



特别合作  
sina 新浪教育

北京方向思维基础教育教学研究中心成果

高一数学


# 教材知识详解


上

总主编 刘增利

[审订] 清华大学 王志

章节详解 + 课后解答 + 学科综合 + 思路导航

 北京方向思维

 北京教育出版社

# 总主编寄语

## 一网打尽

既给鱼又给渔

猫妈妈养了两只小猫，她给了一只小猫一条大鱼，却教给另一只小猫捕鱼的方法。几天之后，得到大鱼的小猫吃完了鱼，饿得喵喵直叫，学会捕鱼的小猫却得到了一条又一条的鱼。

数学是通向科学大门的钥匙。历史证明，国家的繁荣昌盛，关键在于高新科技的发达和经济管理的高效率。高新科技的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学。数学给与人们的不只是知识，更重要的是能力。掌握数学的概念、计算和解决问题的能力对一个真正有文化的人来说是至关重要的。因此中学数学教育在高素质人才的培养中就显得格外重要。为此，北京万向思维国际教育研究中心特聘请全国实验区的骨干教师和国内知名大学的专家学者共同精心打造了这套《中学数学教材知识详解》丛书。

首先本着打牢数学基础的目的，我们对教材中的数学知识进行了全面系统地剖析详解，并精选了大量例题分类进行了详细的分析解答。根据我国现行的考试模式和要求，在编写时注重学科内的综合和学科间的交叉渗透。为了适应学生学习兴趣广的特点，我们还特设了自主空间和探究性学习栏目，提供了数学专业词汇的英文、探究性问题和大量知识材料；我们也对“数学思想方法”专门进行了研究总结，置于附录中供学生参考。

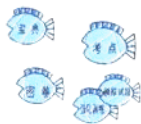
筑高楼光有砖还是不够的，所以在讲解知识的基础上，我们注重引导并激发学生学习的兴趣，提高学生发散、创新、应用等的思维能力，开阔视野，让数学的精华、思考方法和创造能力能深入灵魂。本书从策划到编写再到出版，倾注了大量专家、老师和编辑们的心血，为的就是给所有热爱学习的人提供一本权威并且质量一流的好书。

“天道酬勤”，再辅以明灯指路，相信我们的读者一定能拥有远大的前程、光辉的未来！

刘增利

2004年5月1日

于清华大学



# CONTENTS 目录

第一章 集合与简易逻辑	
A——章节准备	(1)
一、兴趣情景导引	(1)
二、本章内容分析	(1)
三、学习目标一览	(2)
四、学习方法点拨	(2)
B——章节详解	(2)
1.1 集合	(2)
Ⅰ 基础知识达标版	(2)
一、相关知识链接	(2)
二、教材知识详解	(3)
三、经典基础例题	(4)
四、思维误区点击	(5)
Ⅱ 发散创新应用版	(6)
一、综合题	(6)
二、应用题	(7)
三、创新题	(7)
Ⅲ 应试必备满分版	(9)
基础知识强化	(9)
1.2 子集、全集、补集	(12)
Ⅰ 基础知识达标版	(12)
一、相关知识链接	(12)
二、教材知识详解	(12)
三、经典基础例题	(14)
四、思维误区点击	(16)
Ⅱ 发散创新应用版	(17)
一、综合题	(17)
二、应用题	(18)
三、创新题	(18)
四、高考题	(20)
Ⅲ 应试必备满分版	(21)
A卷 基础知识强化	(21)
B卷 综合能力提升	(21)
1.3 交集、并集	(25)
Ⅰ 基础知识达标版	(25)
一、相关知识链接	(25)
二、教材知识详解	(25)
三、经典基础例题	(27)
四、思维误区点击	(28)
Ⅱ 发散创新应用版	(30)
一、综合题	(30)
二、应用题	(31)
三、创新题	(31)
四、高考题	(32)
Ⅲ 应试必备满分版	(33)
A卷 基础知识强化	(33)
B卷 综合能力提升	(34)
1.4 含绝对值的不等式解法	(38)
Ⅰ 基础知识达标版	(38)
一、相关知识链接	(38)
二、教材知识详解	(38)
三、经典基础例题	(39)
四、思维误区点击	(41)
Ⅱ 发散创新应用版	(42)
一、综合题	(42)
二、创新题	(43)
三、高考题	(43)
Ⅲ 应试必备满分版	(45)
基础知识强化	(45)
1.5 一元二次不等式解法	(47)
Ⅰ 基础知识达标版	(47)
一、相关知识链接	(47)
二、教材知识详解	(48)
三、经典基础例题	(49)
四、思维误区点击	(51)
Ⅱ 发散创新应用版	(53)
一、综合题	(53)
二、应用题	(53)
三、创新题	(54)
四、高考题	(54)
Ⅲ 应试必备满分版	(55)
A卷 基础知识强化	(55)
B卷 综合能力提升	(56)
1.6 逻辑联结词	(62)
Ⅰ 基础知识达标版	(62)
一、相关知识链接	(62)
二、教材知识详解	(62)
三、经典基础例题	(65)
四、思维误区点击	(68)
Ⅱ 发散创新应用版	(69)
一、综合题	(69)
二、应用题	(70)
三、创新题	(70)
Ⅲ 应试必备满分版	(71)
基础知识强化	(71)
1.7 四种命题	(74)
Ⅰ 基础知识达标版	(74)
一、相关知识链接	(74)

