高等院校计算机专业教材

离散数学

邵学才　叶秀明　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校计算机专业教材

离 散 数 学

第 3 版

邵学才 叶秀明 编著

机 械 工 业 出 版 社

离散数学是高等院校理工科计算机专业必修的专业基础课程，主要内容由集合论、代数结构、图论和数理逻辑四部分构成。本书在叙述上深入浅出，简明扼要，并以众多的实例解释概念，使抽象理论转化为直观的认识，易教易学，是一本适用性较强的教材。

本教材适合于高等院校计算机专业本科生使用，也适合于函授大学、职工大学、成人教育的计算机专业本科生使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等院校计算机专业教材：离散数学 / 邵学才　叶秀明编著. -3版.—北京：机械工业出版社，2000. 1
ISBN 7-111-04992-6

Ⅰ. 计… Ⅱ. ①李…②邵…③叶…　Ⅲ. ①电子计算机-技术等级标准-考核-教材②离散数学-技术等级标准-考核-教材　Ⅳ. ①TP3②O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 00275 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：何文军　版式设计：张世琴　责任校对：刘志文
封面设计：姚　毅　责任印制：石　冉
三河市宏达印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2004 年 8 月第 3 版第 1 次印刷
787mm×1092mm　1/16 · 14.5 印张 · 353 千字
25501—28500 册
定价：24.00 元

前　言

离散数学是理工科高等院校计算机专业必修的、重要的专业基础课，其研究目标是离散量的结构与相互间的关系，充分体现了计算机科学的离散性特点，离散数学中的综合、分析、归纳、演绎、递推等方法在计算机科学理论的研究与实用技术的开发中都有着广泛的应用。

离散数学的主要内容由集合论、代数结构、图论、数理逻辑等四部分组成。离散数学不仅为后续课程，如数据结构、操作系统、数据库原理、人工智能等课程作必要的理论准备，而且其课程内容中所提供的一些把科学理论应用于实践的范例，可以培养学生逐步增强如何实施“科学理论——技术——生产力”转化的观念和方法，提高学生在知识经济时代中的适应能力，可以这样说，离散数学在培养和提高学生的创新思维、创新能力和综合素质方面有其独特的作用。

本书作者充分考虑到离散数学所特有的“内容涉及广泛，抽象理论多”的特点，对于书中抽象内容的叙述都作了精心安排，运用大量的说明性例子，有层次地剖析抽象理论的内涵，使抽象的理论转化为直观的叙述，深入浅出，易教易学，使本书成为具有较强适用性的教材。

本书不仅可以作为理工科高等院校计算机专业本科生的教材，也适合于各类函授大学、职工业余大学、成人教育中计算机专业本科生的教学用书。

本书由上海大学叶秀明教授和北京工业大学邵学才教授编写。北京工业大学沈彤英副教授、邓光克副教授和蒋强荣副教授详细地审阅了书稿的全部内容并提出了有益的建议，使本书增色不少。在编写过程中得到亲友张锡恩、张绍昆和张静的悉心帮助，在此作者表示诚挚的谢意。

最后，作者对于在本书编辑过程中付出辛勤劳动并提出不少建议的机械工业出版社何文军先生和桂林先生表示深切的谢意。

编　者

目　录

第1章 集　合

集合论是现代数学的基础，集合论几乎与现代数学的各个分支都有密切联系，并且也渗透到各个科技领域。集合论的内容是极其丰富的，本章主要介绍朴素集合论的基本内容，包括：什么是集合以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等概念；集合的基本运算和集合代数的有关公式，在组合计数中有着广泛应用的包含排斥原理等。

1.1 集合的基本概念

集合就是具有某种特点的对象的聚合，其中每一个对象称为这个集合的元素。例如，北京工业大学学生的全体可以构成一个集合，而北京工业大学的每一个学生就是这个集合中的一个元素。又如正整数的全体可以构成一个集合，而每一个正整数就是这个集合中的元素。通常用大写的英文字母：$A,B,C,\cdots$等来代表集合，用小写的英文字母：$a,b,c,\cdots$等来代表集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的元素，称 a 属于 A，并记作

