

初中平面幾何教學體會

底鍾英編著

13.132-15/14

湖北人民出版社

初中平面幾何教學體會

盧鍾英編著

湖北人民出版社

一九五五年·武漢

內容提要

本書是作者根據現行初級中學平面幾何課本，結合他自己教學的實際經驗編寫而成。書中系統地闡明了現行課本中每一章節的教學目的和要求、在講授時應注意之點，以及作者的體會；着重地說明了現行教材的科學系統性、證題的方法和步驟、作圖的方法、步驟和討論，軌跡問題的補充，教具的創造和使用等內容，可供中學教師在教學上參考。

初中平面幾何教學體會

底鍾英編著

湖北人民出版社出版（漢口解放大道332號）

武漢市書刊出版業營業許可證新出字第一號

新華書店武漢發行所發行

湖北省國營湖北印刷廠漢口廠印刷

書號：264·787×1092 1/32開·4 1/2印張·96,000字

一九五五年七月第一版

一九五五年七月第一次印刷

印數：1-15,000

前 言

我根據初中數學教師對平面幾何提出的一些問題，寫了幾篇個人在教學上的體會，在本校‘教學業務通訊’（自然版）上陸續發表。經同志們提供了不少寶貴的意見，加以修正，寫成本書。內容是按照現行課本的編排順序，分成三個部分。第一部分內容較少，重點是在第二和第三部分。

本書的編寫，是從如何掌握教材和教學方法上着眼的。因此，每一部分，都提出了目的與要求、邏輯的聯系、引導學生思考，製作和運用直觀教具、證題方法和作圖方法等。教材疑難的地方作了解釋；複雜的習題作了提示；不易掌握的習題作了解答。有些地方雖然超出了教材的範圍，但沒有脫離教材的內容。

本書是在匆忙中寫成的，其中有些是個人主觀的見解，不合適的地方一定很多，希望讀者給以指正。

底鍾英

一九五五年四月於河南師範專科學校

目 錄

一、關於講授‘緒論’的體會·····	1
二、關於講授‘第一章直綫形’的體會·····	5
三、關於講授‘第二章圓’的體會·····	87
附錄一·····	125
附錄二·····	128

一 關於講授‘緒論’的體會

幾何學是一門系統上比較嚴密邏輯性比較強的科學，開始學習幾何的人，往往遭遇到許多困難。因此在初中教幾何時，教師往往感到不容易啓發學生的學習興趣，不能使學生輕鬆愉快的來接受新知識。多數學生感到幾何學難學。這樣一來，在幾何教學上就蒙受很大的損失。尤其緒論部分是幾何學的開始，如果教師掌握不住教材的精神實質，不能引導學生自覺的積極的去學習，學生必然感到更大的困難，影響教學任務的順利完成。現在願就我個人一點心得體會與任教同志共同研究：

(1) 目的與要求：

總的目的要求，可以這樣確定：‘從實際出發，使學生明確幾何圖形的基本性質，並對幾何學的發生發展以及研究的範圍，有個概括的認識，為今後學習幾何奠定基礎。’

總的目的要求，不可能把每一節的主要內容都敘述出來，如果把教材了解的很透澈，找出每節的主題所在，再體會教材的精神，就不難把每一節的目的要求寫出來。如開始第一二節幾何圖形與幾何學作為一個單元來講，它的目的要求就可以這樣來認識：

‘(一)使學生明確由物體派生出幾何體、面、綫、點，以構成幾何圖形，並對它們的性質與關係有初步的認識。(二)使學生認識幾何學研究的內容並由其發生發展，了解到幾何學是由勞動人民在勞動過程中隨着社會的發展總結出來的生產經驗。’

(2) 講授時應注意：

(一) 學生對幾何學研究的內容有了初步認識之後，應與學生略談幾何學與其他學科，生產建設和日常生活等的各種關係，樹立學生的學以致用及為建設祖國而學習的學習態度，鼓勵他們的學習興趣，以發揮他們在幾何學習上的積極性自覺性。

(二) 由實際出發，儘量利用直觀教具。幾何學本來就是由實物抽象出來的一種科學，依據學生的認識過程，在學生抽象能力沒有得到很好發展的時候，最好多利用實物教學，學生的認識才比較深刻而透澈。我認為在進行以下各節時都應該利用直觀教具：

