【奥赛急先锋 系列丛书之 全真优秀竞赛试题】

新概念 学科竞赛完全设计

XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI

# (2001–2003)全真优秀竞赛试题精编

# 奥赛急先锋

## 高中数学

学科主编 刘汉文

中国少年儿童出版社

【奥赛急先锋 系列丛书之 全真优秀竞赛试题】

新概念 学科竞赛完全设计

XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI

(2001–2003)全真优秀

# 竞赛试题精编

# 奥赛急先锋

## 高中数学

学科主编：刘汉文

本册主编：刘汉文

中国少年儿童出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

奥赛急先锋全真优秀竞赛试题精编．高中数学/刘汉文主编．—北京：中国少年儿童出版社，2004

ISBN 7-5007-7013-8

Ⅰ．奥…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学课－高中－试题

Ⅳ．G632．479

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 030938 号

**AOSAI JI XIANFENG**

**QUANZHEN YOUXIU JINGSAI SHITI JINGBIAN**

出版发行：**中国少年儿童新闻出版总社**

**中国少年兒童出版社**

出 版 人：海　飞

执行出版人：陈海燕

**作　　者**：刘汉文　　**封面设计**：宋娉婷

**主持编辑**：石琳芝　　**版式设计**：宋娉婷

**责任校对**：钱　进　　**责任编辑**：刘玉珍

**社　　址**：北京市东四十二条 21 号　　**邮政编码**：100708

**总 编 室**：010-64035735　　**传　　真**：010-64012262

**发 行 部**：010-65016655-5343　010-65956688-27

**h t t p**：//www.ccppg.com.cn

**E-mail**：zbs@ccppg.com.cn

**印刷**：北京金特印刷有限责任公司　　**经销**：新华书店

**开本**：787×1092　1/16　　**印张**：13.5

2004 年 7 月第 1 版　　2004 年 7 月北京第 1 次印刷

**字数**：370 千字　　**印数**：10，000 册

ISBN 7-5007-7013-8/G·5387

**高中（数、英、生、物、化）5 册总定价**：66 元

# 使用说明暨前言

**为了引导读者更好地选择和使用这套精品图书，还是让我们先从奥林匹克说起。**

国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad 简称IMO），是一种国际性的以中学数学为内容，以中学生为参赛对象的竞赛活动。第一届国际数学奥林匹克于1959年夏天在罗马尼亚举行。我国的数学竞赛活动始于1956年，当时在著名数学大师华罗庚教授的亲自参与并指导下，在北京、上海、天津、武汉四大城市举办了我国第一届数学竞赛。1985年我国首次正式派代表参加国际奥林匹克数学竞赛，并取得骄人的成绩。

经过40多年的发展，奥林匹克竞赛活动已经远远超出了一门学科竞赛的意义，它已在竞赛的基础上形成了自己特有的人才培养模式；形成了自己特有的教材、辅导书系列，形成了一套完整的竞赛考试、评估机制。而它的培养和评估机制，不仅对于各种门类的学科竞赛，并且对于我们的课堂教授、教材制订都有着极大的参考价值。

奥林匹克教材及辅导图书相对于现行的课内教材而言，最大的优势就在于——

○它承认并适应学生的个体差异，在培养个人特长、开发个人潜能、造就拔尖人才方面具有独特的功能。

更为可喜的是，数学学科的竞赛活动影响并带动了物理学、化学、生物学、计算机学、俄语、英语等学科的竞赛活动，培养了大批有个性有天赋的学生。

**我们研究竞赛的意义在哪里？**

**1、** *用精英的标准要求自己，是成为精英的开始。*

竞赛是精英选拔的重要方式，特别是奥林匹克这样的具有强大号召力的大型比赛，更是集中了精英的智慧，它所采用的评判体系、评判标准，对于我们新的人才培养和选拔机制的形成都具有巨大的引导作用和前瞻性。

**2、** *棋高一着，先行一步掌握中、高考新题型。*

竞赛题的魅力在于“难”。“难题”，一种是指综合性强的题，另一种是指与实际联系比较密切、应用性强的题。而这两类题，正是近年素质教育中强调的最新的命题趋势，在中、高考命题中的比例也逐年增加。解析综合性强的题需要把学过的知识有机地联系在一起，有时还需要用到其他学科的知识进行整合。解析实际应用型的题，需要从大量事实中找出事物的遵循规律。征服了这两类难题，对于中、高考命题中出现的新题、难题，自然可以棋高一着，应对自如了。

**3、** *知识与能力并重，积累与探究互进，不仅“学会”，而且“会学”。*

竞赛是源于课堂而高于课堂的，所以要能应对自如地解答竞赛题，就须正确处理知识积累与能力培养、打好基础与研究难题的关系。知识的占有是能力形成的基础，掌握知识的速度与质量依赖于能力的发展。只有打好坚实的基础，才会具有研究难题、探究未知的能力。所以，竞赛要求学生的品质，不仅是“学会”，更重要的是“会学”，也就

是我们一直在提的研究性学习。

**4、课后加餐，课内加分；自学的成功，在课堂学习中得到检验。**

对于学生来说，课后的练习和自学的成功，如果能够在课堂学习和课内测试中得到验证，是最具说服力的，也是真正让学生在奥赛的先进命题理念和训练方式中受益的表现。真正熟练并理解了竞赛题的解题技巧，学生必然能增强学习的兴趣和动力，在平时的考试中游刃有余。