$a\in A$

如果 a 不是集合 A 中的元素，称 a 不属于 A，并记作

$a\notin A$

1.1.1 集合的表示方法

集合有多种表示方法，这里介绍常用的两种方法。

(一) 列举法

这种表示方法是把集合中的所有元素一一列举出来，元素间用逗号分开，并用花括号把它们括起来。如集合 A 含有5个元素，它们分别是2,4,6,8,10。用列举法可把集合 A 表示成

$$A=\{2,4,6,8,10\}$$

又如

$$B=\{a,e,i,o,u\}$$

这就表明集合 B 有5个元素，它们分别是 a,e,i,o,u。

易见，$4\in A$，$a\in B$，但 $5\notin A$，$b\notin B$。

(二) 特征法

集合的另一种表示方法是特征法，它是以某个小写的英文字母来统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如

$$C=\{x\mid x\text{是不大于10的偶数},x>0\}$$

花括号内的符号"|"读作"系指"，花括号内的逗号读作"并且"。因此集合 C 中的元素是一些不大于10的偶数，并且大于0。或者简单地说，C 是由不大于10的正偶数组成。实际上，集合 C 的元素就是：2,4,6,8,10。可见集合 C 和列举法中所提到的集合 A 的元素是完全相同的。又如

$$D=\{x\mid x\text{是英文字母},x\text{是元音}\}$$

易见，D 中元素就是：a,e,i,o,u。它和列举法中所提到的集合 B 的元素是完全相同的。

当两个集合 X 和 Y 有相同的元素时，称这两个集合相等，记作 $X=Y$。容易看到，上面提到的集合 A,B,C,D 中，有 $A=C$ 和 $B=D$。

一般地讲，用列举法来表示集合时，往往显得冗长而繁复，但当我们对集合的某些特征作抽象的讨论时，列举法能使问题显得直观和容易理解。

1.1.2　子集

如果集合 A 中每一个元素又都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，也可以说 A 含在 B 中，或 B 含有 A，这种关系写作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

如果 A 不是 B 的子集，也就是说在 A 中至少有一个元素不属于 B，则称 B 不包含 A，记作

$$B\not\supseteq A \text{ 或 } A\not\subseteq B$$

例如，在集合 $A=\{1,3,4,5\}$ 和集合 $B=\{1,2,5\}$，集合 $C=\{1,5\}$ 中，C 是 A 的子集，即 $A\supseteq C$；C 又是 B 的子集，即 $B\supseteq C$，但 B 不是 A 的子集，因为元素 $2\in B$ 而 $2\notin A$，所以 $A\not\supseteq B$；同理 A 也不是 B 的子集，因为元素 $3\in A$ 而 $3\notin B$，所以 $B\not\supseteq A$。

由集合间的包含关系，容易得到：

定理 1.1.1　集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是，$A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。

这一结论在证明两个集合相等时，往往是一种有效而简便的方法。

如果 A 是 B 的子集，但 A 和 B 不相等，也就是说在 B 中总有一些元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $B\supset A$，如集合 $A=\{1,2,\}$，$B=\{1,2,3\}$，那么 A 是 B 的真子集。

不含有任何元素的集合称为空集，记作 ϕ。

由空集的定义可知，空集是一切集合的子集。

在实际工作中，我们所研究的对象总是限制在一定的范围内，比如我们要研究北京市大学生的学习情况时，研究对象可以是清华大学的学生，也可以是北京工业大学的学生，但研究的对象总是限制在北京市大学生这个范围内。在这种情况下，我们称“北京市大学生的全体”组成的集合为全集。又如在初等数论中，研究的对象是整数，在这种情况下，全体整数组成的集合是全集，全集通常用 U 表示。