(1) 在講第一節幾何圖形時應利用長方體與球體模型使學生認識到點、綫、面、體，應用實物或圖形移動說明移形公理；應用兩個全等形模型重合說明全等形定義。

(2) 在講第三節平面時用厚紙作成附有圖形的平面模型，並把這圖形用玻璃紙（或透明紙）描下來，在這平面上移動這圖形或把這圖形翻過來重合在這平面上，這種動作或在另一平面上來進行以說明平面的性質。

(3) 在講第四節直綫時應用兩條綫繩說明：‘過兩點可以引一條直綫，也只能引一條直綫。’

(4) 其餘如第九節中‘用3去除綫段 AB ’，可用綫繩代表 AB 然後把這綫繩折成3等份說明三等份一綫段；第十節圓的作法除用圓規外還可用綫繩，圖釘，粉筆把它完成；第十二節求若干弧的和可用厚紙條作成同圓或等圓的若干弧以求它們的和。

但應用直觀教具還要注意發展學生的思維能力。如果學生的知識範圍只停留在直觀教具上，這樣應用直觀教具，不但無

益，反而有害，這是教師應當注意到的地方。

(三) 在教學進行中，及時解決學生的思想問題。因為幾何學在前面提到的概念，往往是為了後面學習打好基礎的。但學生初次接受時，往往感到希奇，莫明其妙，這時，需要對這些概念的應用稍加提明，否則學生要感到幾何學淨研究些希奇古怪的東西，沒有什麼意思。如講到‘在空間可以把幾何圖形的位置任意移動，而不改變它的形狀大小’。這時，學生可能要想像，空間的幾何圖形為什麼要移動？這不自找麻煩嗎？教師應當把所以要移形的原因，簡單的加以說明。像這樣的例子還很多，教師應在這些地方下些工夫，以防止學生的紛歧思想的產生，才能集中學生的注意力。

(四) 時間的分配。按照課程進度表的規定，這一部分課堂教學的時數是五小時。我認為如果學生的程度差，可以佔用六小時。講完後最好留一部分時間作一次複習，因為學生對開始學到的這一部分基本知識如果得不到鞏固，後面就難以進行了。

(3) 對於這一部分的體會：

我們應用的初中平面幾何教科書，是劉薰宇先生在過去教科書的基礎上改編的。現行教本當然有很多優越的地方。就這一部分來說，增添了許多例題與插圖，並把過去的教本後邊的習題分配到適當的地方。但是在課文裏面，有幾處修改的還不够妥當。例如在第1節裏提到：‘幾何體同着空間的界限如 $ABCD$, $CBEF$ 和 $CFGD$ 叫做面’，沒有過去的教本上所提的‘把幾何體和周圍的空間隔開的是面’說的清楚。現行教本提到‘兩個面的界限……叫做綫，兩條綫的界限……叫做點’，沒有過去的教本上所提的‘把面的一部分和鄰接的部分隔開的是綫，

把綫的一部分和鄰接的部分隔開的是點。’包括的比較廣泛。過去的教本上說：‘我們應該想像到面沒有厚薄；綫沒有寬窄和厚薄；點沒有長短、寬窄和厚薄；’我認爲這時只提面、綫、點沒有什麼，不提它們有什麼是比較恰當的，是適合量力性原則的。因此我感到現行教本上這樣提：‘幾何體有長短、寬窄和厚薄，面有長短、寬窄……綫只有長短……’不够合適。因爲這樣講解學生可能這樣想：‘球體的長短寬窄和厚薄在哪裏？球面的長短、寬窄是指什麼？（因爲現行教本上在這地方有球體的插圖）地圖的邊緣怎樣去量？’徒增加學生在開始學習幾何時一些不必要的紛歧思考。現行教本上這節還提到‘將點、綫、面或體連合起來可以得出各種各樣的圖形，這就叫做幾何圖形。’但單獨的點、綫、面或體算不算幾何圖形呢？我認爲也應當算幾何圖形，因此也不如過去的教本的提法‘在空間存在的點、綫、面或體以及把它們連結所成的一定形狀叫做幾何圖形’比較合適。此外在第3節裏補充了這樣幾句：‘我們可以這樣想，把一張光滑的紙（作爲平面看）摺轉一部分……’不够完全，沒有把這個地方提到的平面性質完全說明白；第8節綫段的和裏過去的教本（在第7節）有‘向同一方向’幾個字，現行教本把它去掉了，也不够合適，因爲這樣一來，對於求三條以上綫段的和就有些含混不清。因此，對以上這些地方在進行講解時還要參考過去的教本。

二 關於講授‘第一章直綫形’的體會

這一章共分二二節，包括的內容很多，現在依次分成幾個部分來談談。

1. 自‘角’到‘數學的命題’

