

高等学校教学用书



代数与初等函数

С. И. 諾羅塞洛夫著

人民教育出版社

高等学校教学用书



代数与初等函数

C. H. 諾窪塞洛夫著
張禾瑞 趙慈庚等譯

人民教育出版社



本书系根据俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部教科书出版社 (Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР) 出版的諾霍塞洛夫 (С. И. Новоселов) 著“代数与初等函数”(Алгебра и элементарные функции) 的 1952 年第三版譯出。原书經俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部审定为师范专科学校教科书。

本书中譯本第一編由張永瑞、孙永生譯，第二編由赵慈庚、严士健譯。

本书原由高等教育出版社出版。自 1960 年 4 月 1 日起，高等教育出版社奉命与人民教育出版社合并，統称“人民教育出版社”。因此本书今后用人民教育出版社名义繼續印行。

代 数 与 初 等 函 数

С. И. 諾霍塞洛夫著

張永瑞等譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部
北京宣武門內承恩寺 7 号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号)

上 海 市 印 刷 五 厂 印 刷
新 华 书 店 上 海 发 行 所 发 行
各 地 新 华 书 店 經 售

統一書号 13010·6 开本 850×1168 1/32 印張 12 15/16
字數 373,000 印數 114,001—127,000 定价(4) 1.20
1954 年 8 月第 1 版 1956 年 6 月第 2 版
1960 年 8 月上海第 20 次印刷

目 錄

第一編 代數

序

第一章 有理數體	9
§ 1. 頁數的引入	9
§ 2. 有理數	16
§ 3. 有理數大小的比較	16
§ 4. 有理數的算術運算	19
§ 5. 有理數上運算的規則	29
§ 6. 數環與數體	32
§ 7. 運算的比較性質	34
第二章 有理函數	36
§ 8. 一般概念	36
§ 9. 有理式	39
§ 10. 關於兩多項式恒等的定理	42
§ 11. 多項式環	44
§ 12. 多項式的整除性	47
§ 13. 有餘式的除法	49
§ 14. 用 $x-a$ 除	51
§ 15. 多項式的根	52
§ 16. 多項式整根求法	57
§ 17. 多項式有理根的求法	59
§ 18. 兩個多項式的最高公因子	60
§ 19. 多項式的既約因子分解	63
§ 20. 多變數的多項式	67
§ 21. 多項式因子分解特例	70
§ 22. 有理函數體	74
第三章 線性方程組	83
§ 23. 一般概念	83
§ 24. 二未知數的方程組	84

§ 25. 二階行列式	85
§ 26. 克來姆法則	86
§ 27. 二階行列式的性質	86
§ 28. 二未知數的兩個方程的方程組的研究	87
§ 29. 三階行列式	89
§ 30. 三階行列式的性質	90
§ 31. 三未知數的三個線性方程的方程組的解法與研究	95
§ 32. 齊次方程組	100
§ 33. 線性方程組的初等解法	101
第四章 實數體	107
§ 34. 基本概念	107
§ 35. 線段的十進度量	113
§ 36. 正實數	115
§ 37. 負實數	117
§ 38. 實數的比較	117
§ 39. 用有理數逼近無理數	119
§ 40. 實數集的稠密性	121
§ 41. 關於遞增與遞減序列的定理	122
§ 42. 實數的算術運算	125
§ 43. 作為數體的實數集合	133
§ 44. 開方	136
§ 45. 中間數體的例	138
§ 46. 實系數的多項式、有理函數及線性方程	140
§ 47. 實數體中多項式的根	141
§ 48. 根式及其運算	144
§ 49. 無理式	146
§ 50. 可數集合	151
§ 51. 所有實數集合的不可數性	154
第五章 複數體	156
§ 52. 基本概念和定義	156
§ 53. 複數的幾何表示	162
§ 54. 複數運算的幾何解釋。棣美弗公式	167
§ 55. 開方	172
§ 56. 代數函數與線性方程	176
§ 57. 代數的基本定理	177
§ 58. 多項式的一次因子分解	178
§ 59. 實系數多項式	181

