

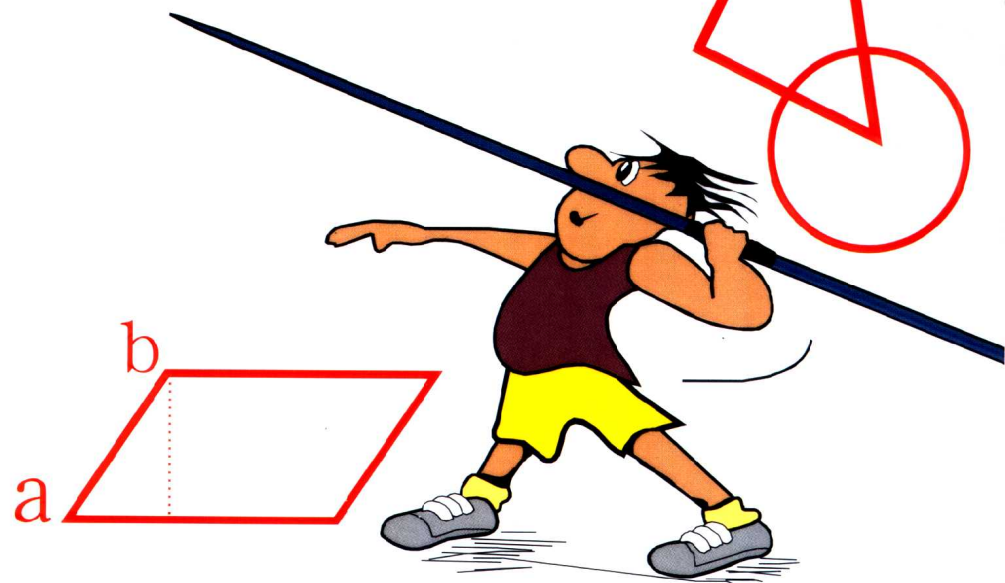
奥林匹克数学 普及讲座丛书（之二）

丛书主编 周春荔

Pindemiajine

初中 数学竞赛中的 平面几何

周春荔 编著



中国物资出版社

周春荔主编 奥林匹克数学普及讲座丛书(之二)

初中数学竞赛中的 平面几何

周春荔 编著

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛中的平面几何/周春荔编著. —北京:
中国物资出版社, 2004. 8
(奥林匹克数学普及讲座丛书: 2)
ISBN 7-5047-2200-6

I. 初… II. 周… III. 几何课—初中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070197 号

责任编辑 黑俊贵
责任印制 方鹏远
责任校对 王 莉

中国物资出版社出版发行

网址: <http://www.chph.cn>

社址: 北京市西城区月坛北街 25 号

电话: (010) 68589540 邮编: 100834

全国新华书店经销

北京才智印刷厂印刷

开本: 850×1168mm 1/32 印张: 11 字数: 239 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

书号: ISBN 7-5047-2200-6/G · 0460

印数: 0001—8000 册

定价: 18.00 元

(图书出现印装质量问题, 本社负责调换)

内 容 提 要

本册内容是对初中平面几何知识的自然延拓与扩充,内容包括几何基本概念与简单图形、三角形全等及其应用、四边形、几何变换、圆、几何方法综述、几何不等式及极值、几何专题选讲等。通过对初中数学竞赛的平面几何问题的分类讲解与练习,夯实基础知识、发展逻辑思维能力,领悟数学思想,培养创新意识。内容由浅入深,按知识系统,根据大纲逐年级上升,适于自学和配合教学同步进行,各章配有精选的练习题和解答,供练习选用。既可做学生学习奥林匹克数学的教材,又可做培训教练员的参考书。

序 言

2002 年暑期,在从西安返京的列车上,遇到了中国物资出版社的副编审黑俊贵女士。我们谈到了数学奥林匹克,她很感兴趣。诚挚地写本数学奥林匹克的书在该社出版,为数学爱好者提供一份“营养套餐”。

回到北京,写书的事一直没有排上日程。后来,经过一催再促,才抽空草拟了个编写提纲。直到 2003 年春,才着手本套书的写作。

专门以十几岁的中学生为对象的现代意义下的数学竞赛,人们公认为起源于匈牙利。匈牙利的数学竞赛自 1894 年起至今已有百余年历史,每次竞赛出 3 道题,限 4 小时完成,允许使用参考书。试题别具风格,常常有高等数学背景,却用初等数学知识就可以解答。