這一部分包括四節：Ⅰ.角；Ⅱ.角的量法；Ⅲ.相關的角；Ⅳ.數學的命題。現在分別加以說明：

關於‘角’‘角的量法’‘相關的角’‘數學命題’

(1) 目的與要求：

‘角’：使學生樹立角的概念，明確怎樣比較兩個角的大小或相等及角的運算方法，並認識由求許多角的和產生出平角和周角。

‘角的量法’：使學生明確‘在同圓或等圓中，中心角相等則它們的對弧也相等及其逆定理’，並結合角的度數與弧的度數定義間的一致關係，得出‘中心角的大小可以用它的對弧來量’的結論，並根據這結論說明量角器的構造和應用，使學生會使用量角器。

‘相關的角’：⊖使學生認識鄰角、餘角、補角、補鄰角和對頂角諸定義。由補角的作法，闡明相交二直綫的兩個性質（①若有一個角是直角，則其餘三個都是直角，②對頂角相等）由補鄰角引導出斜綫與垂綫的定義，進而說明垂綫的存在，引

導出自綫外一點向這直綫引垂綫定理，使學生的思維逐漸進入推證階段，初步培養學生的分析題意，正確作圖，按步思考的能力。

⊖使學生明確有公共頂點的角三個重要性質（尤其第一個特別重要，它是證明三點在一直綫上的重要依據）。

‘數學的命題’：⊖使學生對命題，定義，公理，定理和系有清晰的認識。

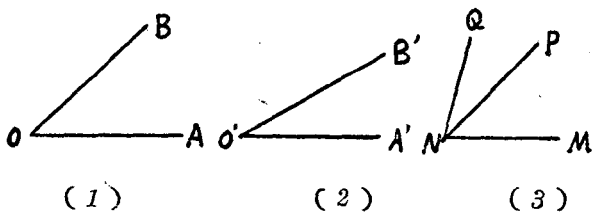
⊖使學生明確原命題，逆命題，否命題和逆否命題四者間的真偽關係，並認識原命題與逆否命題的一致性。（如學生程度差 § 39 不講，本條可酌量修正。）

（2）講授時應注意：

⊖教者要掌握教材的系統性與量力性。教材的編排是非常有系統性的，這種精神不但貫串定理的先後次序及難易程度，就是對名詞的解釋，各小節間的聯系，都有其一定的順序。如開始講角的時候，由角的定義順次談到角各部分的命名，角的記法，角的內部和外部，兩角大小相等的比較，角的運算，最後由角的和談到平角，周角及大於周角的角，其間有一定關聯着的順序，如把這一系列的知識系統的讓學生來領悟，學生得到的是連貫的知識，就容易牢固的記憶。新教材的內容淺顯易懂，適合着量力性原則。如由角的和引導出平角和周角的定義，學生便容易接受，因為學生對若干角的和仍然是一個角已經有了概念，當然就容易承認平角和周角都是角，否則孤立着談平角和周角的定義，與學生在日常生活中獲來的經驗不一致，他們一定感到奇怪，接受就比較困難了。其餘各部教者只要細心體會，就不難把其中的系統性量力性找出來。

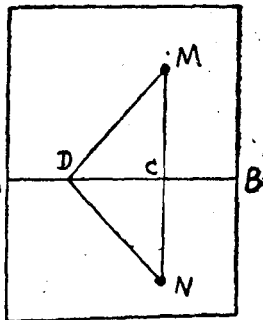
⊖教者要善於利用直觀教具進行教學。雖然教材淺顯易

懂，如果不藉助於直觀教具進行教學，反感到新教材不容易教。如在 § 16 角的和的一節進行教學中，如不用厚紙模型來求角的和，而用圓規直尺作角以求其和，不但打亂了幾何學的系統，且使學生在思想上模糊。我認爲教師事前應用厚紙作成幾個角，上課時按照厚紙模型在黑板上首先畫兩個角 $\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$ (如圖 1, 2,)。講到：‘先作 $\angle MNP$ 等於 $\angle AOB$ ，接着用角頂 N 做頂點， NP 做邊，在 $\angle MNP$ 的外部作 $\angle PNQ$ 等於 $\angle A'O'B'$ 。’ 就用模型——把它們作出來，最後得到的