§ 60. 多項式的系數與根的關系	185
§ 61. 方程的變形	188
§ 62. 方程的等價	190
§ 63. 二次及三次方程	194
§ 64. 關於方程能否用根式解的問題, 二項方程	198
§ 65. 解方程的特殊方法	202
§ 66. 關於消去法問題的概念	209
§ 67. 高次方程組的特殊解法	214
§ 68. 關於無理方程的解的概念	219
第六章 不等式	222
§ 69. 基本定理	222
§ 70. 利用不等式給出數集及點集	224
§ 71. 不等式的解	230
§ 72. 一未知數的一次不等式	231
§ 73. 一未知數的高次不等式	234
§ 74. 有若干個未知數的不等式解法舉例	240
§ 75. 包含絕對值的不等式	244
§ 76. 不等式的證明	247
§ 77. 幾種重要的不等式	247
§ 78. 求最大值與最小值的例	254
第七章 代數的公理法	258
§ 79. 一般概念	258
§ 80. 環的公理及其推論	259
§ 81. 體的概念	263
§ 82. 環與體的同構對應	263

第二編 初等函數

§ 83. 一般概念	271
第八章 $\rightarrow$ 函數, 指數函數及對數函數	277
§ 84. $\rightarrow$ 的概念的推廣	277
§ 85. 有理指數的 $\rightarrow$ 函數	280
§ 86. 有理數集上的指數函數	286
§ 87. 無理指數 $\rightarrow$	289
§ 88. 指數函數	290
§ 89. 對數及其性質	293
§ 90. 對數函數	297

第九章 三角函數	299
§ 91. 用圓周的點表示實數	299
§ 92. 任意角的三角函數	301
§ 93. 數值變數的三角函數	305
§ 94. 三角函數間的关系	307
§ 95. 三角函數的基本性質	310
§ 96. 簡約公式	312
§ 97. 三角函數的單調區間	316
§ 98. 三角函數的圖象	321
§ 99. 圓的參數方程, 調和運動	324
§ 100. 向量在一個軸上的射影定理	326
§ 101. 相加定理	327
§ 102. 相加定理的推論	330
§ 103. 有理代換	337
§ 104. 含有變數與三角函數的簡單不等式及其應用	341
第十章 逆三角函數	347
§ 105. 基本逆三角函數	347
§ 106. 逆函數上的三角運算	353
§ 107. 逆函數間的关系	356
第十一章 初等函數的研究	362
§ 108. 初等函數	362
§ 109. 初等函數之分類	367
§ 110. 用初等方法討論函數	370
§ 111. 初等函數圖象的作法	372
§ 112. 簡單變換對於繪制圖象的應用	377
§ 113. 初等函數圖象作法舉例	383
第十二章 初等超越方程	392
§ 114. 初等超越方程	392
§ 115. 簡單超越方程	393
§ 116. 超越方程的各種特別解法	395
§ 117. 方程的特殊解	406
§ 118. 方程的圖象解法與近似值解法概念	408

序

這本書是預備給師範專科學校的物理數學系做課本用的。

這本書的第一編(按照教學大綱)講述一些初等代數的問題,這些問題都是有原則性意義的,並且對於中學教師是最迫切需要的。這一編里也包含着某些通常在高等代數教程里才講到的知識——這是由於在師範專科學校里不拿高等代數當做一門獨立的科目來學習的緣故。

近世代數的許多重要概念(如環、體、同構)是簡單的,可以用初等方法來講解,同時又有助於清晰地去了解中學代數課本的科學內容。我已經盡力使近世代數的基本概念和中學教材達到自然的協調。

第二編專門有系統地研究初等函數。按照師範專科學校現行的教學大綱,不應該把三角當做獨立的教学科目來學習。三角函數與其他初等函數並列起來,當做初等函數的一部分來學習,而將牽涉初等幾何圖形的計算問題歸之於幾何學。這樣的課程結構是絕對不能用之於中學的。