因此，我们集成了近年国内外竞赛和中高考的优秀试题；并且对这一批优秀试题的解题思路、方法进行了总结归纳，给出全新的解题方略。

### 竞赛和课堂的关系

为了恰当处理竞赛和课堂学习的关系，本书作者认真研究了最新的中小学教学大纲和考纲，参照各版本的中小学教材，在知识层面上，进行了严格的年级设计，对应课堂教学进行针对性训练和提高；在能力层面上，遵循竞赛规则，帮助学生真正实现内在能力的强化，不仅能自如应对各类升学考试，而且能够在学科竞赛中取得名次，获得全面的自信提升！

### 奥赛急先锋

正是因为**《奥赛急先锋——新概念学科竞赛完全设计》**丛书在体例设计和内容编写上的高起点、新视角和实效确凿性，这套书自2002年推出伊始便好评如潮，随后我们推出了姊妹套系**《奥赛急先锋——题库》**和**《奥赛急先锋——ABC卷》**，读者纷纷反映受益匪浅。结合读者和市场的反馈，我们今年在修订和完善原套系的同时，又增添了一个新品种**《奥赛急先锋——全真优秀竞赛试题精编》**。这四套书在内容上互为补充，在功能上互相促进。

○从基础做起，内强筋骨，稳扎稳打。

***《奥赛急先锋——新概念学科竞赛完全设计》***

从各科各阶段的知识要点出发，理清重点知识及运用，在此基础上给出范例剖析，着重进行思路分析。每章节配有典型练习题，都是优秀竞赛题和精选的中高考试题。

| | 语文 | 英语 | 数学 | 物理 | 化学 | 生物 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 高一 | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | |
| 高二 | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | |
| 高三 | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | |
| 全一册 | 高中计算机信息工程　高中语文基础<br>高中语文阅读　高中语文写作　高中生物 | | | | | |

○最丰富、最具有针对性、个性化的训练方案，会做题还会选择，真正让学生聪明起来！

***《奥赛急先锋——ABC卷》***

本套丛书以知识要点分列章节，每章节提炼黄金讲解，随后给出A、B、C三个等级的测试卷，即基础级、提高级、综合能力级。每一级的测试都以试卷的形式给出，不同水平级的学生可以针对性地选择训练，同一学生在不同的学习阶段也可以合理搭配使用，拥有属于自己的个性化方案。

| | 语文 | 英语 | 数学 | 物理 | 化学 | 生物 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 高一 | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ |
| 高二 | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ |
| 高三 | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | |
| 全一册 | | | | | | |

○以解题法为纲领，从题库里选择你所需要的，从答案里寻找你所不知道的。

***《奥赛急先锋——题库》***

以知识点划分章节，每章从归纳而成的高度精炼的黄金解题法出发，讲解方法后，再给出试题来检验学生对方法的掌握。习题根据难度分为A级、B级、C级。与丰富的题量相比，答案更加丰富多彩，解析思路，解读命题方法，指导应试策略，全面而且精到。每章最后给出综合练习。可以说，《题库》在大量的练习的基础上帮助学生达到了最高效的训练效果。

| | 语文 | 英语 | 数学 | 物理 | 化学 | 生物 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 高一 | | | ☺ | ☺ | ☺ | |
| 高二 | | | ☺ | ☺ | ☺ | |
| 高三 | | | ☺ | ☺ | ☺ | |
| 全一册 | | | | | | |

*注：第一期已推出数学，第二期推出物理和化学*

*其他各科正在制作中*

○在最真实的赛场上展现你最大能量的才华，帮助你更清楚地了解自己！

***《奥赛急先锋——全真优秀竞赛试题精编》***

精选自近几年全国市级以上（包括市级）的各个学科优秀竞赛试题，部分学科还收录了2004年最新试题。我们邀请了具有多年奥赛教学经验的一线老师对每一套试题做出科学评析，理清竞赛和平时学习的重点，联系中高考试题，从学生的角度分析讲解。

| | 数学 | 英语 | 物理 | 化学 | 生物 |
|---|---|---|---|---|---|
| 高中 | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ |

《奥赛》系列丛书由刘汉文总体策划并担任丛书主编，由周向霖、金新等担任学科主编，由北京、浙江、江苏、湖北等重点中小学的奥赛教练及特、高级教师编写，尤其是湖北黄冈市教研室的著名老师们的加盟，更给了我们质量和信心的保证！

丛书的推出，意味着我们的工作进入了一个崭新的阶段；我们希望听到的是读者的意见和建议，我们希望看到的是每一位读者的成功，我们希望做到的是全心全意为学生和读者服务！

欢迎来函或致电与我们联系，无论是建议、咨询还是购书，我们都热忱地感谢您的关心和支持！

编者

2004年4月

# 目 录

# 2003 年全国高中数学联合竞赛试题

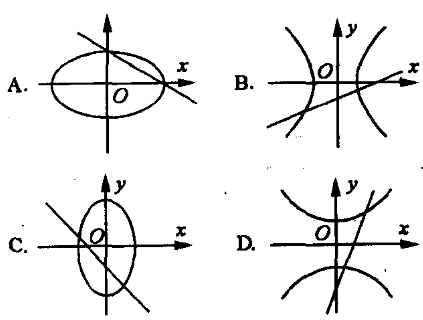
**一、选择题**(本题满分 36 分,每小题 6 分,每小题仅有一个选项是正确的)