$\angle MNQ$ (如圖 3) 就是 $\angle AOB$ 與 $\angle A'O'B'$ 的和。求三個以上角的和，也可以照這樣的方法去作。

其次，再以 § 29 爲例，說明這一小節教具的製造與使用。這節的定理‘過綫外一點可引這直綫的一條垂綫，也只能引一條’，在證明的過程，把圖形來回翻摺了好幾次，如果不用教具，學生就不易明白。我認爲應該用長方形厚紙一塊 (如圖)，上邊用黑筆劃上已知直綫 AB 與已知的 M 點， AB 綫的背面，用小刀挖一溝濠，以便翻摺。 M 點的地方穿一綠豆大小的孔，再塗上一層生桐油。用時把上半部沿着 AB 翻摺，小孔落到的位置用粉筆記出來，就可得到 N 點。翻摺回來後連起 MN 就得到了



C點。這時要證明 $MC \perp AB$ ，就是要證明 $\angle MCB = \angle R$ ，也就是要證明 $\angle MCB = \angle NCB$ ，把上半部沿 AB 再翻摺回去，很容易看出 C 點沒動， CM 落到 CN 上， $\angle MCB = \angle NCB$ 。至於要證明只有一直線 $MC \perp AB$ ，是由 M 到 AB 上任一點 D （除 C 外）連 MD ，則不難想像應用教具說明 $MD \not\perp AB$ （結合課本上證明），其餘各部分還可製造出很多教具，教者應細心揣摩去創造。

（3）對於這一部分的體會：

現行教本把數學公理補充上了，又在數學命題部分補充了不少切合我國實際的例子，在教學上確有不少的方便。又把命題與定理區別開，使學生在思想上不致於馬虎，這都是比過去的教本較好的地方；不過還有幾點應該提出來商榷的。

⊖第 § 18 地方用數碼表示點，綫，角感到不合適。

⊖第 § 29 過去的教本提到當翻摺時‘點 C 與點 D 的位置沒動’現行教本把它去掉了，感到講時學生不容易懂，仍須添上。

⊖沒有‘不等量減等量大者仍大’這一公理，但在 § 58 定理的證明中曾加以應用，我認爲須把這一公理添上。其次‘不等量加等量大者仍大’和‘不等量用正數去除大者仍大’，這兩個公理也應添上。

2. 自‘三角形’到‘三角形的全等’

這一部分包括四節：Ⅴ. 三角形；Ⅵ. 軸對稱的幾何圖形；Ⅶ. 等腰三角形的幾個性質；Ⅷ. 三角形的全等。

現在分別把這幾節的目的要求以及在講授時應行注意之點，與任教諸同志共同研究。

(一) 關於‘三角形’

(1) 目的與要求：

要使學生對於多邊形、三角形以及三角形中綫、高綫和角的二等分綫有清晰的認識。

(2) 講授時應注意：

這一節主要講了些名詞的定義，在定義的講解上學生往往感到枯燥乏味而不容易記憶。我認為在定義的講解上要注意以下幾點：

⊖在開始時應當把定義的重要性談一談，以引起學生的注意力。幾何學爲了敘述簡明，才用了許多名詞，而每一名詞必有它確實的內容，否則失去了幾何的科學性，所以把名詞搞清楚是學好幾何的必要條件。

⊖每講一個名詞的定義，應先把圖形作出來，然後與學生共同研究這名詞的定義應當怎樣規定。這樣進行，開始時學生可能想不出來，教師要給以啓發；繼而學生可能想像的有錯誤或不全面，教師要予以糾正和補充。例如在講折綫的時候，教師應當把課本上的兩種折綫畫在黑板上，然後給學生說：‘像這樣的綫叫做折綫，我們怎樣用簡明扼要的話，把折綫的定義敘述出來？’這樣一來，學生就開動腦筋啦。接着教師再把綫段的‘首’‘尾’兩字解釋一下，就指定一個學生來說出折綫的定義，經過其餘學生補充與糾正後，教師再作結論。其次再比較這兩種折綫不同的地方，讓學生自己把凸折綫與非凸折綫的定義研究出來，也可以仿照上面的步驟去作。總之講一名詞的定義與講定理和作圖題一樣，都要通過學生充分的思考，使他們自己

來發現這名詞應如何規定，才能變成學生自己的知識，他們才感覺有興趣而把所得到的知識鞏固起來。

③把每一名詞命名的理由談一談，這樣學生以後見到一個學過的名詞，就可以聯想到這名詞的內容，就容易把這名詞的定義鞏固的記住。

④把同類名詞不同之點，讓學生認識清楚，因為能這樣，學生在思想上對同類不相同的名詞就有所比較，就容易把這些名詞一類一類的記住。如課本上所談到的：凸折綫與非凸折綫；凸多邊形與非凸多邊形；不等邊三角形、二等邊三角形與等邊三角形，……就可以分成五類名詞。