匈牙利的数学竞赛造就了一批数学大师或科学巨匠。被称为匈牙利现代数学之父的费叶尔(1880—59),著名力学家,现代航天事业的奠基人冯·卡门(1881—33),著名的组合数学家寇尼希(1884—44),群上测度与积分论的创始人哈尔(1885—1933),泛函分析的奠基者之一黎斯(1880—1956),著名分析学家舍贵(1895—),拉多(1895—1965)等,都是早期的数学竞赛优胜者。这些事例表明,数学竞赛是发现和造就人才的一个重要途径。

1934 年苏联列宁格勒大学主办了中学生数学奥林匹克,首次

把数学考试与“奥林匹克”联系起来;1935年又由莫斯科大学主办了中学生数学奥林匹克,受到广大师生的热烈欢迎。以后不少苏联的加盟共和国也相继举办数学奥林匹克。1961年开始举办全俄数学奥林匹克,1967年举办全苏数学奥林匹克。人们发现,前苏联基础教育阶段的高水平的数学教育与数学奥林匹克存在着一定的联系。20世纪中叶,世界出现了一个举办中学生数学竞赛的热潮。这个世界性的中学生数学奥林匹克热潮与新数学运动大体同时起步,但新数运动早已偃旗息鼓,而数学竞赛则正如火如荼。

世界各国的中学生数学竞赛活动的开展为国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad)的产生创造了条件,而国际数学奥林匹克(IMO)的产生与发展又推动了各地区、各国数学竞赛的发展。第一届国际数学奥林匹克(IMO)于1959年7月在罗马尼亚古都布拉索(位于布加勒斯特西北约200公里)拉开帷幕,这是数学竞赛跨越国界的创举。至今除1980年因故未举办外,到2003年已经举办了44届。1990年在北京举办第31届IMO时,已发展到54个国家或地区(308人),此后又逐年陆续增加到80多个队,约500人的规模。如今IMO已经成为国际上一项最有影响的学科竞赛,同时也是公认的水平最高的中学生数学竞赛。

1980年国际数学教育委员会决定成立IMO分委员会(1981年正式成立),负责安排每年活动的组织者。从第22届IMO开始,IMO更走向成熟。IMO的运作已经制度化、规范化,选手的水平也大大提高。随着数学竞赛的发展,已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学。数学奥林匹克的兴旺发展,影响了其他学科竞赛的发展,如物理、化学、生物、信息等国际奥林匹克相继兴起,国际学科竞赛已经成为一股促进学科教育发展的世界性潮流。

在2002年世界数学家大会期间及会后,不少人提出了一个十分有意思的话题:参加过历届国际数学奥林匹克的选手中有没有人拿到过菲尔兹奖?巧得很,2002年7月国际数学奥林匹克(香港)委员会主席岑嘉评教授为此专门撰文,我们仅摘录了IMO的优

序 言

胜者后来获得菲尔兹奖的人的名字。

姓 名	国 籍	参加 IMO 时间	获奖时间
Gregory Margulis	俄罗斯	1959 年银牌	1978 年菲尔兹奖
Valdimir Drinfeld	乌克兰	1969 年金牌	1990 年菲尔兹奖
Jean - Ghristophe Yoccoz	法国	1974 年金牌	1994 年菲尔兹奖
Richard Borcherds	英国	1977 年金牌 1978 年银牌	1998 年菲尔兹奖
Timothy Gowers	英国	1981 年金牌	1998 年菲尔兹奖
Laurant Lafforgue	法国	1985 年金牌	2002 年菲尔兹奖

我国的中学生数学竞赛活动是与 20 世界 50 年代向苏联学习分不开的。

1946 年华罗庚应邀访苏三个月,看到苏联大学中有很多学生学数学,例如,格鲁吉亚的一个大学的 2000 多学生中就有 600 多个学生学数学。华罗庚问:“你们这么多数学学生,将来毕业后,有什么出路呢?”友人答的很妙:“头脑受过数学训练的人,你担心他们会没有出路吗?”大数学家维诺格拉朵夫也说:“数学是科学之母,一个国家如果数学不发达,其他都谈不上。”华罗庚听了柯尔幕哥洛夫与阿历山德罗夫为参赛中学师生的两次讲演。这样两位著名数学家,利用星期天休假给十五六岁的学生作讲演,那种诲人不倦,传播数学给一般人民的精神使华罗庚深受感动。除教室中席无虚座外,窗口上也挤满了人,其间还有白发苍苍的老年中学教师,他们是专程来听这些著名学者的讲演而求进步的。这些在华罗庚心中“埋藏了在中国倡办数学竞赛活动及数学普及活动的种子。”