# CONTENTS 目录

二、教材知识详解	(74)	II 发散创新应用版	(135)
三、经典基础例题	(76)	一、综合题	(133)
四、思维误区点击	(80)	二、应用题	(136)
II 发散创新应用版	(82)	三、创新题	(137)
一、综合题	(82)	四、高考题	(139)
二、应用题	(84)	III 应试必备满分版	(142)
三、创新题	(85)	基础知识强化	(142)
III 应试必备满分版	(86)	2.2 函数的表示法	(146)
基础知识强化	(86)	I 基础知识达标版	(146)
1.8 充分条件与必要条件	(89)	一、相关知识链接	(146)
I 基础知识达标版	(89)	二、教材知识详解	(147)
一、相关知识链接	(89)	三、经典基础例题	(148)
二、教材知识详解	(90)	四、思维误区点击	(155)
三、经典基础例题	(91)	II 发散创新应用版	(156)
四、思维误区点击	(93)	一、综合题	(156)
II 发散创新应用版	(95)	二、应用题	(159)
一、综合题	(95)	三、创新题	(162)
二、应用题	(97)	四、高考题	(164)
三、创新题	(98)	III 应试必备满分版	(168)
四、高考题	(99)	基础知识强化	(168)
III 应试必备满分版	(101)	2.3 函数的单调性	(172)
基础知识强化	(101)	I 基础知识达标版	(172)
C——本章总结	(105)	一、相关知识链接	(172)
一、本章知识网络	(105)	二、教材知识详解	(173)
二、本章专题进阶	(105)	三、经典基础例题	(175)
三、综合解题指导	(110)	四、思维误区点击	(184)
四、探究学习课题	(115)	II 发散创新应用版	(184)
五、自主学习空间	(115)	一、综合题	(184)
D——本章验收	(117)	二、应用题	(186)
I 本章检测题	(117)	三、创新题	(187)
II 本章自我评价	(120)	四、高考题	(190)
第二章 函数		III 应试必备满分版	(193)
A——章节准备	(121)	基础知识强化	(193)
一、兴趣情景导引	(121)	2.4 反函数	(198)
二、本章内容分析	(121)	I 基础知识达标版	(198)
三、学习目标一览	(121)	一、相关知识链接	(198)
四、学习方法点拨	(122)	二、教材知识详解	(198)
B——章节详解	(122)	三、经典基础例题	(200)
2.1 函数	(122)	四、思维误区点击	(203)
I 基础知识达标版	(122)	II 发散创新应用版	(205)
一、相关知识链接	(122)	一、综合题	(205)
二、教材知识详解	(124)	二、应用题	(206)
三、经典基础例题	(127)	三、创新题	(208)
四、思维误区点击	(132)	四、高考题	(209)

# CONTENTS 目录

III 应试必备满分版	(213)	一、相关知识链接	(265)
基础知识强化	(213)	二、教材知识详解	(265)
2.5 指数	(219)	三、经典基础例题	(268)
I 基础知识达标版	(219)	四、思维误区点击	(271)
一、相关知识链接	(219)	II 发散创新应用版	(272)
二、教材知识详解	(219)	一、综合题	(272)
三、经典基础例题	(221)	二、应用题	(274)
四、思维误区点击	(223)	三、创新题	(274)
II 发散创新应用版	(224)	四、高考题	(277)
一、综合题	(224)	III 应试必备满分版	(278)
二、应用题	(226)	A 卷 基础知识强化	(278)
三、创新题	(227)	B 卷 综合能力提升	(278)
III 应试必备满分版	(228)	2.9 函数的应用举例	(285)
基础知识强化	(228)	I 基础知识达标版	(285)
2.6 指数函数	(232)	一、相关知识链接	(285)
I 基础知识达标版	(232)	二、教材知识详解	(285)
一、相关知识链接	(232)	三、经典基础例题	(286)
二、教材知识详解	(232)	四、思维误区点击	(289)
三、经典基础例题	(236)	II 发散创新应用版	(291)
四、思维误区点击	(237)	一、综合题	(291)
II 发散创新应用版	(239)	二、创新题	(293)
一、综合题	(239)	三、高考题	(294)
二、应用题	(241)	III 应试必备满分版	(297)
三、创新题	(242)	A 卷 基础知识强化	(297)
四、高考题	(243)	B 卷 综合能力提升	(298)
III 应试必备满分版	(245)	C——本章总结	(305)
A 卷 基础知识强化	(245)	一、本章知识网络	(305)
B 卷 综合能力提升	(245)	二、本章专题进阶	(306)
2.7 对数	(250)	三、综合解题指导	(317)
I 基础知识达标版	(250)	四、探究学习课题	(320)
一、相关知识链接	(250)	五、自主空间	(321)
二、教材知识详解	(250)	D——本章验收	(324)
三、经典基础例题	(253)	本章检测题	(324)
四、思维误区点击	(255)	第三章 数列	
II 发散创新应用版	(257)	A——章节准备	(329)
一、综合题	(257)	一、兴趣情景导引	(329)
二、应用题	(260)	二、本章内容分析	(329)
三、创新题	(260)	三、学习目标一览	(329)
四、高考题	(261)	四、学习方法点拨	(330)
III 应试必备满分版	(262)	B——章节详解	(330)
基础知识强化	(262)	3.1 数列	(330)
2.8 对数函数	(265)	I 基础知识达标版	(330)
I 基础知识达标版	(265)	一、相关知识链接	(330)
		二、教材知识详解	(330)

