工科课程提高与应试丛书

ENGINEERING COURSE

高等数学

（第2版）

典型题解析及自测试题

刘三阳 主编

西北工业大学出版社

工科课程提高与应试丛书

高等数学典型题解析及自测试题

（第2版）

刘三阳　主编

刘三阳　李广民　王雪峰
井爱雯　王金金
编

西北工业大学出版社

(陕)新登字 009 号

【内容简介】 本书与同济大学《高等数学》(第四版)配套，每章分为内容提要、典型题解析、考研题选解、习题。附录的自测试题中包括全真和模拟试题，并给出了习题及试题答案。全书突出了题目的典型性和代表性、解(证)法的灵活性和启发性。题源广泛，题型多样，注重讲题示法，以题释理，强调解题思路的分析、解题方法的提炼和疑难问题的注释。旨在起到以题促学、解难释疑、举一反三、融会贯通之效。

本书可供理工科院校师生作为高等数学课程教与学的参考书，对参加高等数学竞赛和报考研究生的考生也具有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题解析与自测试题/刘三阳主编．—2 版．—西安：西北工业大学出版社，2003.6
(工科课程提高与应试丛书)
ISBN 7-5612-1267-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 34073 号

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路 127 号　**邮编：** 710072　**电话：** 029-8493844
网　　址： www.nwpup.com
印 刷 者： 西安新华印刷厂
开　　本： 850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张： 16
字　　数： 420 千字
版　　次： 2000 年 8 月第 1 版　　2003 年 6 月第 2 版第 3 次印刷
印　　数： 13 001～18 000 册
定　　价： 20.00 元

再版前言

本书出版三年来，受到广大读者青睐，应读者要求，出版社决定再版本书，借再版之机，我们对全书作了全面修订，一是改正了原书中的某些差错，二是更换和增加了一些典型题及解(证)法，三是每章增列了考研题选解部分，选解了近年来全国硕士研究生入学数学统考试卷中的若干试题。此外，上下两册合为一册出版。希望这次修订能使广大读者更加满意。

编　者

2003 年 4 月

前　言

高等数学作为高等学校理工科专业的重要基础课，对大学生具有较大的难度和较重的分量，加之课时普遍减少，而且课程考试、后续专业课以及研究生入学考试又对这门课程有着较高的要求，学生普遍感到困难较多。为了帮助学生学好高等数学这门课程，我们编写了这本《高等数学典型题解析与自测试题》，供理工科院校师生作为高等数学课程教与学的参考书。

本书配合同济大学《高等数学》（第四版）并与之同步，分为上下两册。每章分为内容提要、典型题解析、考研题选解、习题与答案（提示），书末附有若干套全真和模拟试题及其答案。解题是学习高等数学的重要组成部分，是一种综合运用知识的过程，也是能力的一种训练和测验。本书突出了题目的典型性和代表性、解（证）法的启发性和灵活性，题源广泛、题型多样、重点突出，讲题示法，以题明理，注重解题思路和规律的分析，解题方法和技巧的提炼和有关注意事项的阐释。力求起到以题促学、释疑解难、触类旁通和提高能力的效果。

由于编者水平所限，书中错误和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2000 年 5 月

目　　录

上　　编

下 编

附　录

上　编

第一章　函数、极限、连续

一、内 容 提 要

1. 极限．既要准确理解极限的概念(包括数列极限、函数极限、左右极限、无穷小量、无穷大量)和极限存在的充要条件，又要能正确熟练地求出各种极限．要注重各种方法的综合运用．

2. 复合函数和分段函数．会将两个函数(尤其是两个分段函数)进行复合．

3. 判断函数的连续性和间断点的类型．

4. 闭区间上连续函数的介值定理和最大值、最小值存在定理的应用．

二、典型题解析

例 1.1　设 $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & (|x|\leqslant 2)\\ 2 & (|x|>2)\end{cases}$$