1956 年,在华罗庚、苏步青、江泽涵等我国老一辈数学家的倡导下,由中国数学理事会发起,经高等教育部和教育部同意,我国举行了首次中学生数学竞赛,这次只在北京、天津、上海、武汉试办。待取得经验后,再逐步推广。据不完全统计,除 1959 年、1961 年中断外,1964 年前每年都有一些城市举办数学竞赛。这一时期,

我国数学竞赛的势头良好,竞赛方式,试题难度,选手水平都与国际持平。从1965年起到1977年,我国的数学竞赛因文革而中断了13年。这一时期的数学竞赛优胜者在文革后不少显露头角,正如王元院士在《数学竞赛之我见》中指出的:“要用事实说明数学竞赛活动的成就。例如,仅仅‘文革’前的几次低层次数学竞赛中,已有一些竞赛优胜者成才了。如上海的汪嘉冈、陈志华,北京的唐守文、石赫,他们现在已经是国内的著名中年数学家,有的已获博士生导师资格。他们在文革中都被耽误了10年,否则完全会有更大成就。”

中国数学竞赛的国内成熟期是在1978年以后。1978年粉碎了四人帮后迎来了科学的春天,4月中旬,国务院批准全国举办数学竞赛,组织北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东8省市举办中学生数学竞赛,由方毅副总理任竞赛委员会主任,由中科院副院长中国数学会理事长华罗庚教授任竞赛委员会副主任,4月25日召开了竞赛委员会第一次会议,确定了命题原则、竞赛方法、和推荐优秀学生免试进入大学的办法。全国有20万在校生参加。参加决赛的青少年,年龄最大的19岁,最小的14岁。多数是高中生,但也有少数的初中生。除上述8个省市之外,1978年福建省,福州市,山西省等也组织了数学竞赛。

邓小平同志肯定了这次竞赛,方毅同志批示说:“这是发现人才,出人才的好方法之一,今后拟继续坚持下去。”由于1979年全国出现了竞赛过热形势,1980年全国停办数学竞赛。教育部和各省的教育行政部门不再组办数学竞赛,我国的中学生数学竞赛转为民办。1981年由中国数学会普及工作委员会,北京数学会发起全国高中数学联合竞赛,25个省市参加,1982年由上海组办,28省市参加。以后各省市轮流组办,由中国数学会普及工作委员会进行调节,至今都采取这个模式。1984年开始,举办全国初中数学联赛,也是采取上述模式。从1991年开始,中国数学会普及工作委员会举办小学生数学奥林匹克。

敬爱的华罗庚教授于1985年6月12日在出访日本讲学时因心脏病突发而逝世,享年75岁。为了弘扬华罗庚教授的爱国主义精神,学习华老勤奋学习、献身科学的优秀品质,激发广大中小学生学习数学的兴趣,开发智力,普及数学科学,于1986年由中国少年报社、中国优选法统筹法与经济数学研究会、中国数学会、中央电视台、中国科协青少部共同举办了首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛。当时的胡耀邦总书记亲为“华罗庚金杯”题字。参赛学生是小学高年级和初一学生,每两年举办一届。自2003年第9届起,改为每年一届。

自1990年开始,“双法”学会数学教育委员会举办“希望杯”全国数学邀请赛。对象是初一、初二、高一、高二共四个年级。前中国数学奥委会主席王寿仁教授说:全国初中、高中数学联赛和全国希望杯数学邀请赛,好比我的左右手,缺一个都不好,我都支持。从2002年又有了小学希望杯数学邀请赛,也很受学生欢迎。

从1985年派观察员和两名学生参加IMO以来,我国参加IMO的准备工作由中国数学会的中国数学奥林匹克委员会领导。先由各省市的全国高中数学联赛优胜者参加全国数学冬令营(也叫《中国数学奥林匹克》),从中选出20余名学生进国家集训队,集训队由高校教师进行培训,经过三个月后,通过考试评估由教练组投票表决选出参加IMO的6名选手,再经过一个月的培训,于每年7月出国参加IMO比赛。从1988年至2003年的17次IMO,我国取得10次团体总分第一名,共获金牌71枚,占我国参赛选手的69.6%,我国的选手在IMO比赛中的优异成绩标志着我国数学教育的优异水平。