# CONTENTS 目录

三、经典基础例题	(332)	一、综合题	(379)
四、思维误区点击	(335)	二、应用题	(383)
II 发散创新应用版	(336)	三、创新题	(385)
一、综合题	(336)	四、高考题	(388)
二、应用题	(337)	III 应试必备满分版	(392)
三、创新题	(338)	A卷 基础知识强化	(392)
四、高考题	(340)	B卷 综合能力提升	(393)
III 应试必备满分版	(341)	3.5 等比数列的前 $n$ 项和	(400)
A卷 基础知识强化	(341)	I 基础知识达标版	(400)
B卷 综合能力提升	(342)	一、相关知识链接	(400)
3.2 等差数列	(345)	二、教材知识详解	(400)
I 基础知识达标版	(345)	三、经典基础例题	(401)
一、相关知识链接	(345)	四、思维误区点击	(402)
二、教材知识详解	(345)	II 发散创新应用版	(404)
三、经典基础例题	(346)	一、综合题	(404)
四、思维误区点击	(348)	二、应用题	(407)
II 发散创新应用版	(349)	三、创新题	(411)
一、综合题	(349)	四、高考题	(414)
二、应用题	(350)	III 应试必备满分版	(417)
三、创新题	(350)	A卷 基础知识强化	(417)
四、高考题	(351)	B卷 综合能力提升	(418)
III 应试必备满分版	(352)	C——本章总结	(428)
3.3 等差数列的前 $n$ 项和	(354)	一、本章知识网络	(428)
I 基础知识达标版	(354)	二、本章专题进阶	(428)
一、相关知识链接	(354)	三、综合解题指导	(428)
二、教材知识详解	(355)	四、探究学习课题	(435)
三、经典基础例题	(357)	五、自主空间	(436)
四、思维误区点击	(358)	D——本章验收	(436)
II 发散创新应用版	(359)	I 本章检测题	(436)
一、综合题	(359)	II 本章自我评价	(441)
二、应用题	(361)	附录	
三、创新题	(361)	附录1 数学思想方法	
四、高考题	(362)	一、函数与方程的思想	(442)
III 应试必备满分版	(364)	二、数形结合思想方法	(443)
A卷 基础知识强化	(364)	三、分类讨论思想方法	(444)
B卷 综合能力提升	(365)	四、化归与转化思想方法	(445)
3.4 等比数列	(367)	附录2 教材习题答案	
I 基础知识达标版	(367)	第一章 集合与简易逻辑	(447)
一、相关知识链接	(367)	复习参考题一	(454)
二、教材知识详解	(368)	第二章 函数	(457)
三、经典基础例题	(372)	复习参考题二	(467)
四、思维误区点击	(376)	第三章 数列	(469)
II 发散创新应用版	(379)	复习参考题三	(481)

## 第一章 集合与简易逻辑

在数学的天地里,重要的不是我们知道什么,而是我们怎么知道什么。

——(古希腊数学家)毕达哥拉斯

### A 章节准备

#### 一、兴趣情景导引

古希腊有一个“鳄鱼的眼泪”的传说:一条鳄鱼从一位母亲手里抢走了一个小孩,鳄鱼想吃掉这个小孩,又希望“合乎情理”,便假惺惺地对这位母亲说:“我会不会吃掉你的孩子?如果你答对了这个问题,我将把孩子不加伤害地还给你。”这位母亲思考了片刻回答道:

“啊!你会吃掉我的孩子!”

聪明的母亲机智地回答了这个问题,不管答对答错鳄鱼都不能吃掉孩子.愚笨的鳄鱼为了表示尊重诺言,只好把孩子还给了这位冷静的母亲.

如果你是这位母亲,你能作出这样机智的回答吗?这中间是否有一些数学理论和规律呢?我们一起来学习集合和简易逻辑的知识吧!

#### 二、本章内容分析

本章主要讲述集合的初步知识与简易逻辑知识两部分内容.集合与简易逻辑的知识在初中到高中阶段的学习中逐步渗透是至关重要的.集合概念及其理论,称为集合论,是现代数学的重要基础.数学中许多重要的分支,如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑等都建立在集合理论的基础上,其所反映的数学思想在广泛的领域中得到应用.逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科,基本的逻辑知识是认识问题、研究问题不可缺少的工具.

集合的初步知识包括集合的有关概念,集合的表示及集合与集合之间的关系.同学们在小学和初中数学的学习中,已经接触过集合,对于诸如数集(整数的集合、有理数的集合)、点集(直线、圆)等,都有了一定的感性认识.在此基础上,这一部分首先结合实例引出集合与集合的元素等概念,并介绍了集合的表示方法.然后,从讨论集合与集合之间的包含与相等的关系入手,给出子集的概念,此外,还给出了与子集相联系的全集与补集的概念.接着,又讲述了属于集合运算的交集、并集的初步知识.考虑到集合知识的运用与巩固,又考虑到下一章讨论函数的定义域与值域的需要,这一部分最后安排的是绝对值不等式与一元二次不等式的解法.