求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$g[g(x)]$．

分析　这是两个分段函数的复合，要根据外层函数定义域的各区间段和内层函数的表达式及定义域进行分段复合．

解　(1) $f[g(x)]=\begin{cases}1 & (|g(x)|\leqslant 1)\\ 0 & (|g(x)|>1)\end{cases}$

现需求出使 $|g(x)|\leqslant 1$（或 $|g(x)|>1$）的 x 范围．

由于 $|x|>2$ 时，$g(x)=2>1$，故仅当 $|x|\leqslant 2$ 时，才可能有 $|g(x)|\leqslant 1$. 而欲使 $|g(x)|\leqslant 1$，必须且只需

$$|x|\leqslant 2,\qquad |2-x^2|\leqslant 1$$

由此可得 $1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3}$. 于是有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & (1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3})\\ 0 & (|x|<1\text{ 或 }|x|>\sqrt{3})\end{cases}$$

(2)

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2 & (|f(x)|\leqslant 2)\\ 2 & (|f(x)|>2)\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知，对任意的 x 有 $|f(x)|\leqslant 1<2$，故有

$$g[f(x)]=2-[f(x)]^2=\begin{cases}2-1^2 & (|x|\leqslant 1)\\ 2-0 & (|x|>1)\end{cases}$$

即

$$g[f(x)]=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1)\\ 2 & (|x|>1)\end{cases}$$

(3) 由于对任意的 x 有 $|g(x)|\leqslant 2$，故有

$$g[g(x)]=2-[g(x)]^2=\begin{cases}2-(2-x^2)^2 & (|x|\leqslant 2)\\ 2-2^2 & (|x|>2)\end{cases}$$

即

$$g[g(x)]=\begin{cases}-x^4+4x^2-2 & (|x|\leqslant 2)\\ -2 & (|x|>2)\end{cases}$$

【注】　也可借助 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的几何图象，求出各复合函数．

例 1.2　设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)=f(f\cdots(f(x)))$,并讨论 $f_n(x)$ 的奇偶性和有界性.

分析　先通过直接代入法复合几步,找出规律,再用数学归纳法证明一般情况.

解　设 $f_1(x)=f(x)$,则

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=$$

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+[f_2(x)]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

设　$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$,则

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+[f_k(x)]^2}}=$$

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由数学归纳法知

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\qquad n=1,2,3,\cdots$$

显然,$f_n(-x)=-f_n(x)$,即 $f_n(x)$ 为奇函数.由于显然有 $|f_n(x)|=\dfrac{|x|}{\sqrt{1+nx^2}}<1$,故 $f_n(x)$ 有界.

例 1.3 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\leqslant 0)\\ x^2+x & (x>0)\end{cases}$，则下式中正确的是（ ）.

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2 & (x\leqslant 0)\\ -(x^2+x) & (x>0)\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}x^2 & (x\leqslant 0)\\ x^2-x & (x>0)\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x) & (x<0)\\ -x^2 & (x\geqslant 0)\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x & (x<0)\\ x^2 & (x\geqslant 0)\end{cases}$

答 (D) 正确.

解法 1 当 $x\geqslant 0$ 时，$-x\leqslant 0$，由 $f(x)$ 的定义，$f(-x)=(-x)^2=x^2$.

当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$，即(D) 正确.

解法 2 令 $y=-x$，则当 $x\leqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$；$x>0$ 时，$y<0$，代入 $f(x)$ 的表达式得

$$f(-y)=\begin{cases}(-y)^2 & (y\geqslant 0)\\ (-y)^2+(-y) & (y<0)\end{cases}$$

即有

$$f(-y)=\begin{cases}y^2-y & (y<0)\\ y^2 & (y\geqslant 0)\end{cases}$$

这与(D) 中的函数是相同的.

【注】 本题也可利用 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称的道理，直接从图形上判断(D) 是正确的.

例 1.4 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解　由于 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，可得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，再根据 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 知 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$，这就是 $\varphi(x)$ 的定义域.

例 1.5　若数列 x_n 和 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是(　　).

(A) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(B) 若 x_n 发散，则 y_n 必为无穷小

(C) x_n 或 y_n 是无穷小量

(D) 若 x_n 为无穷大，则 y_n 必为无穷小

解　取 $x_n=\begin{cases}n & n\text{ 为奇数}\\0 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$，$y_n=\begin{cases}0 & n\text{ 为奇数}\\n & n\text{ 为偶数}\end{cases}$，说明(A) 不正确；取 $x_n=1+(-1)^n$，$y_n=1-(-1)^n$，说明(B)，(C) 不正确；(D) 正确. 事实上，因为 x_n 为无穷大，所以 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，又 x_ny_n 为无穷小，从而 $y_n=\dfrac{1}{x_n}\cdot x_ny_n$ 为无穷小.