如今,奥林匹克数学教育的作用已被多数国民所公认。激发青少年学习数学的兴趣,有助于早期智力开发,有助于发现和培养人才。数学竞赛推动了数学知识的普及,促进数学教师知识水平的提高,是数学改革的试验田。因此奥林匹克数学教育是较高层次的基础教育,开发智力的素质教育,生动活泼的课外教育,现代

数学的普及教育。理应大家更好地培育它、研究它和发展它！

随着人类进入 21 世纪,我国的数学奥林匹克又有新的发展。2001 年在古城西安举办了首届中国西部数学奥林匹克;此外,2002 年在珠海举办了首届中国女子数学奥林匹克(CGMO),我国的数学竞赛活动正在 21 世纪的改革浪潮中与时俱进地向前发展!

数学是一门基础课。义务教育新课标的推行为数学爱好者提供了时间与空间,可以充分地发展自己的数学爱好,更好地提高数学能力。为此,初中阶段必须较系统地打好数学的基础。不但要学好代数,还要学好平面几何与数论初步,领悟数学的思想方法。本套丛书就是为此目的做的一种尝试,分为《初中数学竞赛中的代数问题》、《初中数学竞赛中的平面几何》、《初中数学竞赛中的数论初步》、《初中数学竞赛中的思维方法》四册。希望与广大初中生能在学习实践中切磋学好数学的体验,共同探索一条能使多数人具备较高的数学素养的学习途径。

首都师范大学数学系 周春荔

目 录

第1章 几何基本概念与简单图形	(1)
§ 1.1 线段与角的推理计算	(1)
§ 1.2 平行线中的推理入门	(9)
§ 1.3 通过面积割补练习推理	(16)
第2章 三角形	(23)
§ 2.1 由线段的性质谈起	(23)
§ 2.2 由三角形内角和谈起	(29)
§ 2.3 三角形全等	(38)
§ 2.4 三角形全等的综合应用	(48)
§ 2.5 三角形中位线定理应用例谈	(58)
§ 2.6 勾股定理及其逆定理	(67)
第3章 四边形	(77)
§ 3.1 四边形中的趣味竞赛题	(77)
§ 3.2 平行四边形及其判定	(84)
§ 3.3 梯形的判定及中位线定理	(92)
§ 3.4 正方形证题选析	(100)
第4章 平面图形变换初步	(109)
§ 4.1 平移帮助你思考	(109)
§ 4.2 轴对称给你智慧	(118)
§ 4.3 图形旋转的艺术	(125)

第5章 相似形	(132)
§ 5.1 相似三角形	(132)
§ 5.2 三角形角平分线性质定理及其应用	(147)
§ 5.3 梅内劳斯定理及其应用	(160)
§ 5.4 塞瓦定理及其应用	(168)
第6章 圆	(176)
§ 6.1 垂径定理及其应用	(176)
§ 6.2 圆周角定理及其应用	(183)
§ 6.3 圆内接四边形与四点共圆	(192)
§ 6.4 圆幂定理及其应用	(200)
第7章 几何证题方法综述	(209)
§ 7.1 几何命题与解题思路	(209)
§ 7.2 谈谈平面几何中的辅助线	(222)
§ 7.3 “化直法”解题例谈	(236)
§ 7.4 补形漫谈	(241)
§ 7.5 化归原则例谈	(248)
第8章 几何专题选讲	(256)
§ 8.1 几何极值与等周问题	(256)
§ 8.2 面积方程初步	(263)
§ 8.3 限制工具的几何作图	(270)
§ 8.4 平面图形的覆盖入门	(275)
附录 研究练习题提示与解答	(283)

第 1 章 几何基本概念与简单图形

§ 1.1 线段与角的推理计算

(一)

平面几何是一门研究平面图形位置关系及其相关性质的学科. 学好了平面几何, 将为我们学习空间图形及其性质、学习牛顿力学打好基础.

同学们在小学阶段已经学过不少的几何常识. 常见的点、直线、面积、角、平行线、圆这些名词都已见过. 面积体积的公式也介绍过, 甚至对“三角形内角和等于 180° ”、“勾股定理”也知道了, 难道这还不够吗?