请注意，全集的概念和研究对象所处的范围密切相关的，不同的情况就有不同的全集，例如，当我们研究人口问题时，全世界所有的人就构成了全集；当我们研究中国妇女的生活状况时，全中国所有妇女就构成了全集；甚至当研究的对象仅限制在一个较小的范围时，如仅研究北京工业大学计算机科学系学生的学习情况时，北京工业大学计算机科学系的全体学生就是全集。总之，全集是和研究对象密切相关的。一般地讲，当我们的讨论总是限制在某个集合的子集时，这个集合就是全集。

与全集有密切关系的集合是补集。

设 A 是集合，且 $A\subseteq U$，由属于全集 U 但不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 的补集，记作 $\bar{A}$或 $\sim A$。例如

$$U=\{x\,|\,x \text{ 是上海大学的学生}\}$$
$$A=\{x\,|\,x \text{ 是上海大学的女学生}\}$$

则 A 的补集

$$\bar{A}=\{x\,|\,x \text{ 是上海大学的男学生}\}$$

又如

$$U = \{x \mid x \text{ 是实数}\}$$
$$A = \{x \mid x \text{ 是有理数}\}$$

则 A 的补集

$$\bar{A} = \{x \mid x \text{ 是无理数}\}$$

1.1.3 幂集

集合中的元素是可以多种多样的，因此一个集合作为另一个集合的元素是完全可以的，例如集合 $A=\{a,b,\{c,d\}\}$，这表明集合 A 含有 3 个元素：$a,b,\{c,d\}$，这里集合$\{c,d\}$就成为集合 A 的一个元素了。

一般地讲，从属关系"$\in$"是元素和集合之间的关系；包含"$\supseteq$"则是集合和集合之间的关系，但也存在着这样的情况：集合 A 含在集合 B 中，集合 A 又属于集合 B，如

$$A = \{a,b\}$$
$$B = \{a,b,\{a,b\}\}$$

这里就有 A 既是 B 的子集，又是 B 的元素，即有 $A \subset B$ 和 $A \in B$ 同时成立。

下面介绍有着广泛用途的集合——幂集。

定义 1.1.1 设 A 是集合，由 A 的所有子集作为元素而构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$。

例如集合 $A=\{a,b,c\}$，A 的子集有$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}\{a,c\}\{b,c\}$等，另外由于空集 ϕ 是一切集合的子集，所以 ϕ 也是 A 的子集，而 A 的本身也是 A 的子集，由此可得 A 的幂集

$$P(A) = \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

又如

$$A = \{1,2,3,4\}$$

则 A 的幂集

$$P(A) = \{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},$$
$$\{2,3\},\{2,4\}\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\{1,2,3,4\}\}$$

当一个集合中的元素个数为有限时，该集合称为有限集；集合中的元素的个数为无限时，该集合称为无限集。有限集 A 中元素的个数称为集合 A 的基，记作$|A|$，如 $A=\{a,b,c\}$，则 $|A|=3$。

现在讨论有限集 A 的基与其幂集 $P(A)$的基的关系，由上面提到的两个幂集的实例可以看到，当 $A=\{a,b,c\}$时，即$|A|=3$ 时，其幂集的基$|P(A)|=8=2^3$；当 $A=\{1,2,3,4\}$时，即 $|A|=4$ 时，其幂集的基$|P(A)|=16=2^4$。在一般情况下有：

定理 1.1.2 A 是有限集，$|A|=n$，则 A 的幂集 $P(A)$的基为 2^n。

证明 由排列组合的知识可知：

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

又由二项式定理可知：

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + \cdots + C_n^{n-1} a \cdot b^{n-1} + C_n^n b^n$$