简易逻辑主要介绍命题的基本知识(其中包括逻辑联结词“或”、“且”、“非”),四种命题及其相互关系和充要条件的有关知识.同学们在初中数学中,学习过简单的命题(包括原命题与逆命题)知识,掌握了简单的推理方法(包括对反证法的了解).由此,这一部分首先给出命题和含有“或”、“且”、“非”的复合命题的真假的方法.接

下来,讲述四种命题及其相互关系,并且在初中数学的基础上,结合四种命题的知识,进一步讲解反证法.然后,通过若干实例,讲述充分条件、必要条件和充要条件的有关知识.

### 三、学习目标一览

1. 通过本章学习理解集合的概念,掌握集合的表示法.
2. 理解空集、全集、补集的意义.
3. 理解子集、交集、并集的概念,了解属于、包含、相等关系的意义,掌握有关的术语和符号,并能正确运用.
4. 掌握两个有限集合交、并集元素个数的求法,了解德摩根定律.
5. 理解常用逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义,并能利用真值表,判断含有“或”、“且”、“非”的复合命题的真假.
6. 掌握四种命题及其相互关系.
7. 初步掌握充要条件.
8. 掌握简单的绝对值不等式与一元二次不等式的解法.

### 四、学习方法点拨

1. 本章第一大节的重点是有关集合的基本概念,集合之间的关系及集合运算.第二大节的重点是逻辑联结词“或”、“且”、“非”与充要条件.
2. 本章的难点有:①有关集合的各个概念的含义及这些概念相互之间的区别与联系;②对简易逻辑中“或”字的理解;③充要条件的判断及对一些代数命题真假的判断.
3. 关键是分清元素与集合、集合与集合之间的关系;分清命题的条件和结论;理解“或”、“且”、“非”的含义.

## B 章节详解

### 1.1 集合

#### I 基础知识达标版

##### 一、相关知识链接

1. 我们在小学和初中数学的学习中,已经接触过集合,比如在代数中接触过整数的集合、有理数的集合等数集;在几何的学习中接触过直线、圆等点的集合.
2. 在初中学习一元一次不等式与一元一次不等式组的过程中,得到的 $x$ 的范围实际上就是不等式(组)的解集.
3. 简单的命题知识和反证法.



## 二、教材知识详解

### 1. 集合和集合的元素的观念

(1) 集合在数学中是一个不加定义的概念. 一般地, 符合某种条件(或具有某种性质)的对象的全体就构成了一个集合.

(2) 集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

### 2. 集合的表示方法

为了方便起见, 我们经常用大写的拉丁字母表示, 而集合的元素常用小写的拉丁字母表示. 集合的表示方法主要有列举法、描述法、图示法以及用一些特定的字母表示一些常用数集.

#### (1) 列举法

将集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内. 如  $A = \{1, 2, 3\}$ .

使用列举法时, 需注意以下几点:

① 元素间用逗号“,”;

② 元素不重复, 如  $A = \{1, 2, 1\}$  的表示方法是错误的;

③ 元素无顺序, 如  $A = \{1, 2, 3\}$  和  $B = \{3, 2, 1\}$  表示同一个集合;

④ 对于含较多元素的集合, 如果构成该集合的元素有明显规律, 可用列举法, 但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用省略号.

#### (2) 描述法

把集合中的元素的公共属性描述出来, 写在大括号内表示集合的方法. 它的一般形式是  $\{x | P \mid x \text{ 适合的条件}\}$ . 用描述法表示的集合, 对其元素的属性要准确理解. 例如, 集合  $\{y | y = x^2\}$  表示函数  $y$  值的全体, 即  $\{y | y \geq 0\}$ ; 集合  $\{x | y = x^2\}$  表示自变量  $x$  的值的全体, 即  $\{x | x \text{ 为任一实数}\}$ .

#### (3) 图示法

为了形象地表示集合, 我们常常画一条封闭的曲线, 用它的内部来表示一个集合. 例如, 如图 1-1-1 所示表示集合  $\{1, 2, 3\}$ .



#### (4) 常用的数集及其记法:

全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集), 记作  $\mathbf{N}$ ;

非负整数集内排除 0 的集, 也称正整数集, 表示成  $\mathbf{N}^*$  或  $\mathbf{N}_+$ ;

全体整数的集合通常简称整数集, 记作  $\mathbf{Z}$ ;

全体有理数的集合通常简称有理数集, 记作  $\mathbf{Q}$ ;

全体实数的集合通常简称实数集, 记作  $\mathbf{R}$ .

图 1-1-1

### 3. 元素与集合的关系

如果  $a$  是集合  $A$  的元素, 就说  $a$  属于集合  $A$ , 记作  $a \in A$ ; 如果  $a$  不是集合  $A$  的元素, 就说  $a$  不属于集合  $A$ , 记作  $a \notin A$ .

符号“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”是表示元素与集合之间的关系的, 不能用来表示集合之间的关

系,例如, $1 \in \{1, 2, 3\}$ 和 $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 都是正确的, $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$ 的写法就是错误的.

#### 4. 集合元素的特征

集合的元素具有:

(1) **确定性**:对于集合  $A$  和某一对象  $x$ ,有一个明确的判断标准是  $x \in A$ ,还是  $x \notin A$ ,二者必居其一,不会模棱两可.

例如,“所有的好人”无明确的标准,对于某个人是否是“好人”无法客观地判断,因此“所有的好人”不能构成集合.

(2) **互异性**:若  $a \in A, b \in A$ ,则  $a \neq b$ .