其实, 小学阶段大家学的是实验几何, 只告诉你应该这样, 并没告诉你为什么这样, 并没教你证明结论普遍性的方法. 小学教你的几何知识, 怎么教你怎么记, 这里重点是常识性知识的灌输, 没有发展的余地了. 然而, 初中学习的是推理几何, 是在学习知识的同时发展能力, 是学习逻辑分析、论证的方法, 使你逐渐具备可持续发展的能力. 这对 21 世纪的中学生是极为重要的.

(二)

既然明确了学习几何重在推理训练, 我们就从线段、角开始一

步一步进行练习.

要推理就要有规则,比如“经过两点有一条直线,并且只有一条直线”、“所有联结两点的线中,线段最短”这些都是平面几何世界里的法规,被称为公理,大家都要遵循它.

另外,无论线段也好,角与面积也好,它们都是几何中的量.对于量来说,也有一些公用的规则,叫做等量公理与不等量公理.下面只先介绍等量公理,有如下七条:

1. 等于第三个量的两个量相等;
2. 等量加上等量,它们的和相等;
3. 等量减去等量,它们的差相等;
4. 等量乘以等量,它们的积相等;
5. 等量除以(不为0)等数,它们的商相等;
6. 全量等于它的各部分的和;
7. 在等式中,一个量可以用它的等量来代替(简称等量代换).

有了以上规则,我们就可以通过线段和角来学习简单的推理.在推理过程中每一步都要写明根据,初学时不要省略.

例1. 如图1所示, $\angle AOB = \angle COD$. 求证: $\angle AOC = \angle BOD$

证明 因为 $\angle AOB = \angle COD$ (已知)

又 $\angle BOC = \angle BOC$.

所以 $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC$

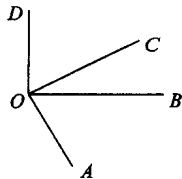
(等量加等量其和相等)

但 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$,

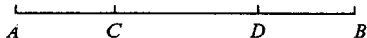
$\angle BOD = \angle COD + \angle BOC$ (全量等于各部分之和)

所以 $\angle AOC = \angle BOD$

(等量代换).



(图1)



(图2)

例2. 如图2所示, C, D 为线段 AB 上两点, $AD = CB$.

求证: $AC = DB$.

证明 因为 $AD = CB$ (已知); 而 $AD = AC + CD$, $CB = CD + DB$ (全量等于各部分之和)

所以 $AC + CD = CD + DB$ (等量代换)

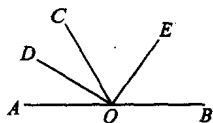
又 $CD = CD$,

所以 $AC = DB$ (等量减去等量, 它们的差相等).

例3. 如图3, AOB 是一条直线, $\angle AOC = 60^\circ$. OD, OE 分别是 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$ 的平分线, 问图中互为补角关系的角共有多少对?

解 因为 $\angle AOC = 60^\circ$, 而 $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$.

所以 $\angle COB = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



又因为 OD 是 $\angle AOC$ 的平分线,

(图3)

所以 $\angle AOD = \angle COD = 30^\circ$ (角平分线的定义)

因为 OE 是 $\angle BOC$ 的平分线,

所以 $\angle BOE = \angle COE = 60^\circ$ (角平分线的定义)

所以 $\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$, $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$,

$\angle AOE + \angle EOB = 180^\circ$, $\angle COD + \angle DOB = 180^\circ$,

$\angle AOC + \angle AOE = 180^\circ$, $\angle COE + \angle AOE = 180^\circ$,

$\angle BOE + \angle BOC = 180^\circ$, $\angle COE + \angle BOC = 180^\circ$.

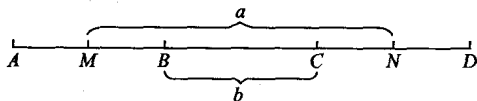
共有 8 对角互为补角.

在解本题的过程中, 有些同学常将补角与邻补角概念混淆, 所以得出只有 $\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$, $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$, $\angle AOE + \angle EOB = 180^\circ$ 共 3 对的错误答案. 其根本原因是对补角与邻补角概念弄混淆了. 这充分说明, 要想正确推理, 对概念的定义必须准确把握. 必须咬文嚼字. 因为差之毫厘, 可能会谬之千里. 准确地理解掌握概念是学好推理几何的基础.