1. 删去正整数数列 1,2,3,……中的所有完全平方数,得到一个新数列. 这个新数列的第 2003 项是 ( )

A. 2046　　B. 2047

C. 2048　　D. 2049

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,$ab\neq 0$,那么,直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图形是 ( )




3. 过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 $F$ 作倾斜角为 $60°$ 的直线. 若此直线与抛物线交于 $A,B$ 两点,弦 $AB$ 的中垂线与 $x$ 轴交于 $P$ 点,则线段 $PF$ 的长等于 ( )

A. $\frac{16}{3}$　　B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

4. 若 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right]$,则 $y=\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值是 ( )

A. $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　B. $\frac{11}{6}\sqrt{2}$

C. $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　D. $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

5. 已知 $x,y$ 都在区间 $(-2,2)$ 内,且 $xy=-1$,则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是 ( )

A. $\frac{8}{5}$　　B. $\frac{24}{11}$

C. $\frac{12}{7}$　　D. $\frac{12}{5}$

6. 在四面体 $ABCD$ 中,设 $AB=1$,$CD=\sqrt{3}$,直线 $AB$ 与 $CD$ 的距离为 2,夹角为 $\frac{\pi}{3}$,则四面体 $ABCD$ 的体积等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**二、填空题**(本题满分 54 分,每小题 9 分)

7. 不等式 $|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$ 的解集是____________.

8. 设 $F_1,F_2$ 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点,$P$ 是椭圆上的点,且 $|PF_1|:|PF_2|=2:1$,则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于____________

9. 已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant 0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$,则实数 $a$ 的取值范围是______.

10. 已知 $a,b,c,d$ 均为正整数,且 $\log_a b=\frac{3}{2}$,$\log_c d=\frac{5}{4}$,若 $a-c=9$,则 $b-d=$______.

11. 将八个半径都为 1 的球分两层放置在一个圆柱内,并使得每个球和其相邻的四个球相切,且与圆柱的一个底面及侧面都相切,则此圆柱的高等于____________

12. 设 $M_n=\{$(十进制)$n$ 位纯小数 $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}\mid a_i$ 只取 0 或 $1(i=1,2,\cdots,n-1),a_n=1\}$,$T_n$ 是 $M_n$ 中元素的个数,$S_n$ 是 $M_n$ 中所有元素的和,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=$____________.

**三、解答题**(本题满分 60 分,每小题 20 分)

13. 设 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$,证明不等式:

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$

14. 设 $A,B,C$ 分别是复数 $Z_0=ai$,$Z_1=\frac{1}{2}+bi$,$Z_2=1+ci$ 对应的不共线的三点($a,b,c$ 都是实数).

证明:曲线 $Z=Z_0\cos^4 t+2Z_1\cos^2 t\ \ \sin^2 t+$

$Z_2\sin^4 t\quad(t\in\mathbf{R})$.

与△$ABC$中平行于$AC$的中位线只有一个公共点，并求出此点.

15. 一张纸上画有半径为$R$的圆$O$和圆内一定点$A$，且$OA=a$. 折叠纸片，使圆周上某一点$A'$刚好与$A$点重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕，当$A'$取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合.

## 加试试题

一、(本题满分 50 分)过圆外一点$P$作圆的两条切线和一条割线，切点为$A$，$B$. 所作割线交圆于$C$，$D$两点，$C$在$P$，$D$之间. 在弦$CD$上取一点$Q$，使$\angle DAQ=\angle PBC$.

求证：$\angle DBQ=\angle PAC$.

二、(本题满分 50 分)设三角形的三边长分别是整数$l$，$m$，$n$，且$l>m>n$.

已知$\left\{\frac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^n}{10^4}\right\}$，其中$\{x\}=x-[x]$，而$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

求这种三角形周长的最小值.

三、(本题满分 50 分)由$n$个点和这些点之间的$l$条连线段组成一个空间图形，其中$n=q^2+q+1$，$l\geqslant\frac{1}{2}q(q+1)^2+1$，$q\geqslant2$，$q\in\mathbf{N}$. 已知此图中任四点不共面，每点至少有一条连线段，存在一点至少有$q+2$条连线段.

证明：图中必存在一个空间四边形(即由四点$A$，$B$，$C$，$D$和四条连线段$AB$，$BC$，$CD$，$DA$组成的图形).

# 2003 年第 14 届“希望杯”全国数学邀请赛高一试题

## 第 1 试

一、选择题(每小题 6 分，共 60 分　以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将表示正确答案的英文字母填在每题后面的括号内)

1. 设$p=\frac{1}{\log_2 11}+\frac{1}{\log_3 11}+\frac{1}{\log_4 11}+\frac{1}{\log_5 11}$，则　(　　)

A. $0<p<1$　　B. $1<p<2$

C. $2<p<3$　　D. $3<p<4$.

2. 方程$\log_{2x}(2-7x)=2$的解的个数是(　　)

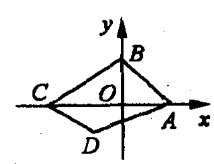
A. 4　　B. 3

C. 1　　D. 0

3. 如图，已知四边形$ABCD$在映射$f:(x,y)\to(x-1,y+2)$作用下的象集为四边形$A'B'C'D'$. 四边形$ABCD$的面积等于 6，则四边形$A'B'C'D'$的面积等于　(　　)

