right)$$

①当 $a\geqslant1$ 时,

$\because 0<x_1+x_2<\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}$

$\therefore \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$

又 $x_2-x_1>0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$,即 $f(x_2)<f(x_1)$

$\therefore$ 当 $a\geqslant1$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调减函数.

②当 $0<a<1$ 时,

$\because f(0)=1$, $f\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)=1$,且 $\frac{2a}{1-a^2}>0$,

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不是单调函数.

方法二:$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-a$

①令 $f'(x)<0$ 得:$a>\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore 0\leqslant x<\sqrt{x^2+1}$, $\quad\therefore 0\leqslant\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1$.

由 $a>\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 恒成立得:$a\geqslant1$,

$\therefore$ 当 $a\geqslant1$ 时,$f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上递减.

②同方法一:当 $0<a<1$ 时,由 $f(0)=f\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)=1$ 知,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不是单调函数.

点评:关于函数单调性问题,在以下几种类型:一是证明函数的单调性,二是根据单调性比较数的大小,三是根据单调性列出不等式或证明不等式,四是根据单调性求参数的范围,如本例.

【活学活用】

1.设 $f(x)=\lg\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n}$,其中 $a\in\mathbf{R}$,$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$,如果 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上有意义,求 a 的取值范围.

> **高考题型(2):函数的奇偶性及其他**
>
> **方法规律**:函数的奇偶性与其他性质是紧密相联的,只有在定义域上恒有 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$,才能断定 $y=f(x)$ 是偶函数还是奇函数.

【典例巧解2】

设 $a\in\mathbf{R}$,$f(x)$ 为奇函数,且 $f(2x)=\frac{a\cdot4^x+a-2}{4^x+1}$

①试求 a 的值及 $f^{-1}(x)$

②设 $g(x)=\log_2\frac{1+x}{k}$,若 $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$,$f^{-1}(x)\leqslant g(x)$ 恒成立,求实数 k 的取值范围.

思路:由 $f(x)$ 为奇函数,则对任意 x,都应该有 $f(-x)=$

$-f(x)$，由此用待定系数法求出 a，而第②问应该用化归的思想将其转化为最值问题.

解：①由题意 $f(2x)=\dfrac{a\cdot 4^x+a-2}{4^x+1}$，

则 $f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}$

$\because f(x)$ 是奇函数

$\therefore f(-x)=\dfrac{a\cdot 2^{-x}+a-2}{2^{-x}+1}=-f(x)=-\dfrac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}$

即 $\dfrac{a+(a-2)\cdot 2^x}{2^x+1}=\dfrac{-a\cdot 2^x-a+2}{2^x+1}$

$\Leftrightarrow(2a-2)(2^x+1)=0$

$\because 2^x+1\neq 0$

$\therefore a=1$　　$\therefore f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 设为 y，

则　$2^x=\dfrac{1+y}{1-y}$　　$\therefore f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}(-1<x<1)$

②$\because$ 当 $x\in[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}]$ 时，$f^{-1}(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，

即 $\log_2\dfrac{1+x}{1-x}\leqslant\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1+x}{k}$

$\therefore\log_2\dfrac{1+x}{1-x}\leqslant\log_2\left(\dfrac{1+x}{k}\right)^2\Rightarrow\dfrac{1+x}{1-x}\leqslant\left(\dfrac{1+x}{k}\right)^2$　①

又 $\because x\in[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}]$　　$\therefore 1-x>0,1+x>0,k>0$

$\therefore$ 不等式①化为：$k^2\leqslant 1-x^2$，令 $t=1-x^2$，

则函数 $t=1-x^2$ 在 $[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}]$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{2}{3}$ 时，$t_{\min}=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$，

$\therefore k^2\leqslant\dfrac{5}{9}$　　$\because k>0$

$\therefore 0<k\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

点评：①$f(x)$ 在 R 上是奇函数，则 $f(0)=0$，可用于第①问中求 a 的值，但这是 $f(x)$ 为奇函数的必要条件. 严格地说，用这种方法求出 $a=1$ 后，还需验证 $f(x)$ 是否为奇函数，否则，该值就不是所求的值.