由於對外國的所謂改良運動的過火行為採取不批判的態度,曾產生過要在中學里不把三角做為獨立數學科目的悖謬“教學法”思想,這在現代已經遭到了全面的破產。但是對於學過了中學數學課程的師範專科學校學生來說,這樣的課程結構是合宜的。中學的數學同初等函數是有關係的,未來的教師對初等函數的嚴整系統有所認識是很重要的。注意,這書里第二編的材料,以及它所取的講述系統,當着安排十年級複習課程的時候,可以用做藍本。

關於用初等方法來研究函數的問題,教學大綱以及這個課本都格外注意。認為既然高等數學對於函數的研究問題有了完備的方法,便不該把這種研究包括在初等數學教程里的觀點,我們認為是一個嚴重

的錯誤。問題在於，涉及函數研究的許多概念（如單調性，極大與極小值）不必依賴於微分法；微分法僅在做這種研究時，供給一些強有力的工具。熟識研究的對象，當然應該在對完成這種研究的工具加以探討之前。在中學課程範圍里，把涉及函數研究的各基本概念揭露出來是完全可能的（當然不過於細致完備地）。正是這一點是很重要的。

在中學教學大綱里插入微積分的想法，曾經是爭論的對象，但是現在未必能認真地說，這種有半世紀之久的思想會再復活。尤其是，不掌握直接根據函數定義來研究函數的技巧，而能夠順利地運用數學分析的方法，是大可懷疑的。初等函數在數學中，在數學的應用中都是極其重要的一類，而每個教師在直接研究這些函數上，在繪制它們的圖象上都应该有素養。

關於師範專科學校教科書的讀者所提的意見，我以為必須說明下列事項：

第一，這部書根本不帶有“通用指南”的性質，而僅是特別給師範專科學校預備的一套課本的組成部分；

第二，這部書是專為有着中學程度的數學知識的人而寫的。

由於上述原因，編者有權認為許多概念是已知的。譬如級列或函數的極限概念，是高等數學里所講述的，讀者可以在高等數學里去找它們的定義。

在初等數學課本的初版問世以後，我接到讀者很多的信，關於這書提出了各種見解與希望，指出了不同的錯誤與缺點。讀者的這些批評和意見曾幫助我在以後几版中將本書加以改進。謹向所有同我交換過意見的讀者深深地致以謝意。

奧古涅夫、莫捷諾夫、庫圖佐夫、非里切夫各教師在這本教科書的工作上，用寶貴的意見與指教來幫助我，謹向以上各位學者致謝。麥捷里亞諾夫斯基執行書中插圖的繪制工作，又馬庫瑟維奇提出一些有益的指正，我表示感謝。

諾窪塞洛夫 1951年9月20日 莫斯科

第一編 代數

第一章 有理數體

§ 1. 負數的引入

从算術中，我們已知由於數各个物体而最先產生的自然數概念 其后得到擴大。我們引入了表示沒有物体的數零以及为了表示量的部分所必需的分數。

在算術中所研究的是自然數 $1, 2, 3, \dots$ 及數 0 以及形式为 $\frac{m}{n}$ 的分數，这里 m, n 是整數， $n \neq 0$ 。这些數，除零外，將叫做正有理數。这样，从算術中所知的數的集合是由正數和零所組成的。这些數中以零为最小，因此不等式 $k > 0$ 被用为表示 k 为正數的符号。

數的概念的更進一步的擴大是与度量有方向的量的需要相關联着的，这种量不僅由數值，而且还須由方向才能完全表征出來。我們將研究特殊形式的方向量，對於它們只須區分兩個相反方向。這類方向量的例子是：物体作直線運動進退的路程，位在直線上的線段，在寒暑表上从冰點向上向下計算的溫度；从某一時刻向前或向后計算的時間。某种量的增大与減小可認為是它在相反方向的变化（如溫度上昇与下降，收入与開支等）。

我們約定，對於某一种量的在某一固定方向的度量，我們用从算術中已知的數。於是就有必要引入新的數來擴大數的概念，用这些新數來表示这种量在相反方向的度量結果。

例如研究直線上線段的度量的問題。沿着給定的直線 MN 移動

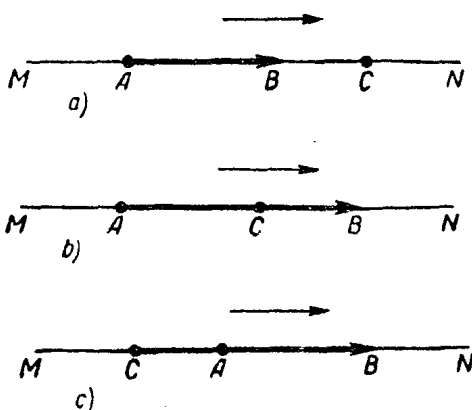


圖 1.