A. 9　　B. $6\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{3}$　　D. 6




第 3 题图

4. 已知$x,y\in\mathbf{R}$，则“$xy\leqslant1$”是“$x^2+y^2\leqslant1$”的　(　　)

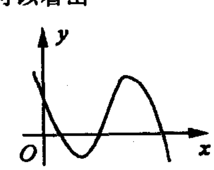
A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 图是函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的图像，由图像可以看出　(　　)




第 5 题图

A. $a>0,d>0$　　B. $a<0,d<0$

C. $a<0,d>0$　　D. $a>0,d<0$

6. 设 $a=\log_{\frac{1}{2}}5$，$b=\log_{\frac{1}{3}}5$，$c=\log_2 5$，$d=\log_3 5$. 则 $a,b,c,d$ 的大小关系是　（　）

A. $d>c>a>b$　　B. $a>c>b>d$

C. $c>d>b>a$　　D. $c>d>a>b$

7. An equilateral triangle（等边三角形）and a circle have the same center. The area of the triangle not in the circle equals the area of the circle not in the triangle. If the radius of the circle is 2, then the length of a side of the triangle is　（　）

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$　　B. $2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$

C. $3\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$　　D. $4\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$

8. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_2=5$，且对大于 2 的正整数 $n$，总有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$则 $a_{2003}$ 等于　（　）

A. $-5$　　B. $-2$

C. 2　　D. 3

9. 等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1536$，公比 $q=-\frac{1}{2}$，用 $p_n$ 表示数列的前 $n$ 项之积，则 $p_n$ 中最大的是　（　）

A. $p_9$　　B. $p_{10}$

C. $p_{11}$　　D. $p_{12}$

10. 2002 年 9 月 28 日，"希望杯"组委会第二次赴俄考查团启程，途径哈巴罗夫斯克和莫斯科，两地航程约9 000千米，往返飞行所用的时间并不相同，这是因为在北半球的高纬度地区，有一股终年方向恒定的西风，人们称它为"高空西风带". 已知往返飞行的时间相差 1.5 小时，飞机在无风天气的平均时速为每小时1 000千米，那么西风速度最接近　（　）

A. 60 千米/小时　　B. 70 千米/小时

C. 80 千米/小时　　D. 90 千米/小时

## 二、A 组填空题（每小题 6 分，共 60 分）

11. 函数 $f(x)=\log_a x(a>0)$，其中 $a>0,a\neq1$，则方程 $f(a^x)=3$ 的解集是________.

12. 函数 $y=\frac{x+1}{x-1}$在区间$(-\infty,0)\cup[2,5)$上的值域是________.

13. 示波器荧屏上有一正弦波，一个最高点在 $B(3,5)$，与 $B$ 相邻的最低点为 $C(7,-1)$，则这个正弦波对应的函数是________.

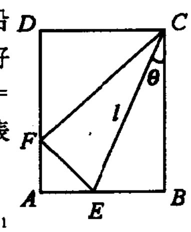
14. 集合 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A$ 是 $S$ 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\notin A$，则称 $x$ 为 $A$ 的一个"孤立元素"，那么 $S$ 中无"孤立元素"的 4 元子集的个数是______.

15. 奇函数 $f(x)$在区间$[3,7]$上是增函数，在区间$[3,6]$上的最大值为 8，最小值为 $-1$，则 $2f(-6)+f(-3)=$________.

16. 设 $2003=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_n}$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为两两不相等的非负整数，则 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=$________.

17. The range of the trigonometric function（三角函数）$y=A\cos x+B$ is $-2\leqslant y\leqslant8$. Determine the value of B is______.

18. 如图，将长方形 $ABCD$ 沿 $CE$ 线折叠，使点 $B$ 恰好落在 $AD$ 边上，折痕 $CE=l$，记$\angle ECB=\theta$，用 $l,\theta$ 表示 $DC=$________.



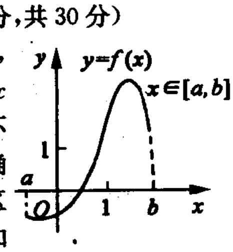
第 18 题图

19. 设 $f_1(x)=\frac{2}{x+1}$，而 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$，$n\in\mathbf{N}^*$. 记 $a_n=\frac{f_n(2)-1}{f_n(2)+2}$，则 $a_{99}=$______.

20. 在世界杯足球赛中，参赛的 32 个队平均分成 8 组，各组先进行单循环赛：组内 4 队每两队赛一次，每组积分领先的两队，共 16 个队分 8 对进入下一阶段的淘汰赛；获胜 8 强进行四分之一决赛；获胜 4 强进行半决赛；失败 2 队比赛争季军；获胜 2 队决赛争冠军. 这样，世界杯共要进行________场比赛.

## 三、B 组填空题（每小题 6 分，共 30 分）

21. 对映射 $f:x\rightarrow f(x)$，使 $f(x)=x$ 成立的 $x$ 的值称为映射 $f$ 的不动点. 若由映射 $f$ 确定在函数 $y=f(x)$ 区间$[a,b]$上的图像如图，从这个图像可知映射 $f$ 在集合$[a,b]$内的不动点个数是________，其中正值有________个.