(3) **无序性**:集合中的元素是不排序的,如集合  $\{1, 2\}$  与  $\{2, 1\}$  是同一个集合. 注意: $\{(1, 2)\}$  与  $\{(2, 1)\}$  不表示同一个集合,这两个集合都是以坐标平面内的点为元素构成的集合, $(1, 2)$  和  $(2, 1)$  表示不同的点,所以这两个集合不表示同一个集合.

#### 5. 空集

不含任何元素的集合叫做空集,记作  $\emptyset$ .

例如,  $\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=2 \end{cases} \right\}$  是空集,它反映该方程组无解.

#### 6. 集合的分类

根据集合元素的有无及元素个数的有限与无限可将集合分为有限集、无限集和空集.

含有有限个元素的集合叫有限集.

含有无限个元素的集合叫无限集.

### 三、经典基础例题

【例1】下列各组对象不能构成集合的是( ).

- A. 某校大于 50 岁的教师
- B. 某校 30 岁的教师
- C. 某校的年轻教师
- D. 某校的女教师

**分析**:某校的任一位教师,可以明确地判断是不是大于 50 岁,是不是 30 岁,是不是女教师,但是“年轻”没有明确的标准,某一位教师是否是年轻教师无法确定,因此“某校的年轻教师”不能构成集合.

**解**:由集合元素必须满足确定性可知不能构成集合的为 C 选项.

**点拨**:充分理解集合的概念,在此题的判断中,要注意集合元素的确定性.

【例2】设集合  $A = \{xy, y, 10\}$ ,  $B = \{100, y, |x|\}$ ,若  $A = B$ ,求  $x, y$  的值.

**分析**:两个集合相等,则两个集合里面含有相同的元素,即若  $a \in A$ ,则  $a$  也一定属于  $B$ ,反之亦然,另外,还应该注意集合元素具有互异性和无序性.

解:由  $A=B$ , 有  $\begin{cases} xy=100 \\ |x|=10 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} x=10, \\ y=10; \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=-10, \\ y=-10. \end{cases}$

当  $x=10, y=10$  时, 集合  $A=\{100, 10, 10\}, B=\{100, 10, 10\}$  不满足集合元素的互异性, 所以这一组解应该舍去.

当  $x=-10, y=-10$  时,

集合  $A=\{100, -10, 10\}, B=\{100, -10, 10\}$  是符合题意的解.

综上所述,  $x=-10, y=-10$ .

**点拨:**在计算出  $x, y$  的值之后一定要代回集合  $A, B$  中检验一个集合的元素是否满足互异性、无序性, 对使得集合元素不满足这些性质的  $x, y$  的值要舍掉.

**【例3】** (1)用列举法表示集合  $\{(x, y) | x+y=3, x, y \in \mathbf{N}\}$ ;

(2)用描述法表示集合  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$ .

**分析:**(1)用列举法表示集合就是把集合里的元素一一列举出来, 第(1)题中集合的元素是坐标平面内的点, 根据用描述法反映的该集合元素的特征可知这些点的横、纵坐标都是自然数, 且横、纵坐标之和为3.

(2)要把集合  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$  用描述法也就是用  $\{x | p\}$  的形式表示出来, 就是找出  $x$  所满足的共同条件  $p, p$  恰好能反映  $x$  的特征.

解:(1)  $\{(0, 3), (3, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ .

(2)  $\{x | x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*, \text{且 } n \leq 4\}$

**点拨:**这道题目考查集合的表示方法以及它们之间的相互转化. 在用描述法表示集合时, 需注意以下几点: ①写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表达的元素符号); ②说明集合中元素的性质; ③不能出现未被说明的字母; ④多层描述时, 应当准确使用“且”、“或”; ⑤所有描述的内容都要写在集合符号内; ⑥用于描述的语句力求简明、准确.

#### 四、思维误区点击

本节常见的思维误区是: ①集合表示混乱、错误; ②解题粗心大意, 不考虑集合元素的性质; ③属于符号“ $\in$ ”乱用; ④“ $\emptyset$ ”理解错误.

**【例1】** 方程组  $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=-1 \end{cases}$  的解集为( ).

A.  $\{x=0, y=1\}$

B.  $\{0, 1\}$

C.  $\{(0, 1)\}$

D.  $\{(x, y) | x=0 \text{ 或 } y=1\}$

**错解:**选择 A、B、D.

**误区分析:**A 中不符合集合表示法的基本模式, 既不是列举法也不是描述法; B

中为两个元素 0、1 组成的数集,不是二元一次方程组的解集;D 中虽然是点集,但其中元素为  $(0, y)$  或  $(x, 1)$ , 其中  $x, y$  可以取一切实数,它表示两条直线  $x=0$  或  $y=1$  上所有的点的集合. 以上错解均是由于审题不严、概念理解错误而产生的.

正解:选 C. 该方程组的解是有序实数对.

【例 2】 有下列四个命题:①  $\{\emptyset\}$  是空集;②  $\{0\}$  是空集;③ 若  $a \in \mathbf{N}$ , 则  $-a \notin \mathbf{N}$ ;④ 集合  $A = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 2x + 1 = 0\}$  是二元集. 其中正确的命题个数为( ).

A. 0    B. 1    C. 2    D. 3

错解:B、C、D.