的兩個可能方向之一叫作正方向；有方向的直線將叫作軸。在圖 1, a 中，“向右”的方向被選定為正方向並用箭頭標明（這裡我們利用直觀想像，各幾何概念的精確定義屬於幾何學）。為了度量與軸同方向的線段（例如 AB ），我們用正數。若 B 點與 A 點重合（即線段退縮為點），那麼我們說， AB 是“零線段”。

對於零線段我們用數零作為它的度量結果。為了度量與軸反方向的線段必須引入新數——叫作負數。若線段 AB （方向向右）的量用數 a 表示，則線段 BA 的量必須以“新的”負數來表示，我們用“ $-a$ ”來記它。數 a 與 $-a$ 互稱為反數。正的整數和分數、負數和零總起來都叫作“有理數”。由算術中已知的數彼此之間有下面眾所週知的關係：第一，在這些數上可實施算術運算；第二，這些數中間有順序關係，即是兩個不同的數中，一個是較大的數，另一個是較小的數。適宜於新數的算術運算我們尚未建立起來。例如我們還不知道：兩個負數相加，或者一個正數與一個負數相加，是什麼意義。同樣我們也不知道如何比較兩負數或者一負數與一正數的大小。在擴大了的數的集合內，可以利用引入適當定義的方法來建立算術運算。這些定義就是協議，在這些協議中，我們同意，當“新”數參進算術運算的時候，給算術運算附加一定的意義。這些定義像任何定義一樣是不能證明的。同樣，適合於新數的“大於”，“小於”，“等於”的概念也是利用適當的定義來引入的。

我們确定定义時,应按下面原則:

第一,我們借着算術中已知數的运算解決了一系列的应用問題。
引入一种新數之所以有益是因为这些數有具体的解釋並且能应用在人類
 類的实际活動上。由此下面原則是可理解的:

利用有理數上的运算必須能解決涉及方向量的这样一些問題,它們
 們与在算術里能利用正數上的运算來解決的問題性質相同。

例如,兩線段(無向量)的和的長等於該兩線段的長的和。我們知道,任意有向線段的和是借助於下列法則:

$$AB + BC = AC \quad (\text{圖 } 1)$$

來建立的。

在所說的原則下,量線段 AC 的數,必須看作是量線段 AB 与 BC 的數的和。

在中学代數課本中,形成正負數运算法則時,先研究一系列不同的具体問題(有向線段的相加,向右及向左的運動,盈余与虧損的計算,溫度的变化等)。从解這些問題的結果中就看出了,从正負數运算的具体意义出發,应如何建立这种运算的法則。例如,若是約定,等速運動公式:

$$s = vt$$

可以应用到任意的有向速度以及从某一時刻向前或向后計算的時間上,那么對於正負數的乘法就不可避免地要採用已知的“符号法則”。

我們不再重複这些論述,因为在中学課本上它們已被有足夠說服力地講解過了。

我們只指出下面的事实:正負數演算的具体解釋,表明減法在有理數集合里應該經常地可以实施。只需看線段上的运算。不論線段 AB 和 AC 是怎樣的線段,存在唯一的差線段 X , 滿足条件:

$$AB + X = AC, \quad (1)$$

即 $X = BC$ 。

令 a 和 b 是量 AC 与 AB 的數; 量 BC 的數 x 必是數 a 与 b 之差 $a-b$, 因为由 (1) 我們应有:

$$b+x=a。$$

第二, 算術中數的运算具有一系列的性質。基本运算律如下:

加法的性質。

1° 交換律:

$$a+b=b+a。$$

2° 結合律:

$$(a+b)+c=a+(b+c)。$$

乘法的性質。

3° 交換律:

$$ab=ba。$$

4° 結合律:

$$(ab)c=a(bc)。$$

加法与乘法如下地互相联系:

5° 分配律:

$$(a+b)c=ac+bc。$$

从这些基本規律, 在算術中推出了任意多个數的运算法則。

在算術上已知數的集合中, 乘法的逆运算 (除法), 除去除數为零外, 是可以單值地实施的, 即: 不論 a 和 b 是怎样的數, 只要 $b \neq 0$, 就存在唯一的數 x , 滿足条件

$$bx=a,$$

这个數(商)被表示如下:

$$x=\frac{a}{b}。$$

加法的逆运算(減法)不常常成立, 即: 滿足条件

$$b+x=a$$

(2)

的數 $x = a - b$, 僅當 $a \geq b$ 時才存在。

下述對於任意 a 都成立的等式：

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot a = a, \quad (3)$$

表出 0 与 1 兩數的特性。

在定义任意有理數的运算時我們將遵从下面的原則：

加法和乘法应当是可以單值地实施的, 即是: 對於任意兩個有理數 a 和 b 可使唯一的數 $a + b$, 叫作它們的和, 以及唯一的數 ab , 叫作積, 跟它們对应。

正有理數的相加和相乘应与算術中的意义相同。對於加法和乘法运算, 基本定律 1°—5° 必須成立。等式 (3) 必須成立。在有理數集中減法应是可以單值地实施的, 即是對於任意 a 和 b 一定存在唯一的數 x , 滿足条件 (2)。在有理數集中除法也应是可單值地实施的, 但零作除數除外。

既然定律 1°—5° 將被滿足, 那么在作成有理數的各种运算時, 可以利用在算術中得到的运算法則(作为基本定律的推論)。

假定, 所提出的条件能被滿足, 那么由这些条件必然地可以得出關於有理數的运算所必須採用的定义。下面我們作这一方面的研究, 但是不企圖達到十分完备的地步。

讓我們看一看, 为了使基本定律有效, 對於有理數的运算須採取何種定义。由於減法可以实施, 對於有理數集合中的任一數 a , 必存在唯一的反數 $x = (-a)$, 滿足条件:

$$a + x = 0 \quad \text{或} \quad a + (-a) = 0。$$

令 $a < b$ (此处 a, b 都是正有理數), 在有理數集中必存在唯一的數 x , 滿足条件:

$$b + x = a。$$

設 $b - a = r$, 即 $b = a + r$ 。那么

$$(a + r) + x = a。$$

兩邊加 $-a$, 得(利用加法的性質):

$$(-a) + (a+r) + x = 0 \quad \text{或} \quad [(-a) + a + r] + x = 0,$$

由此 $r+x=0$ 而 $x=-r=-(b-a)$ 。這就是說, x 是差 $b-a$ 的反數。

令 $-r$ 和 $-r_1$ 是兩個負數(於是 r 和 r_1 是正數), 有:

$$\left. \begin{aligned} r + (-r) &= 0 \\ r_1 + (-r_1) &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (4)$$

依項相加, 得:

$$[r + (-r)] + [r_1 + (-r_1)] = 0;$$

由於加法的交換和結合性質, 有:

$$(r + r_1) + [(-r) + (-r_1)] = 0,$$

因而

$$(-r) + (-r_1) = -(r + r_1).$$

這就是說, 兩個負數的和必是和 $r + r_1$ 的反數。

令 r 是正數, 而 $-r_1$ 是負數; 我們有:

$$r_1 + (-r_1) = 0.$$

兩邊加數 r :

$$r + (-r_1) + r_1 = r$$

或

$$r_1 + [r + (-r_1)] = r.$$

從最後等式得: 當 $r > r_1$ 時和 $r + (-r_1)$ 必等於差 $r - r_1$, 而當 $r < r_1$ 時這個和必等於數 $-(r_1 - r)$, 即差 $r_1 - r$ 的反數。這樣, 我們得出中學教程中已知的正負數加法法則。