第 21 题图

22. 数列 $1,1,2,2,3,3,\cdots,n,n,\cdots$的通项公式 $a_n=$________，前 $n$ 项和 $S_n=$________.

23. 甲、乙、丙、丁、戊五位同学，看五本不同的书

$A、B、C、D、E$，每人至少要读一本书，但不能重复读同一本书，甲、乙、丙、丁分别读了 2、2、3、5 本书，$A、B、C、D$ 分别被读了 1、1、2、4 次. 那么，戊读了________本书，$E$ 被读了________次.

**24.** 等差数列$\{a_n\}$及等比数列$\{b_n\}$中，存在不相同的 3 个正整数 $m、n、k$，有 $a_m=b_m, a_n=b_n, a_k=b_k$，且 $a_m\neq a_n$，请写出满足题意的$\{a_n\}$及$\{b_n\}$的通项公式：$a_n=$__________，$b_n=$______，其中 $m、n、k$ 分别是________.

**25.** 函数 $y=f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，值域是$(-1,4)$，对于定义域内不等正实数 $x_1、x_2$，都有 $f(x_1)+f(x_2)<2f(\frac{x_1+x_2}{2})$，请写出两个满足条件的(不同类型的)函数解析式________，________.

## 第 2 试

**一、选择题**(每小题 6 分，共 60 分　以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将表示正确答案的英文字母填在每题后面的圆括号内)

1. 若 $f(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}$ 的定义域为 $A$，$g(x)=\log_2(x+1)$的定义域为 $B$，$h(x)=\sqrt{x-2}$的定义域为 $C$，则　(　　)

A. $C\subseteq A\subseteq B$　　B. $B\subseteq C\subseteq A$

C. $C\subseteq B\subseteq A$　　D. $B\subseteq A\subseteq C$

2. 已知 $a$ 为非零实数，$x$ 为某一实数. 记命题 $M$：$x\in\{-a,a\}$；命题 $N$：$\sqrt{x^2}=a$. 则命题 $M$ 成立是命题 $N$ 成立的　(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分且必要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 自然数 $k$ 的各位数字和的平方记为 $f_1(k)$，且 $f_n(k)=f_1[f_{n-1}(k)]$，则 $f_n(11)(n\in\mathbf{N}^*)$的值域为　(　　)

A. $\mathbf{N}^*$

B. 5

C. $\{4,16,49,169,256\}$

D. $\{2,4,7,13,16\}$

4. 已知正六边形 $ABCDEF$，在下列表达式

①$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}$　②$2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$

③$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$④$2\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{FA}$中，与$\overrightarrow{AC}$等价的有　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5. 递减的等差数列的前 5 项的和等于 20，前 5 项的积等于 3024，则该数列的　(　　)

A. 前 $n$ 项的和没有最大值

B. 前 $n$ 项的和有最小值

C. 前 3 项的和最大

D. 前 4 项的和最大

6. 整数数列$\{a_n\}$，对于每个 $n\geqslant 3$ 都有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，若前 2003 项的和为 $a(a\neq 0)$，则 $S_5$ 等于　(　　)

A. $a$　　B. $\frac{a}{5}$

C. $\frac{5}{a}$　　D. $5a$

7. 13 年前有一笔扶贫助学资金，每年的存款利息(年利率 11.34%，不扣税)可资助 100 人上学(平均每人每月 94.50 元). 现在用同样一笔资金每年的存款利息最多可以资助(　　)人上学(平均每人每月 100 元)(现在利率为 1.98%，且扣 20%的税).

A. 13　　B. 14

C. 16　　D. 17

8. 正数 $a,b$ 满足 $a^{\ln b}=b^{\lg a}$，则有　(　　)

A. $a=1$ 或 $b=1$　　B. $a=1,b\neq 1$

C. $b=1,a\neq 1$　　D. $a=b=1$

9. Tne area of the region in the Cartesian plan consisting of all points$(x,y)$such that $|x|+|y|+|x+y|\leqslant 2$ is　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

10. 关于 $x$ 的不等式 $\lg^2x-(2+m)\lg x+m-1>0$ 对于$|m|\leqslant 1$ 恒成立. 则 $x$ 的取值范围是　(　　)

A. $(0,1)\cup(10^3,+\infty)$

B. $(0,\frac{1}{10})\cup(10^2,+\infty)$

C. $(0,\frac{1}{10})\cup(10^3,+\infty)$

D. $(0,10^2)\cup(10^3,+\infty)$

**二、填空题**(每小题 6 分，共 60 分)

11. 小光前天登录到数理天地网站WWW. mpu91.

com,他在首页看到了一个“您是通过什么方式知道本网站的?”的小调查,他查看了投票结果,发现投票总人数是 800,“杂志”项的投票率是 68%. 当昨天再次登录到数理天地网站时,发现“杂志”项的投票率上升到 72%,当时的投票总人数至少是_______.

12. 易知 $f(x)=x^3-6x$ 是奇函数,它的图像关于原点对称. 据此可推知函数 $y=x^3-3x^2-3x+10$ 的图像的对称中心的坐标是_______.

13. 对于函数 $f(x)$,另有函数 $g(x)=f(2x-3)$ 和 $h(x)=f(3-2x)$. 若函数 $g(x)$ 的定义域为 $x\in[-1,\frac{7}{2}]$,则函数 $h(x)$ 的定义域为 $x\in$_______.