误区分析:①  $\{\emptyset\}$  是单元素集,它含有一个元素即空集这个集合,它是集合为元素的集合,所以  $\{\emptyset\}$  不是空集,故①不正确;②  $\{0\}$  是含有元素 0 的单元素集,也不是空集,故②也不正确;③ 这个命题有些同学认为是正确的,是因为忽略了 0 这个特殊的自然数,它的相反数就是它自身,所以③不正确;④ 因为  $A = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 2x + 1 = 0\} = \{-1\}$  是单元素集合而不是二元集.

正解:A.

【例 3】 已知集合  $M = \{1, 3\}$ , 则下列表示方法正确的是( ).

A.  $3 \notin M$     B.  $\{1\} \in M$     C.  $1 \in M$     D.  $1 \in M$  且  $3 \notin M$

错解:B.

误区分析:属于符号“ $\in$ ”是用来表示元素和集合之间的关系的,1 是集合  $M$  中的元素,但是  $\{1\}$  表示的是一个集合.

正解:C.

点拨: $\emptyset \in \{\emptyset\}$  这个写法是正确的,虽然在这个“ $\in$ ”两边都是集合,但是  $\{\emptyset\}$  是以空集  $\emptyset$  为元素的集合. 类似的,  $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$  的写法也是正确的.

## II 发散创新应用版

### 一、综合题

【例 1】 已知集合  $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$ ,

(1) 若  $A$  中只有一个元素,求  $a$  的值,并求出这个元素;

(2) 若  $A$  中至少有一个元素,求  $a$  的取值范围.

分析:(1) 集合  $A$  中只有一个元素,等价于方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  只有一个根或两个相同的根,而方程中的  $a=0$  时,方程就转化为  $2x+1=0$ ,可见只有一个根. 当  $a \neq 0$  时,方程的  $\Delta=0$  时,有两个相同的根.

(2) 集合中至少有一个元素,则方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个根,所以这个方程除包含题(1)中求得的  $a$  值外,还包括当  $a \neq 0$  且  $\Delta > 0$  时方程有两个不相同的根时  $a$  的值.

解:(1) 因为集合  $A$  中只有一个元素,

所以当  $a=0$  时,解之,得  $x = -\frac{1}{2}$ ;

当  $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 4 - 4a = 0, \end{cases}$  得  $a=1$ ,解之,得  $x = -1$ ,

所以当  $A$  中只有一个元素时, $a=0$ ,这个元素为  $-\frac{1}{2}$ ,或  $a=1$ ,这个元素为  $-1$ .

(2) 因为集合  $A$  中至少有一个元素,所以

① 当集合中有一个元素时, $a=0$  或  $a=1$ ;

② 当集合中有两个元素时,有  $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta > 0, \end{cases}$  得  $a < 1$  且  $a \neq 0$ .

综上所述,可知集合中至少有一个元素时  $a \leq 1$ .

## 二、应用题

**【例 2】** 已知集合  $A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid \frac{9}{10-x} \in \mathbf{N} \right\}$ ,  $B = \left\{ \frac{9}{10-x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{N} \right\}$ , 试问集合  $A$  与  $B$  共有几个相同的元素,并写出由这些“相同元素”组成的集合.

**分析:** 题目中的集合  $A$  和集合  $B$  都是以描述法的形式给出来的,形式很像,有些同学就误认为两个集合是一个集合,实际上这两个集合的元素是不一样的.  $A$  中是以  $x$  为元素, $x$  满足的条件是  $x \in \mathbf{N}$  且  $\frac{9}{10-x} \in \mathbf{N}$ ,  $B$  中是以  $\frac{9}{10-x}$  为元素的,  $\frac{9}{10-x}$  满足的条件是  $\frac{9}{10-x} \in \mathbf{N}$  且  $x \in \mathbf{N}$ , 注意到这点就可以将  $A, B$  用列举法表示出来,然后再找出  $A$  和  $B$  的相同的元素,也就是既在  $A$  中出现,也在  $B$  中出现的元素.

**解:** 因为  $A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid \frac{9}{10-x} \in \mathbf{N} \right\}$ ,

所以  $A = \{1, 7, 9\}$ .

因为  $B = \left\{ \frac{9}{10-x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{N} \right\}$ ,

所以  $B = \{9, 3, 1\}$ .

所以  $A, B$  有两个公共元素,由这些“相同元素”组成的集合为  $\{1, 9\}$ .

**点拨:** 在解这类题时,一定要弄清楚集合的元素是什么. 集合语言很抽象,审题很重要,只有正确地理解题意,才能正确解题.

## 三、创新题

**【例 3】** 已知数集  $M$  满足条件:若  $a \in M$ , 则  $\frac{1+a}{1-a} \in M$  ( $a \neq \pm 1, a \neq 0$ ).

(1) 若  $3 \in M$ , 试把由此确定的  $M$  的其它元素全部求出来;

(2) 若  $a \in M$ , 试把由此确定的其他元素全部求出来. ( $a \neq \pm 1, a \neq 0$ ).

分析:由题目可知,如果  $a \in M$ , 则  $\frac{1+a}{1-a} \in M$ . 由于  $\frac{1+a}{1-a} \in M$ , 则  $\frac{1 + \frac{1+a}{1-a}}{1 - \frac{1+a}{1-a}} \in M, \dots$ ,

这样就可以找出由  $a$  确定的  $M$  中的其他元素.