特别取 $a=b=1$，则有

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

由此可得

$$|P(A)| = 2^n$$

习　　题

1. 用列举法表示下列集合。

(1) 小于 20 的素数集合

(2) $\{x|x$ 是正整数，$x^2<50\}$

(3) $\{x|x^2-5x+6=0\}$

(4) $\{x|x$ 是正整数，$x+1=3\}$

2. 用特征法表示下列集合。

(1) $\{1,3,5,7,\cdots,99\}$

(2) $\{5,10,15,\cdots,100\}$

(3) $\{1,4,9,16,25\}$

3. 设 A、B、C 是集合，确定下列命题是否正确，说明理由。

(1) 如果 $A\in B$ 与 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

(2) 如果 $A\in B$ 与 $B\subseteq C$，则 $A\in C$。

(3) 如果 $A\subseteq B$ 与 $B\in C$，则 $A\in C$。

(4) 如果 $A\subseteq B$ 与 $B\in C$，则 $A\subseteq C$。

4. 确定下列命题是否正确？

(1) $\phi\subseteq\phi$

(2) $\phi\in\phi$

(3) $\phi\subseteq\{\phi\}$

(4) $\phi\in\{\phi\}$

5. 设 A,B,C 是集合

(1) 如果 $A\notin B$ 且 $B\notin C$，是否一定有 $A\notin C$？

(2) 如果 $A\in B$ 且 $B\notin C$，是否一定有 $A\notin C$？

(3) 如果 $A\subset B$ 且 $B\notin C$，是否一定有 $A\notin C$？

6. 求下列集合的幂集

(1) $\{a,b,c,d\}$

(2) $\{a,b,\{a,b\}\}$

(3) ϕ

(4) $\{\phi\}$

(5) $\{\phi\{\phi\}\}$

1.2 集合的运算

本节介绍 4 种常用的集合运算及有关公式。

(一) 集合的并运算

定义 1.2.1　两个集合 A,B 的并记作 $A\cup B$，它也是一个集合，由所有属于 A 或者 B 的元素合并在一起而构成的，即

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例如

$$A = \{a,b,c\}$$

$$B = \{b, c, d, e\}$$

则

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

又如

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7\}$$

则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

集合的运算可以用文氏图形象地表示，在图 1-2-1 中，矩形表示全集 U，两个圆分别表示集合 A 和 B，阴影部分就是 $A \cup B$。

由集合并运算的定义可知，并运算具有以下性质：

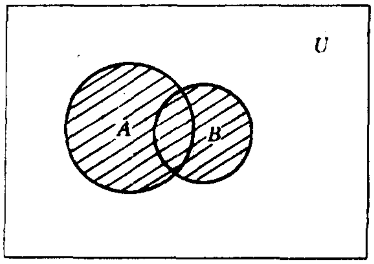

图 1-2-1

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup \phi = A$
5. $A \cup U = U$

（二）集合的交运算

定义 1.2.2　两个集合 A 和 B 的交记作 $A \cap B$，它也是一个集合，由属于 A，B 两集合的所有共同元素构成，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例如

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{a, b, d, f\}$$

则

$$A \cap B = \{a, b\}$$

又如

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7\}$$

则

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

如果集合 $A \cap B = \phi$，也就是说 A 和 B 没有共同元素，则称 A、B 不相交。例如

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{4, 5, 6\}$$

则 $A \cap B = \phi$，即 A、B 不相交。

集合的交运算的文氏图表示见图 1-2-2，图中阴影部分就是 $A \cap B$。

由集合交运算的定义可知，交运算具有以下性质：

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cap A = A$

4. $A\cap\phi=\phi$

5. $A\cap U=A$

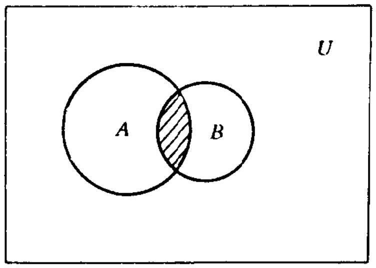

图 1-2-2

定理 1.2.1 设 A、B、C 为 3 个集合，则下列分配律成立。

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明 只证第一等式，第二等式的证明是类似的。证明的方法是这样的，先证

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

再证

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

从而证得

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

为了证明 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$，也即要证明 $A\cap(B\cup C)$是$(A\cap B)\cup(A\cap C)$的子集，所以只需证明：对于任意的 $x\in A\cap(B\cup C)$，都有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