14. The odd numbers1, 3, 5, 7, …, are put into groups $G_1,G_2,G_3,\cdots$, in the following way: $G_1=\{1,3\}$, $G_2=\{5,7,9,11\}$, …So that the group $G_n$ contains $2n$ numbers. If 2003 appearsin $G_x$, the value of $x$ is _______.

15. 已知 $AB$ 为圆的直径,直线 $l$ 过 $B$ 点与圆相切,过弦 $AC$ 的一端 $C$ 作 $CD\perp l$,$D$ 为垂足. 若 $AB$ 的长为 1,则折线段 $AC+CD$ 总长的最大值为_______.

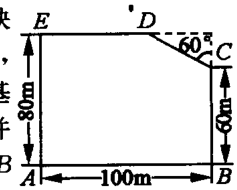
16. 正整数 $n$ 的各位数字之和记为 $S(n)$,例如 $S(10)=1+0=1$,$S(123)=1+2+3=6$,$S(2)=2$ 等. 若 $n+S(n)=2003$,则 $n=$_______.

17. 函数 $f(x)=x^2-3(x\leqslant 0)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$,则不等式 $f(x)<f^{-1}(x)$的解是_______.

18. 若 $\sin^3x-\cos^3x=-1$,则 $\sin x-\cos x$ 的值为_______.

19. 世界杯足球赛 32 队均为分 8 组. 各组先进行单循环赛(每两队赛一场),胜者积 3 分,负者积 0 分,平局各积 1 分. 每组中积分领先的两队出线,共 16 队分 8 组进入下阶段淘汰赛;获胜 8 强进行四分之一决赛;获胜 4 强进行半决赛;获胜两队决赛,确定冠亚军,这样赛制下,在理论上,夺冠的球队至少累计进球_______个.

20. 矩形地皮 $ABCDE$ 缺一角,尺寸如图所示,用此块地建一座地基为矩形的建筑物,并使地基的一边在 $AB$ 上,则地基的最大面积为_______$m^2$.




第 20 题图

三、解答题(每小题 6 分,共 30 分 要求:写出推算过程)

21. 关于 $x$ 的方程 $2\cos^2x-\sin x+a=0$ 在区间 $[0,\frac{7\pi}{6}]$上恰有两个不等实根,求实数 $a$ 的取值范围.

22. 已知数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$b_n=a_n\cdot a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,且 $\{b_n\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列,$a_1=768$,$b_6=1344$,求:当数列 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项的积最大时的 $n$ 的值.

23. 已知函数 $f(x)=x^2-ax-a$.

(1)若存在实数 $x$,使 $f(x)<0$,求实数 $a$ 的取值范围.

(2)设 $g(x)=|f(x)|$,且 $g(x)$ 在区间$[0,1]$上递增,求实数 $a$ 的取值范围.

## 2003 年第 14 届“希望杯”全国数学邀请赛高二试题

### 第 1 试

一、选择题(每小题 6 分,共 60 分 以下每题的四个选项中,仅有一个是正确的,请将表示正确答案的英文字母填在题后的括号内)

1. 已知函数 $f(x)=2x+3$,则函数 $f^{-1}(x+1)$ 的反函数是 ( )

A. $y=\frac{x-5}{2}$　　B. $y=\frac{x+5}{2}$

C. $y=2x-3$　　D. $y=2x+2$

2. 设 $0<x<1$，$a=\cos(\arcsin x)$，$b=\arcsin(\cos x)$，则 $a$ 和 $b$ 的大小关系是（　　）

A. $a<b$　　B. $a>b$

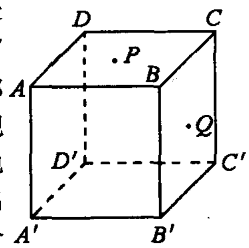
C. $a\leqslant b$　　D. 不确定

3. 已知 $x>1$，$y>1$，且 $\frac{1}{2}\ln x$，$\frac{1}{2}\ln y$ 成等比数列，则 $xy$ 的（　　）

A. 最大值是$\sqrt{2}$　　B. 最大值是 $e^{\sqrt{2}}$

C. 最小值是$\sqrt{2}$　　D. 最小值是 $e^{\sqrt{2}}$

4. 如图，一个正方体的容器 $ABCD-A'B'C'D'$ 中盛满了油后，在相邻两侧面的中心处出现了两个小孔. 若恰当地将容器放置，可使流出的油量达到最小，这个最小值是正方体容器容量的（　　）




第 4 题图

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{3}{8}$

5. 函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+10}$ 的最小值是（　　）

A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{6}$

C. $\sqrt{17}$　　D. $\sqrt{26}$

6. A hyperbola with vertices $(-2,5)$ and $(-2,-1)$, has an asymptote that passes through the point $(2,5)$. Then an equation of the hyperbola is（　　）

A. $\frac{(y-2)^2}{25}-\frac{(x+2)^2}{4}=1$

B. $\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$

C. $\frac{(y+2)^2}{25}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$

D. $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{16}=1$

(hyperbola 双曲线；vertices 顶点；asymptote 渐近线)

7. 等差数列 $\{a_n\}$ 中有两项 $a_m$ 和 $a_k$，满足 $a_m=\frac{1}{k}$，$a_k=\frac{1}{m}$，则该数列前 $mk$ 项之和是（　　）