解:(1)因为  $3 \in M$ ,

$$\text{所以 } \frac{1+3}{1-3} = -2 \in M.$$

因为  $-2 \in M$ ,

$$\text{所以 } \frac{1+(-2)}{1-(-2)} = -\frac{1}{3} \in M.$$

因为  $-\frac{1}{3} \in M$ ,

$$\text{所以 } \frac{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \in M.$$

因为  $\frac{1}{2} \in M$ ,

$$\text{所以 } \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \in M, \text{再往下进行这样的操作则开始循环.}$$

所以若  $3 \in M$ , 则由  $3$  确定的  $-2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  也属于  $M$ .

(2)若  $a \in M (a \neq \pm 1, a \neq 0)$ , 则  $\frac{1+a}{1-a} \in M$ ,

因为  $\frac{1+a}{1-a} \in M$ ,

$$\text{所以 } \frac{1 + \frac{1+a}{1-a}}{1 - \frac{1+a}{1-a}} = -\frac{1}{a} \in M.$$

因为  $-\frac{1}{a} \in M$ ,

$$\text{所以 } \frac{1 + \left(-\frac{1}{a}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{a}\right)} = \frac{a-1}{a+1} \in M.$$

所以  $\frac{1 + \frac{a-1}{a+1}}{1 - \frac{a-1}{a+1}} = a \in M$  再往下操作则循环.

所以若  $a \in M$ , 则  $\frac{1+a}{1-a}, -\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a+1}$  也一定属于  $M$ .

点拨: 反复利用题设: 若  $a \in M (a \neq \pm 1, a \neq 0)$ , 则  $\frac{1+a}{1-a} \in M$ , 注意角色转换.

### III 应试必备满分版

#### 基础知识强化 (45 分钟 ✓ 100 分)

##### 一、选择题 (每小题 8 分, 共 48 分)

- 下列事物中能形成集合的是( ).  
A. 小于  $8^5$  的自然数      B. 很小的数  
C. 有趣的书      D. 省电的灯
- 下列集合: (1) 100 以内的质数的集合;  
(2) 5 的倍数的集合;  
(3) 内心和外心重合的三角形的集合;  
(4) 圆的集合;  
(5)  $x+y=2$  的解集;  
(6)  $x^2+y^2=0$  的实数解的集合.  
是有限集的有( ).  
A. 0 个      B. 1 个      C. 2 个      D. 3 个
- 已知  $M = \{x | x-1 < \sqrt{2}\}$ , 那么( ).  
A.  $2 \in M, -2 \in M$       B.  $2 \in M, -2 \notin M$   
C.  $2 \notin M, -2 \notin M$       D.  $2 \notin M, -2 \in M$
- 集合  $\{1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots\}$  用描述法可表示为( ).  
A.  $\{x | x = 2n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\}$   
B.  $\{x | x = (-1)^n(2n-1), n \in \mathbf{N}\}$   
C.  $\{x | x = (-1)^n(2n+1), n \in \mathbf{N}\}$   
D.  $\{x | x = (-1)^{n-1}(2n-1), n \in \mathbf{N}\}$
- 方程组  $\begin{cases} x+2y=5, \\ xy=2 \end{cases}$  的解集的正确表示方法是( ).  
A.  $\left\{ \text{方程组} \begin{cases} x+2y=5, \\ xy=2 \end{cases} \text{的解集} \right\}$   
B.  $\{x=1, y=2\}$   
C.  $\{1, 2\}$   
D.  $\{(1, 2)\}$

6. 下列四个集合中,不同于另外三个集合的是( )。

- A.  $\{y|y=2\}$       B.  $\{x|x^2-4x+4=0\}$   
 C.  $\{x=2\}$       D.  $\{2\}$

## 二、填空题(每小题8分,共32分)

7. 用列举法表示不等式  $x^2-x-6<0$  的整数解集是\_\_\_\_\_。

8. 下面六个关系式:① $\emptyset \in \{0\}$ ;② $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ;③ $\{a\} \in \{a,b\}$ ;④ $a \in \{a,b\}$ ;⑤ $\mathbf{R} = \{\text{实数集}\}$ ;⑥ $\mathbf{R} = \{\text{实数}\}$ ,正确的是\_\_\_\_\_。

9. 若  $\frac{1-x}{1+x} \in \{x\}$ , 则  $x$  的值为\_\_\_\_\_。

10. 设  $\frac{1}{2} \in \{x|x^2-ax-\frac{5}{2}=0\}$ , 则集合  $\{x|x^2-\frac{19}{2}x-a=0\}$  中所有元素的积为\_\_\_\_\_。

## 三、解答题(每小题10分,共20分)

11. 若  $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$ , 求实数  $a$  的值。

12. 设  $M = \{a|a=x^2-y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$ , 试证明:一切奇数属于  $M$ 。

## ■ ■ ■ 参考答案及点拨 ■ ■ ■

一、1. A 分析:集合的元素具有确定性,即对于集合  $A$  和某一对象  $x$ ,有一个明确的判断标准是  $x \in A$ , 还是  $x \notin A$ , 二者必居其一,不会模棱两可。“很小的数”,“有趣的书”,“省电的灯”这类对象,不能构成数学意义上的集合,因为“很小”,“有趣”,“省电”均是模糊语言,不能作为判别每一具体对象是否属于集合的明确标准。只有 A 选项“小于  $8^3$  的自然数”判断标准明确,可以形成集合。