例 1.6　求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+a^n+\left(\dfrac{a^2}{2}\right)^n}$　$(a\geqslant 0)$.

解　需根据 a 的取值范围分别讨论.

(1) 当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^2+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}=1$$

(2) 当 $1<a\leqslant 2$ 时

$$a<\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}a$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}a=a$$

(3) 当 $a>2$ 时

$$\frac{a^2}{2}<\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}\,\frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}\,\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$$

综上可知

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\begin{cases}1 & (0\leqslant a\leqslant 1)\\ a & (1<a\leqslant 2)\\ \dfrac{a^2}{2} & (a>2)\end{cases}$$

【注】 本题答案实际就是 $1,a$ 和 $\frac{a^2}{2}$ 中的最大者，类似可得到更一般的结论：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{a_i\}\quad a_i\geqslant 0$$

例 1.7 设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

证 因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(x_n+x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{x_nx_n\frac{a}{x_n^2}}=\sqrt[3]{a}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

所以 $\{x_n\}$ 有下界. 又因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)-x_n=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x_n^2}-x_n\right)=\frac{a-x_n^3}{3x_n^2}\leqslant 0$$

所以$\{x_n\}$单调下降有下界，从而存在极限，设$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$，对$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$两端取极限得$l = \frac{1}{3}\left(2l + \frac{a}{l^2}\right)$解之得

$$l = \sqrt[3]{a}$$

【注】 本题提供了求正数立方根的迭代公式，而且收敛很快．试导出求平方根和n次方根的类似公式．

例 1.8　设$x_1 > 0$且$x_{n+1} = \frac{5(1+x_n)}{5+x_n}$　$(n = 1,2,\cdots)$．证明$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在并求此极限．

证　容易看出$1 < x_{n+} = \frac{5(1+x_n)}{5+x_n} < 5$　$(n = 1,2,\cdots)$

即$\{x_n\}$有上下界，又因为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{5(1+x_n)}{5+x_n} - \frac{5(1+x_{n-1})}{5+x_{n-1}} = \frac{20(x_n - x_{n-1})}{(5+x_n)(5+x_{n-1})}$$

所以

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} > 0 \quad (n = 2,3,\cdots)$$

而
$$x_2 - x_1 = \frac{5 - x_1^2}{5 + x_1}$$

因此，当$x_1 < \sqrt{5}$时，$\{x_n\}$单调上升；当$x_1 > \sqrt{5}$时，$\{x_n\}$单调下降；当$x_1 = \sqrt{5}$时，$x_n \equiv \sqrt{5}$，$n = 1,2,\cdots$．总之，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在且容易求出此极限值为$\sqrt{5}$．

例 1.9　求$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，$n$为正整数．

解　因为

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{n\to0^+}\left[\left(1 + \frac{\tan x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x - x}}\right]^{\frac{\tan x - x}{x^3}}$$

而
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{n\to0^+}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

故有
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$$

取 $x=\frac{1}{n}$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

例 1.10 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[(\sin x+\cos x)^2]^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2x}}=$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{2x}}=\mathrm{e}$$

例 1.11 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\tan x-\sin x)(1-\cos\sqrt{x})}{x^2(1-\sqrt{\cos x})}$.

解

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x(1-\cos x)(1+\sqrt{\cos x})(1-\cos\sqrt{x})}{x^2(1-\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}(1+\sqrt{\cos x})\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=$$

$$2\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=1$$

【注】 这里用到等价无穷小代换：$\tan x\sim x$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x(x\to 0^+)$.

例 1.12 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-ax-b\right)=1$，求常数 a,b.

解法 1 由

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2-(a+b)x-b}{1+x}=1$$

可得
$$\begin{cases}1-a=0\\-(a+b)=1\end{cases}$$

解之得 $a=1,b=-2$.

解法 2 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2-1}{1+x}-ax-b\right)=$