对于任意的 $x\in A\cap(B\cup C)$，即有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，也即 $x\in A$ 且 $x\in B$，或者 $x\in A$ 且 $x\in C$，这就表明 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$，所以有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，由此可得 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

再证 $A\cap(B\cup C)\supseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

对于任意的 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$；即 $x\in A$ 且 $x\in B$，或者 $x\in A$ 且 $x\in C$；也即 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$；所以有：$x\in A\cap(B\cup C)$，从而得到 $A\cap(B\cup C)\supseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

综合上述结果就证得 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

由集合的并与交运算的定义可知，当 $A\supseteq B$ 时，$A\cup B=A$，$A\cap B=B$；显然 $A\cup B\supseteq A$，$A\cap B\subseteq A$，所以有下列定理：

定理 1.2.2 设 A、B 为集合，则

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

定理 1.2.3 设 A、B 为集合，则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

这两个定理的证明与定理 1.2.1 的证明方法类似，请读者自己证明。

定理 1.2.2 称为吸收律，定理 1.2.3 称为摩根律，它们在集合的运算中有着广泛的用途。

（三）集合的减运算

定义 1.2.3 由属于集合 A 但不属于集合 B 的那些元素构成的集合称为 A 减 B 的差，记作 $A-B$。即

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

例如

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{a,b\}$$

则

$$A - B = \{c\}$$

又如

$$A = \{a,b,c,d\}$$
$$B = \{a,b,e,f\}$$

则

$$A - B = \{c,d\}$$

再如

$$A = \{a,b,c\}$$
$$B = \{e,f\}$$

则

$$A - B = \{a,b,c\}$$

集合的减运算的文氏图表示见图 1-2-3。

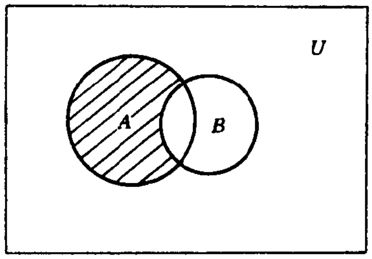

图 1-2-3

由减运算的定义可知，A 的补集就是全集减 A 的差，即

$$\overline{A}=U-A$$

集合的减运算有以下性质：

1. $A-A=\phi$
2. $A-\phi=A$
3. $A-U=\phi$
4. $A-B=A\cap\overline{B}$

性质 1,2,3 是显然成立的，性质 4 也可由减运算的定义直接得证。

定理 1.2.4 设 A、B、C 为集合，则

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

证明 利用性质 4，右式

$$\begin{aligned}(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\ &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\ &= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \\ &= \phi \cup (A \cap (B - C)) \\ &= A \cap (B - C)\end{aligned}$$

(四) 集合的对称差

定义 1.2.4 集合 A 和 B 的对称差记作 $A\oplus B$，它是个集合，其元素或属于 A，或属于 B，但不能既属于 A 又属于 B。即

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

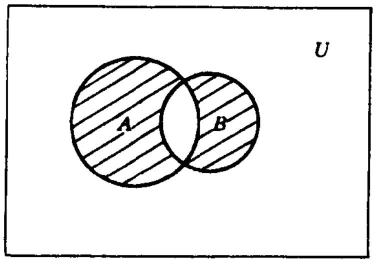

图 1-2-4

例如

$$A = \{a,b,c,d\}$$
$$B = \{a,c,e,f,g\}$$

则

$$A \oplus B = \{b, d, e, f, g\}$$

集合对称差的文氏图表示见图 1-2-4。

由对称差的定义易得下列性质：

1. $A \oplus A = \phi$
2. $A \oplus \phi = A$
3. $A \oplus U = \overline{A}$
4. $A \oplus B = B \oplus A$
5. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
6. $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