(二) 關於‘軸對稱幾何圖形’

(1) 目的與要求：

使學生明確軸對稱圖形的定義和基本性質，並掌握判斷軸對稱圖形的基本定理。

(2) 講授時應注意：

現行教本上好的地方是從一般人所謂軸對稱圖形的觀念出發，然後規定出軸對稱圖形的定義。但按着這樣的提法，可能使教師與學生在思想上發生模糊：究竟‘一圖形沿着一直綫摺轉能與另一圖形完全相合，我們就說這兩圖形對稱於這直綫’是軸對稱圖形的定義呢？還是‘……由若干對稱點組成的圖形叫做對稱圖形’是軸對稱圖形的定義呢？這樣進行教學，在學生思想上一定感到混亂。我認為後者才是軸對稱圖形的定義。至於一般人對於軸對稱圖形的觀念，是可由這定義推證出來的。因為前者所說的兩個圖形，很容易根據 § 29 定理證明這兩圖形

完全由對稱於一直綫的各組對稱點所組成，這樣經過證明之後，就可當成一個定理了（過去的教本是把它當成定理的）。

第 § 44 定理的提法我認爲是不够合適的。因爲既承認軸對稱圖形是由若干組對稱點所組成的（定義），何必再證‘軸對稱圖形上的任一點都有它的對稱點’呢？按照 § 44 第一段的證明內容，這定理可以這樣修正‘兩個三角形（或多邊形）的頂點，對應對稱於一直綫，那末這兩個三角形就對稱於這直綫。’而且經修正後這個定理放在這個地方也是必要的，因爲它說明了軸對稱圖形（直綫形）的存在，才顯示出軸對稱圖定義不空洞，並可作爲以後證題的依據，我還認爲作一個點關於一直綫的對稱點，應當在講本定理的假設時提出，以說明本定理所給條件確實可以作出來，並說明了對稱點的存在，不應該提在 § 44 的第二段。

最後，我還認爲可以把‘直徑是圓的對稱軸’這個定理添在後面，一則鞏固了本節所得到的知識；二則樹立一圖形對稱於一直綫的概念；三則爲講 § 162 打下基礎（因爲那裏用着這個定理，課本上沒有提到）。其次課本上的 39 圖與 41 圖，都可用玻璃紙畫成這樣的圖形按照課本上提到圖形翻轉進行教學，學生得到的概念就格外明確。

（三）關於‘等腰三角形的幾個性質’

（1）目的與要求：

使學生了解等腰三角形的幾種性質和應用，並初步明確根據唯一性應用同一法去證明定理。

（2）講授時應注意：

關於這一部分，也應當應用直觀教具。如課本上第42圖，用玻璃紙或用挖空的厚紙（留下圖中點綫的位置）製成的圖形，在講到摺轉時，就把圖形按照題上的意思進行摺轉，這樣學生就很容易領悟。其次在系1中曾提到‘……換句話說這四個性質中的任何一個都能夠決定AD（課本印成AB應改過來）的位置……因而說它是這四條綫的某一條，同時也就代表着其他三條’，講這個系的時候，必須讓學生把四種點和綫的唯一性搞清楚，學生對這個系才能夠徹底了解。現在把這種點和綫的唯一性寫在下面：

- ⊖ 一線段有一且僅有一中點；
- ⊖ 一角有一且僅有一平分綫；
- ⊖ 自直綫上一點可引且僅可引這綫的一垂綫；
- ⊖ 自直綫外一點可引且僅可引這綫的一垂綫。

⊖、⊖、⊖中‘有’的問題可用摺轉法證實，而‘僅有’的問題，可應用§34公理5和7證明，至於⊖已在§24證明過。如果不把以上四條讓學生先明確起來，那末在理論上就不能很圓滿的認識這個系。例如：‘等腰三角形底邊上的垂直平分綫也是底邊上的高。’它的證明是先添頂角的平分綫，然後根據本節定理‘等腰三角形頂角的平分綫必垂直平分底邊’而得到證明的。這時，第一，先明確底邊只有一個中點，否則就不能斷定所添的頂角平分綫與假設中所給的底邊上的垂直平分綫交於底邊上的同一點。第二，還須明確自直綫上一點只有這綫的一垂綫，否則就不能斷定所作的頂角平分綫與所給的底邊上的垂直平分綫合為一直綫。