点拨:本题考查集合元素的确定性。

2. C 分析:①100 以内的质数的个数是有限的,所以①是有限集;②5 的倍数有无限多个,故②为无限集;③等边三角形的内心与外心重合,而等边三角形有无限多个,故③为无限集;④圆有无限个,故④为无限集;⑤能使  $x+y=2$  成立的  $x$  和  $y$  的值有无数个,故⑤为无限集;⑥  $x^2+y^2=0$  的实数解的集合为  $\{(x,y) \mid \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\}$ , 故⑥为有限集。综上,只有①和⑥为有限集。

选 C。

点拨:本题考查的是集合的分类方法。

3. A 分析:若  $x=2$ , 则  $x-1=1<\sqrt{2}$ , 所以  $2 \in M$ 。若  $x=-2$ , 则  $x-1=-3<\sqrt{2}$ , 所以  $-2 \notin M$ 。

点拨:本题考查判断一个具体对象是否属于一个给定的集合。

4. D 分析:题目中的集合是以列举法表示的,这个集合是个无限集,从给出的这几个元素我们可以发现这个集合里面元素的特征,然后将其用描述法表示出来  $\{x|x=(-1)^{n-1}(2n-1), n \in \mathbf{N}\}$ , 即 D 选项。如果自己总结出这个规律很难的话,作为选择题,我们可以检验各个选项是否符合题目要求,从而排除 A、B、C。

点拨:本题考查的是描述法和列举法之间的相互转换,在用描述法表示时一定要和列举法表



示的集合相一致.

5. D 分析: 方程组  $\begin{cases} x+2y=5, \\ xy=2 \end{cases}$  的解, 同学们很快就可以求出来  $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$  那么把它的解表示成

集合的形式, 该怎么来表示呢? 这个集合是以有序实数对为元素的集合, 所以应该选择 D, 选项 A、B、C 都不符合要求, A 中的元素是解集这个集合; B 中不符合集合表示法的基本模式, 即不是列举法也不是描述法; C 中为两个元素 1、2 组成的数集, 不是方程组的解集.

点拨: 本题主要考查集合的表示法, 需要注意集合里的元素是什么.

6. C 分析: A、B、D 选项中的集合都是只含有一个元素 2 数集, 虽然表达形式不一样, 但是实质是一样的; 而选项 C 中的集合也是一个单元素集合, 但这个元素是一个等式“ $x=2$ ”, 所以与其它三个不同.

点拨: 有些集合虽然表达形式不同, 但它所含的元素是一样的, 这些集合的实质是一样的.

二、7.  $\{-1, 0, 1, 2\}$  分析:  $x^2 - x - 6 < 0$  分解因式有  $(x-3)(x+2) < 0$ , 所以解集为  $-2 < x < 3$ , 又因为  $x \in \mathbb{Z}$ , 所以  $x$  可以取的值为  $-1, 0, 1, 2$ , 故其整数解集是  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .

点拨: 首先解出这个一元二次不等式, 然后找出符合条件的整数, 用列举法表示出来.

8. ②④⑥ 分析: ①中  $\emptyset$  和含有一个元素“0”的集合  $\{0\}$  是两回事; ②中  $\{\emptyset\}$  是以空集为元素的集合, 所以  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  是正确的; ③中  $\{a\}$  是一个集合, 而  $\{a, b\}$  是以  $a, b$  为元素的集合, 不能用“ $\in$ ”来联结  $a$  和  $a, b$ ; ④中  $a$  是集合  $\{a, b\}$  中的元素, “ $\in$ ”是表达元素与集合之间关系的符号, 所以“ $a \in \{a, b\}$ ”正确; R 是用一个字母来表示常用数集即实数集, 这个集合里面的元素是全体实数, 所以⑤错⑥对.

点拨: 集合的基本概念一定要理解透彻.

9.  $x = -1 \pm \sqrt{2}$  分析: 因为  $\frac{1-x}{1+x} \in |x|$ ,

所以  $\frac{1-x}{1+x} = x$ , 即  $x^2 + 2x - 1 = 0$ .

解得  $x = -1 \pm \sqrt{2}$ .

点拨: 因为  $\frac{1-x}{1+x} \in |x|$ , 所以  $\frac{1-x}{1+x} = x$ .

10.  $\frac{9}{2}$  分析: 因为  $\frac{1}{2} \in \left\{x \mid x^2 - ax - \frac{5}{2} = 0\right\}$ ,

所以有  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - a\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} = 0$ .

解得  $a = -\frac{9}{2}$ , 以此代入  $x^2 - \frac{19}{2}x - a = 0$ , 得  $x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{9}{2} = 0$ . 由韦达定理知该方程的两根之积  $x_1 \cdot x_2 = \frac{9}{2}$ .

$x_1 \cdot x_2$  即为集合  $\left\{x \mid x^2 - \frac{19}{2}x - a = 0\right\}$  中所有元素的积.

点拨: 首先根据  $\frac{1}{2} \in \left\{x \mid x^2 - ax - \frac{5}{2} = 0\right\}$  确定  $a$  的值, 然后再根据韦达定理求出  $x^2 - \frac{19}{2}x - a = 0$  的两根之积  $x_1 \cdot x_2$ , 即为集合  $\left\{x \mid x^2 - \frac{19}{2}x - a = 0\right\}$  中所有元素的积.