习　　题

1. 设 I_+ 是所有正整数组成的集合，A、B、C 是 I_+ 的子集，且

$A = \{i \mid i^2 < 50\}$

$B = \{i \mid i$ 能整除 $30\}$

$C = \{1, 3, 5, 7\}$

求下列集合：

(1) $A \cup C$

(2) $A \cup (B \cap C)$

(3) $C - (A \cap B)$

(4) $(B \cap C) - (A \cup B)$

(5) $B \cap \overline{C}$

(6) $A \oplus C$

2. 给定正整数集合 I_+ 的子集：

$A = \{x \mid x < 12\}$

$B = \{x \mid x \leqslant 8\}$

$C = \{x \mid x = 2k, k \in I_+\}$

$D = \{x \mid x = 3k, k \in I_+\}$

试用 A、B、C、D 表示下列集合：

(1) $\{2, 4, 6, 8\}$

(2) $\{1, 3, 5, 7\}$

(3) $\{3, 6, 9\}$

(4) $\{10\}$

(5) $\{x \mid x$ 是大于 12 的奇数$\}$

3. 设 A、B 是任意集合，将 $A \cup B$ 表示为不相交集合的并。

4. 设集合 $A \neq \phi$，如果 $A \cup B = A \cup C$，且 $A \cap B = A \cap C$，证明 $B = C$

5. 设 A、B、C 是集合，求下列各式成立的充分必要条件。

(1) $(A - B) \cup (A - C) = A$

(2) $(A - B) \cup (A - C) = \phi$

(3) $(A - B) \cap (A - C) = \phi$

6. 如果 $A \oplus B = \phi$，证明 $A = B$。

7. 证明下列各等式：

(1) $A\cap(B-A)=\phi$

(2) $A\cup(B-A)=A\cup B$

(3) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

(4) $A\cup(\bar{A}\cap B)=A\cup B$

(5) $A\cap(\bar{A}\cup B)=A\cap B$

8. 如果 $A\oplus B=A\oplus C$，证明 $B=C$。

1.3 包含排斥原理

本节讨论有限集元素的计数问题。我们已经知道，有限集 A 中元素的个数称为 A 的基，记作 $|A|$。当有限集 A,B 不相交时，即 A 和 B 没有公共元素时，显然有 $|A\cup B|=|A|+|B|$，在一般情况下，有下列定理，该定理也称为包含排斥原理。

定理 1.3.1 设 A、B 是有限集，则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

证明 因为 $A\cup B=A\cup(B-A)$，这里有限集 A 和 $B-A$ 是不相交的，所以有

$$|A\cup B|=|A|+|B-A|$$

又由于有限集 $B=(B-A)\cup(A\cap B)$，且 $B-A$ 和 $A\cap B$ 是不相交的，所以有

$$|B|=|B-A|+|A\cap B|$$

或

$$|B-A|=|B|-|A\cap B|$$

由此可得

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

对于 3 个有限集的并的元素计数公式为

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|=&|A|+|B|+|C|-|A\cap B|\\&-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|&=|A\cup(B\cup C)|\\&=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-(|A\cap B|\\&\quad+|A\cap C|-|A\cap B\cap A\cap C|)\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|A\cap B|-|A\cap C|\\&\quad+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

同理，还可得到 4 个有限集并的元素计数公式：

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D|=&|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|\\&-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|\\&+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|\\&+|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

用归纳法可以得到一般情况下包含排斥原理的推论：

推论：设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 为有限集合，则

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| &- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&+ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

例 1-1 在 20 个大学生中，有 10 人戴眼镜，有 8 个人爱吃口香糖，有 6 人既戴眼镜又爱吃口香糖，问不戴眼镜又不爱吃口香糖的人数是多少？

解 设 A 是戴眼镜大学生的集合

B 是爱吃口香糖大学生的集合

由题意可知：$|A|=10$，$|B|=8$，$|A\cap B|=6$。由包含排斥原理可得：

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
&= 10 + 8 - 6 = 12
\end{aligned}
$$

而不戴眼镜又不爱吃口香糖的大学生数为 $20-|A\cup B|=8$。

例 1-2 对 100 名大学生进行调查的结果是：34 人爱好音乐，24 人爱好美术，48 人爱好体育；13 人既爱好音乐又爱好体育，14 人既爱好音乐又爱好美术，15 人既爱好美术又爱好体育；有 25 人这三种爱好都没有，问这三种爱好都有的大学生人数是多少？