A. $\frac{mk}{2}-1$　　B. $\frac{mk}{2}$

C. $\frac{mk+1}{2}$　　D. $\frac{mk}{2}+1$

8. 当 $x,y$ 满足条件 $|x-1|+|y+1|<1$ 时，变量 $u=\frac{x-1}{y-2}$ 的取值范围是（　　）

A. $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　B. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

C. $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$　　D. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

9. 设 $P$ 为椭圆上一点，且 $\angle PF_1F_2=30°$，$\angle PF_2F_1=45°$，其中 $F_1,F_2$ 为椭圆的两个焦点，则椭圆的离心率 $e$ 的值等于（　　）

A. $\frac{(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{2}$

B. $\frac{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{2}$

C. $\frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2}$

D. $\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2}$

10. Suppose the least distance from points of the curve $y^2+2xy+x+a=0(a\in\mathbf{R})$ to the yaxis is $\frac{1}{4}$, then the value of a is（　　）

A. $-\frac{3}{16}$　　B. $\frac{5}{16}$

C. $-\frac{5}{16}$ *or* $\frac{3}{16}$　　D. $-\frac{3}{16}$ *or* $\frac{5}{16}$

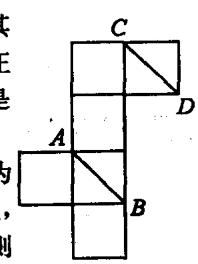
(*curve* 曲线)

## 二、A 组填空题（每小题 6 分，共 60 分）

11. $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)-\arctan 7=$________.

12. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}+1)-\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}-1)<-\frac{1}{2}$ 的解集是________.

13. 图是正方体的展开图，其中直线 $AB$ 与 $CD$ 在原正方体中所成角的大小是________.




第 13 题图

14. 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，$E$ 在 $BC$ 上，$F$ 在 $AD$ 上，$BE=2EC$，$DF=2FA$，则 $EF$ 的长度是____.

15. Let $a$ and $\sqrt{2}a$ be the length of two sides of a rectangle, rotate the rectangle about its diagonal, then the volume of the revolution obtained is epual to ________. (rectangle 矩形；rotate 旋转；

diagonal 对角线；volume 体积；revolution 旋转体）

16. 方程 $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$ 表示的曲线是________.

17. 曲线 $x^2+y^2-2x+y+m=0$ 和它关于直线 $x+2y-1=0$ 的对称曲线总有交点，那么 $m$ 的取值范围是________.

18. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=a$，公比为 $q$，则 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=$________.

19. 在平面凸四边形 $ABCD$ 内，点 $E$ 和 $F$ 分别在 $AD$ 和 $BC$ 上，且 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{FB}$（$\lambda\in\mathbf{R}$，$\lambda\neq-1$），用 $\lambda$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AB}$，表示 $\overrightarrow{EF}=$________.

20. 延长平行四边形 $ABCD$ 的边 $BC$ 到 $G$，$AG$ 依次交 $DB$、$DC$ 于 $E$、$F$，$AE$ 比 $EF$ 大 2，$GF=5$，则 $EF=$________.

三、B 组填空题（每小题 6 分，共 30 分）

21. Given $BC=1$, $\angle A=\alpha$ in a triangle ABC, then the range of length of the side AB is ____. (triangle: 三角形)

22. 方程 $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ 的实数解最多有________个，若方程有实数解，则 $a$ 的取值范围是________.

23. 圆 $x^2+y^2=1$ 和 $4x^2+4y^2-16x-8y+11=0$ 的公切线的斜率是________.

24. 数列 $\{2^n\}$ 和 $\{3_n+2\}$ 的公共项由小到大排列成数列 $\{c_n\}$，则 $\{c_n\}$ 的通项公式 $c_n=$________，前 $n$ 项和 $S_n=$________.

25. 函数 $y=\sin x+\cos x+\frac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$ 的最大值等于________，最小值等于________.

## 第 2 试

**一、选择题**（每小题 6 分，共 60 分　以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将表示正确答案的英文字母填在每题后面）

1. 方程 $\sin\pi x=0.25x$ 的解的个数是（　　）

A. 3　　B. 6　　C. 7　　D. 8

2. 当 $0<x<1$ 时，记 $a=x^x$，$b=(\arcsin x)^x$，$c=x^{\arcsin x}$，下列不等式中成立的是（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

3. If $2|a|<4+b$, $|b|<4$, then the set of real roots of the equation $x^2+ax+b=0$ is（　　）

A. $(-2,2)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(-3,2)$　　D. $(-3,3)$

4. 正实数 $x,y$ 使 $4x^2+y^2-4xy-4x+4y-4\leqslant 0$ 成立，则（　　）

A. $2x-y$ 的最小值为 $1-\sqrt{5}$

B. $2x-y$ 的最大值为 $1+\sqrt{5}$

C. $x-y$ 的最小值为 $-1$

D. $x-y$ 的最大值为 1

5. 已知实数 $x,y,z$ 满足条件 $\arccos x+\arccos y+\arccos z=\pi$，那么一定成立的等式是（　　）

A. $x^2+y^2+z^2-xyz=1$

B. $x^2+y^2+z^2+xyz=1$

C. $x^2+y^2+z^2-2xyz=1$

D. $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

6. 一平面与正方体表面的交线围成的封闭图形称为正方体的"截面图形". 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$E$ 为 $AB$ 中点，$F$ 为 $CC_1$ 中点，过 $D_1$、$E$、$F$ 三点的截面图形的周长等于（　　）