現在來看乘法法則; 我們有:

$$a + (-a) = 0;$$

兩邊乘以任一有理數 b 。乘左邊時, 我們利用按照約定應該有效的分配律。得:

$$[a + (-a)]b = ab + (-a)b \quad \text{或} \quad ab + (-a)b = 0.$$

由此, 數 $(-a)b$ 是 ab 的反數:

$$(-a)b = -ab;$$

以 $-b$ 代 b , 得:

$$(-a)(-b) = -a(-b) = ab。$$

我們得出中学教程中已知的正負數乘法法則。

以上討論說明有理數的運算法則應該是怎樣的。但是我們並未談到以下問題, 即事實上能否建立這樣的數集, 在這個數集里一系列事先指定的, 我們用以得出運算規則的條件能被滿足。

在下面几節內將講述有理數理論的形式邏輯的建立。我們將指出, 以算術中所知的數集為基礎, 用形式邏輯的方法, 可以建立起這樣的新數的系統, 使它們和原來已知的數聯系以後, 形成新的“擴大”的數集, 在這數集中, 所有作為論述始點的條件將真正地成立。在形式邏輯的理論中, 數的運算將利用一些協議來建立; 本節所述, 是表明使我們有必要採用這些協議的原因。

§ 2. 有理數

對任一正有理數 a 使一新物件與之對應, 記為 $-a$ 。 例如(根據所建立的對應關係), 數 1 有 -1 與它對應, 數 3 有 -3 與它對應, 數 $\frac{1}{3}$ 有 $-\frac{1}{3}$ 與它對應。

這些物件被看作新數並叫作負有理數。

這個定義是不足以表征負數概念的, 因為現在我們還沒有建立“新數”自身間以及與“舊數”間的任何相互關係。我們將逐漸建立這些相互關係, 而負數概念的全部表征將利用一連串的定义來完成。

定义 相互對應的數 a 與 $-a$ 互稱為反數或對稱數。

數 $-a$ 是 a 的反數, 而 a 是 $-a$ 的反數。

這樣, 置符號 $-$ 在正數前面就變成了反數, 即負數。我們約定, 對於負數也用置符號 $-$ 的辦法來表示變為相應的正數。由於這個協議:

$-(-a)$ 是 a , $-[-(-a)]$ 是 $-a$ 。例如, $-(-2)$ 是 2, $-[-(-\frac{1}{3})]$

是 $-\frac{1}{3}$ 。

再加以下新補充協議：數 0 認為是它自身的反數： -0 是 0 。

數 0 既不算是正數，也不算是負數。

若是一個負數的反數是整數（分數），那末這個負數叫作整數（分數）。這樣，數 -2 ， -5 是整數，而數 $-\frac{1}{2}$ ， $-\frac{5}{7}$ 是分數。

正負整數，正負分數和數 0 一起作成的數集，叫作有理數集合。

註 I. 若是約定，正數 a 前可加 $+$ 號，而認為 $+a$ 即是 a （例如 $+2$ 是 2 ， $+7$ 是 7 ），那麼對任一異於零的有理數 a ，若它是正的，可加上 $+$ 號，若它是負數，可加上 $-$ 號。

註 II. 若是認為，字母 a 可以表示任意有理數（不只是正數），那麼當 a 是正數時， $-a$ 表示負數；當 a 是負數時， $-a$ 表示正數；當 a 是零時， $-a$ 表示零。

註 III. 符號 $-$ （減號）有兩種作用：作為轉為反數的符號及作為減法運算符號。以下，當在同一式子中這個符號以不同意義出現時，將利用括弧；即 a 的反數 $-a$ 將表示為 $(-a)$ 。

定義 正數的絕對值即是該正數；負數的絕對值是作為它的反數的正數；零的絕對值是零。

絕對值也叫作模。為了表示絕對值，在給定數的兩旁划垂直線。例如：

$$|2| = 2, \quad \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad |0| = 0, \quad |5-3| = |2| = 2.$$

在具体解釋中，一個數的絕對值表示含在一個量內的度量單位的數量，而沒有計及它的方向。

線段的長（不計算方向）是正的，而被用相應的數的絕對值來表示。

§ 3. 有理數大小的比較

在算術中研究的數有相互的順序關係：若 a 和 b 是兩個數，那麼在