解 设 A 是爱好音乐的大学生的集合

B 是爱好美术的大学生的集合

C 是爱好体育的大学生的集合

由题意可知：

$|A|=34$ $\quad|B|=24$ $\quad|C|=48$

$|A\cap B|=14$ $\quad|A\cap C|=13$ $\quad|B\cap C|=15$

$|A\cup B\cup C|=100-25=75$

由包含排斥原理可知：

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| \\
&\quad - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
75 &= 34 + 24 + 48 - 14 - 13 - 15 + |A \cap B \cap C| \\
\therefore |A \cap B \cap C| &= 11
\end{aligned}
$$

这三种爱好都有的大学生人数是 11。

例 1-3 某班有学生 60 人，其中有 38 人学习 PASCAL 语言，有 16 人学习 C 语言，有 21 人学习 COBOL 语言；有 3 个人这 3 种语言都学习，有 2 个人这 3 种语言都不学习，问仅学习两门语言的学生数是多少？

解 设 A 为学习 PASCAL 语言的学生的集合

B 为学习 C 语言的学生的集合

C 为学习 COBOL 语言的学生的集合

由题意可知：

$|A|=38$ $\quad|B|=16$ $\quad|C|=21$

$|A\cap B\cap C|=3$ $\quad|A\cup B\cup C|=60-2=58$

由包含排斥原理可知：

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$58 = 38 + 16 + 21 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 3$$

由此可得：

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = 20$$

请注意，仅学习两门语言的人数不是20，因为$A\cap B \supseteq A\cap B\cap C$，所以仅学习PASCAL语言和C语言的学生数应是$|A\cap B|-|A\cap B\cap C|=|A\cap B|-3$。同样理由，仅学习PASCAL语言和COBOL语言的学生数是$|A\cap C|-|A\cap B\cap C|=|A\cap C|-3$；仅学习C语言和COBOL语言的学生数是$|B\cap C|-|A\cap B\cap C|=|B\cap C|-3$。所以仅学习两门语言的学生人数应是：

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3|A \cap B \cap C| = 20 - 9 = 11$$

例 1-4 75个儿童到公园游乐场，他们在那里可以骑旋转木马、坐滑行铁道、乘宇宙飞船，已知其中有20人这三种东西都乘坐过，其中55人至少乘坐过其中的两种，若每样乘坐一次的费用是5元，公园游乐场总共收入700元。试确定有多少儿童没有乘坐过其中的任何一种。

解 设A是骑旋转木马儿童的集合

B是乘坐滑行铁道儿童的集合

C是乘坐宇宙飞船儿童的集合

由题意可知：

$$|A| + |B| + |C| = 700 \div 5 = 140$$

仅乘坐过其中两种的儿童数为$55-20=35$，由例1-3的分析可知，$35=|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-3|A\cap B\cap C|$，所以$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|=95$，而

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| \\ &\quad - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 140 - 95 + 20 = 65\end{aligned}$$

所以没有乘坐过任何一种玩具的儿童数为$75-65=10$人。

例 1-5 求1到250间能被2,3,5,7中任何一个整除的整数的个数。

解 设A表示1到250间能被2整除的整数集合，B表示1到250间能被3整除的整数集合，C表示1到250间能被5整除的整数集合，D表示1到250间能被7整除的整数集合。用$[x]$表示对x作取整运算，如$[4.7]=4$。

由题意可知：

$$|A| = \left[\frac{250}{2}\right] = 125$$

$$|B| = \left[\frac{250}{3}\right] = 83$$

$$|C| = \left[\frac{250}{5}\right] = 50$$

$$|D| = \left[\frac{250}{7}\right] = 35$$

$$|A\cap B| = \left[\frac{250}{2\times 3}\right] = 41$$

$$|A\cap C| = \left[\frac{250}{2\times 5}\right] = 25$$