②关于 $a\leqslant g(x)$ 对 x 取任意值恒成立的问题，只需 $a\leqslant g(x)_{\min}$；$a\geqslant\varphi(x)$ 恒成立，只需 $a\geqslant\varphi(x)_{\max}$.

【活学活用】

2. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，它的图象关于直线 $x=2$ 对称，已知 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)=-x^2+1$，求 $x\in[-b,-2]$ 时，$f(x)$ 的表达式.

> **高考题型(3)：抽象函数问题、奇偶性与对称性及其衍生出的周期性**
>
> **方法规律**：由于没有函数的具体的解析式，而又具有基本初等函数的一些性质，所以把这样一些函数叫抽象函数，应对策略见高考考向探讨.

【典例巧解 3】

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意的 $x_1、x_2\in[0,\dfrac{1}{2}]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$.

(1)求 $f(\dfrac{1}{2})$，$f(\dfrac{1}{4})$.

(2)证明 $f(x)$ 是周期函数.

(3)记 $a_n=f(2n+\dfrac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

思路：求特殊点的函数值，一般用赋值法，周期函数的证明利用周期函数的定义，a_n 的求法可以从特殊值推断出一般情况下的值.

解：(1)对 $x_1、x_2\in[0,\dfrac{1}{2}]$，

都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

$\therefore f(x)=f(\dfrac{x}{2})\cdot f(\dfrac{x}{2})=f^2(\dfrac{x}{2})\geqslant 0,x\in[0,1]$.

又 $\because f(1)=f(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2})=f^2(\dfrac{1}{2})=a$

$\therefore f(\dfrac{1}{2})=\sqrt{a}$.

$\because f(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4})=f^2(\dfrac{1}{4})=\sqrt{a}$　$\therefore f(\dfrac{1}{4})=\sqrt[4]{a}$.

(2)依题设 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

故 $f(x)=f(2-x)$　$(x\in\mathbf{R})$

又由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(-x)=f(x)$　$(x\in\mathbf{R})$

$\therefore f(-x)=f(2-x)$　即 $f(x)=f(x+2)$

这表明 $f(x)$ 是有一个周期为 2 的函数.

(3)由(1)知：$f(x)\geqslant 0,x\in[0,1]$，

$\because f(\dfrac{1}{2})=f(n\cdot\dfrac{1}{2n})=f[\dfrac{1}{2n}+(n-1)\dfrac{1}{2n}]$

$=f(\dfrac{1}{2n})\cdot f[(n-1)\cdot\dfrac{1}{2n}]=\cdots$

$=f(\dfrac{1}{2n})\cdot f(\dfrac{1}{2n})\cdots\cdots f(\dfrac{1}{2n})$

$=[f(\dfrac{1}{2n})]^n=a^{\frac{1}{2}}$

$\therefore f(\dfrac{1}{2n})=a^{\frac{1}{2n}}$

$\because f(x)$ 的一个周期是 2，$\therefore f(2n+\dfrac{1}{2n})=f(\dfrac{1}{2n})$

因此，$a_n=a^{\frac{1}{2n}}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2n}\ln a)=0$

点评：(1)本题是一道高考题，属于分层递进式的题目，从 $f(1)$ 到 $f(\dfrac{1}{2})$，从 $f(\dfrac{1}{2})$ 再到 $f(\dfrac{1}{4})$. 但是，求 $f(\dfrac{1}{2n})$ 时，一般学生就不会思考了，当年也就是(3)这一问把绝大部分同学难住了，正确的思路应该是：$1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}$，

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{2}=\underbrace{\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n}+\cdots+\dfrac{1}{2n}}_{\text{共有}n\text{个}}$，

$\therefore f(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6})=f(\dfrac{2}{6})f(\dfrac{1}{6})=\left[f(\dfrac{1}{6})\right]^3$，……