例4. 如图4, 已知 B, C 是线段 AD 上任意两点, M 是 AB 的中点, N 是 CD 的中点, 若 $MN = a$, $BC = b$.

求 AD .

解 从图4中可见 $AD = AB + BC + CD$ (全量等于各部分之和),
 由于 M 是 AB 的中点,
 所以 $AB = 2MB$ (线段中点定义), 由于 N 是 CD
 的中点, 所以 $CD = 2CN$
 (线段中点定义).

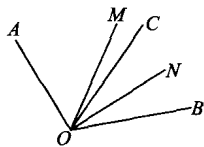


(图4)

$$\begin{aligned} \text{因此, } AD &= 2MB + BC + 2CN \text{ (等量代换)} \\ &= 2MB + 2BC + 2CN - BC \\ &= 2(MB + BC + CN) - BC \\ &= 2MN - BC \text{ (全量等于各部分的和)} \\ &= 2a - b. \end{aligned}$$

所以 $AD = 2a - b$.

例5. 如图5, OM 是 $\angle AOB$ 的平分线, 射线 OC 在 $\angle BOM$ 内部, ON 是 $\angle BOC$ 的平分线. 已知 $\angle AOC = 80^\circ$.
 求 $\angle MON$ 的度数?



(图5)

解 因为 OM 是 $\angle AOB$ 的平分线,
 所以 $\angle AOM = \angle BOM$ (角平分线定义), 又
 ON 是 $\angle BOC$ 的平分线,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \angle BON &= \angle CON \text{ (角平分线定义)} \\ \text{所以 } \angle BOC &= 2\angle NOC \dots\dots\dots \text{①} \end{aligned}$$

由图可知 $\angle AOM + \angle COM = \angle AOC = 80^\circ$

所以 $\angle BOM + \angle COM = 80^\circ$ (等量代换)

但 $\angle BOM = \angle BOC + \angle COM$ (全量等于各部分的和)

所以 $\angle BOC + \angle COM + \angle COM = 80^\circ$ (等量代换)

即 $\angle BOC + 2\angle COM = 80^\circ$ (合并同类项)

将①式代入得 $2\angle NOC + 2\angle COM = 80^\circ$ (等量代换)

即 $\angle NOC + \angle COM = 40^\circ$ (等量之半相等)

所以 $\angle MON = 40^\circ$ (全量等于各部分的和).

说明 在所注的理由中,“等量除以等数2 其商相等”经常简称为“等量之半相等”.

例 6. 如图 6, A, O, B 是一条直线上的三个点, 已知 $\angle BOC$ 比 $\angle AOC$ 大 24° . 求: $\angle BOC$ 与 $\angle AOC$ 的度数.

解 因为 A, O, B 是一条直线上的三个点, 所以 $\angle BOC + \angle AOC = 180^\circ$ (平角定义).

又 $\angle BOC - \angle AOC = 24^\circ$ (已知)

两式相加得 $2\angle BOC = 204^\circ$,

所以 $\angle BOC = 102^\circ$.

因此 $\angle AOC = 102^\circ - 24^\circ = 78^\circ$.

答 $\angle BOC$ 是 102° 的角, $\angle AOC$ 是 78° 的 (图 6)

角.

说明 在解答本题过程中, A, O, B 在同一条直线上, 隐含 $\angle AOB$ 是个平角这个条件, 如果不理解题意, 发现 $\angle BOC + \angle AOC = 180^\circ$, 就很难解出本题了.

例 7. 如图 7 所示, B, C, D 依次是线段 AE 上的三点. 已知 $AE = 8.9$ 厘米, $BD = 3$ 厘米, 求以 A, B, C, D, E 这五个点为端点的所有线段的长度之和是多少?

解 以 A, B, C, D, E 这五个点为端点的线段共 10 条, 它们是 $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$, 其长度总和为: (图 7)

$$AB + AC + AD + AE + BC + BD + BE + CD + CE + DE = 4AB + 6BC + 6CD + 4DE$$

$$= 4(AB + DE) + 6(BC + CD) = 4(AE - BD) + 6BD = 4AE + 2BD$$

$$= 4 \times 8.9 + 2 \times 3 = 41.6 \text{ (厘米)}.$$

答 这十条线段的长度总和是 41.6 厘米.

说明 其中每一步如何代换, 请读者自己仔细按图去分析. 总之, 有关的线段都要表示为 AE 与 BD 两个已知线段的代数和的形式.