A. $\frac{1}{12}(25+2\sqrt{13}+9\sqrt{5})$

B. $\frac{1}{12}(15+4\sqrt{13}+9\sqrt{5})$

C. $\frac{1}{12}(25+2\sqrt{13}+6\sqrt{5})$

D. $\frac{1}{12}(15+4\sqrt{13}+6\sqrt{5})$

7. 数列 $\{a_n\}$ 定义为：$a_1=\cos\theta$，$a_n+a_{n+1}=n\sin\theta+\cos\theta$，$n\geqslant 1$，则 $S_{2n+1}$ 等于（　　）

A. $n\cos\theta+n(n+1)\sin\theta$

B. $(n+1)\cos\theta+n(n+1)\sin\theta$

C. $(n+1)\cos\theta+(n^2+n-1)\sin\theta$

D. $n\cos\theta+(n^2+n-1)\sin\theta$

8. 已知直线 $l: y=-\frac{x}{2}+m$ 与曲线 $C: y=1+\frac{1}{2}\sqrt{|4-x^2|}$ 仅有一个交点，则 $m$ 的取值范围是（　　）

A. $(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$　　B. $(1,\sqrt{2})$　　C. $(1,1+\sqrt{2})$　　D. $(2,1+\sqrt{2})$

9. 若 $2x+y\geq 1$，$u=y^2-2y+x^2+6x$，则 $u$ 的最小值等于 （　　）

A. $-\frac{7}{5}$　　B. $-\frac{14}{5}$

C. $\frac{7}{5}$　　D. $\frac{14}{5}$

10. 若 $A$、$B$、$C$ 是平面内任意三点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ （　　）

A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2)$

B. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2)-\overrightarrow{BC}^2$

C. $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2$

D. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2)$

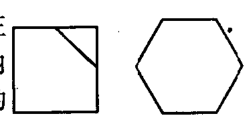
## 二、填空题（每小题 6 分，共 60 分）

11. 锐角 $\alpha,\beta,\gamma$ 成等差数列，公差为 $\frac{\pi}{12}$，它们的正切成等比数列，则 $\alpha=$________，$\beta=$________，$\gamma=$________.

12. 不等式 $|e^x-e^{-x}|<\sqrt{e}$（$e$ 是自然对数的底）的解集是________.

13. $CaF_2$（萤石）是正八面体的晶体，其相邻两侧面所成的二面角的平面角等于________.

14. 三个 12cm×12cm 的正方形的纸都被连接两邻边中点的直线分成两片，把这 6 片粘在一个正六边形的外面，然后折成一个多面体，则这个多面体的体积等于________ $cm^3$.



第 14 题图

15. 设有棱长等于 $a$ 的正四面体 $A_1$，作它的内切球 $R_1$，再作 $R_1$ 的内接正四面体 $A_2$，接着再作 $A_2$ 的内切球 $R_2$ 和 $R_2$ 的内接正四面体 $A_3$，如此继续下去，……，得到无限多个正四面体，它们的体积之和等于________.

16. 函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{2+3x-x^2}$ 的最大值是________，最小值是________.

17. 与圆 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ 切于点 $A(3,6)$ 且过点 $B(5,6)$ 的圆的方程是________.

18. Let point $M$ move along the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$, and point $F$ be its right focus, then for fixed point $p(6,2)$, then maximum of $3|MF|-|MP|$ is ________, where the coordinate of $M$ is ________.
（ellipse 椭圆；focus 焦点；coordinate 坐标）

19. 设 $x,y,z$ 都是正数，且 $x+y+z=1$，则使 $x^2+y^2+z^2+\lambda\sqrt{xyz}\leq 1$ 恒成立的实数 $\lambda$ 的最大值是________.

20. 某水池装有编号为 1,2,3,…,8 的 8 个进出口水管，有的只进水，有的只出水，已知所开的水管编号与灌满水池的时间如下表：

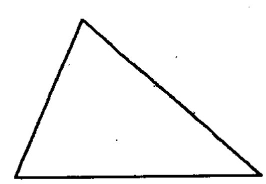
| 水管编号 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 4,5 | 5,6 | 6,7 | 7,8 | 8,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 时间(小时) | 3 | 4 | 36 | 8 | 12 | 24 | 18 | 12 |

若 8 个水管一齐开，灌满水池需________小时.

## 三、解答题（每小题 6 分，共 30 分　要求：写出推算过程）

21. 已知：$x,y,z\in\mathbf{R}$，且 $x=\frac{a+b}{a-b}$，$y=\frac{c+d}{c-d}$，$z=\frac{ac-bd}{ad+bc}$. 求证：$x+y+z=xyz$.

22. 给定一个三角形纸片（如图），你能否用它为原料剪拼成一个正三棱柱（正三棱柱的全面积等于原三角形面积）？说明你的方法. 这里“剪拼”的意思是：依直线裁剪，边对边拼接.



第 22 题图

23. 设函数 $f(x)=\sqrt[3]{1+x}-\lambda x$，其中 $\lambda>0$.

(1)求 $\lambda$ 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数；

(2)此种单调性能否扩展到整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上？

(3)求解不等式 $2x-\sqrt[3]{1+x}<12$.