华东师范大学
函授教材

# 代数学习指导书

华东师范大学数学系
代数教研組编

（第二册）

华东师范大学函授部

华东师范大学函授教材

# 代数学习指导書

华东师范大学数学系
代数教研組编

（第二册）

华东师范大学函授部

1959年

# 目　录

# 第三章　綫性規划

綫性規划是运筹学的一个分支．本章內容有：(1)一般綫性規划問題；(2)康脫洛維奇問題．

关于一般綫性規划問題方面，我們首先說明用怎样的数学形式表达的問題称为綫性規划問題，或者說，綫性規划問題的数学形式若何．其次举出了几个属于綫性規划問題的、有关于生产或生活問題的实例，帮助了解究竟那些实际問題是綫性規划問題，由此也看出綫性規划的广泛应用及它在国民經济上的重大意义．

康脫洛維奇問題是一种特殊的綫性規划問題，它的解法比較簡易，而这类問題在运輸上常要碰到．我們除了說明康脫洛維奇的数学形式并举出实例外，还着重地討論了它的解法．首先利用了綫性方程組理論及用叠代法求出所需要的解．在这种解法的基础上，然后进一步用表解法簡化計算手續，这对解决实际問題就更方便．最后講到的四点修改法及 $2l$ 点修改法，一般虽达不到問題的最优解，但方法容易掌握，計算迅速，因而有它的实际意义．

## §1．綫性規划問題的数学形式

本节首先介紹了綫性規划問題的一般数学形式，然后說明其他几种形式的問題可以归結到这种一般形式，因此只要研究这种形式的問題就够了．

1．綫性規划問題的一般数学形式．給出了一个含 $n$ 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的綫性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

及一个含 $n$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 的綫性函数

$$s=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n,$$

求满足此綫性方程組而使函数 $s$ 的值为最小的非負数解，这就是綫性規划問題的一般形式.

换句話說，如果

(i) 給出的綫性方程組有无限多个解，我們要考慮把其中 $x_1$, $x_2, \cdots\cdots, x_n$ 所取値为正数或零的这种解分别代到綫性函数 $s$ 的表达式中去所得出的 $s$ 的値若何，究竟那一个非負解代到 $s$ 的表达式中去所得出的 $s$ 的値为最小，这个解就是所要求的；

(ii) 給出的綫性方程組只有一个解，倘使在这个解中未知量 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 所取数値是正数或零，那末这个解也就是所討論的綫性規划問題要求的解；倘使在这个解中未知量的某个数値是負数，則所討論的綫性規划問題沒有所要求的解；

(iii) 給出的綫性方程組无解，則所討論的綫性規划問題也无解.

总之，我們所要求的是未知量 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 的一組数値，它有下面的性质：

1° 它满足給出的綫性方程組（因此是此綫性方程組的解）；

2° 这些数値是正数或零，不为負数；

3° 就給出的綫性方程組的所有解来說，以这个解代到綫性函数 $s$ 的表达式中去所得出的 $s$ 値为最小.

2. 綫性規划問題的限制条件、目标函数及最优解. 給出的綫性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \text{及条件 } x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\geqslant 0 \quad (1)$$

称为綫性規划問題的限制条件．綫性函数

$$s=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n \quad (2)$$

称为綫性規划問題的目标函数．如果有具备上面所說性質 1°,2°,3° 的解，則称它为綫性規划問題的最优解．

3．綫性規划問題的其他数学形式．

（i）有时候我們要討論滿足限制条件(1)而使目标函数的值为最大的解．此时我們只要把問題改变一下，求滿足限制条件(1)而又使綫性函数

$$s_1=c'_1x_1+c'_2x_2+\cdots\cdots+c'_nx_n$$

的值为最小的解，其中 $c'_i=-c_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$．因为 $s$ 与 $s_1$ 之間有如下关系：$s_1=-s$，于是 $s=-s_1$，当 $s_1$ 所取值为最小时，$s$ 所取值就最大．

（ii）在限制条件中有不等方程出現时，以講义上的例子来看，不等方程組

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3\leqslant 8, \\ 2x_1-x_2+3x_3\leqslant 9, \\ 2x_1+x_2-4x_3\geqslant 2, \end{cases} \quad x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \quad (3)$$

与綫性方程組

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=8 \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_5=9 \\ 2x_1+x_2-4x_3-x_6=2 \end{cases} \quad x_1,x_2,\cdots\cdots,x_6\geqslant 0 \quad (4)$$

的解之間有如下关系：

a．若 $x_1=u_1$，$x_2=u_2$，$x_3=u_3$，$u_1$，$u_2,u_3\geqslant 0$ 是(3)的一个解，那

就是說，下面的不等式成立：

$$\begin{cases} 3u_1+2u_2-u_3\leqslant 8, \\ 2u_1-u_2+3u_3\leqslant 9, \quad u_1, u_2, u_3\geqslant 0 \\ 2u_1+u_2-4u_3\geqslant 2, \end{cases} \tag{3'}$$

令 $8-(3u_1+2u_2-u_3)=u_4$, $9-(2u_1-u_2+3u_3)=u_5$,

$$(2u_1+u_2-4u_3)-2=u_6,$$

則 $u_4, u_5, u_6\geqslant 0$，且 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ 之間有如下关系：

$$\begin{cases} 3u_1+2u_2-u_3+u_4=8, \\ 2u_1-u_2+3u_3+u_5=9, \quad u_1, \cdots\cdots, u_6\geqslant 0 \\ 2u_1+u_2-4u_3-u_6=2, \end{cases} \tag{4'}$$

这就是說，$x_1=u_1$，$x_2=u_2$，$x_3=u_3$，$x_4=u_4$，$x_5=u_5$，$x_6=u_6$ 是綫性方程組(4)的一个非負解.

b. 反过来，若 $x_1=u_1$，$x_2=u_2$，$x_3=u_3$，$x_4=u_4$，$x_5=u_5$，$u_1$，$u_2$，$u_3\geqslant 0$ 是綫性方程組(4)的一个非負解，則等式(4′)成立，于是

$$\begin{cases} 3u_1+2u_2-u_3=8-u_4\leqslant 8, \\ 2u_1-u_2+3u_3=9-u_5\leqslant 9, \\ 2u_1+u_2-4u_3=2+u_6\geqslant 2 \end{cases}$$

即不等式組(3′)成立，$x_1=u_1$，$x_2=u_2$，$x_3=u_3$ 是不等方程(3)的一个解.

由 a, b 可知，根据綫性方程組(4)的所有非負解 $x_1=u_1$，……，$x_6=u_6$，可以得到不等方程組(3)的所有非負解 $x_1=u_1$，$x_2=u_2$，$x_3=u_3$，在此未知量 $x_1$，$x_2$ $x_3$，所取的値就是(4)的解中未知量 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 所取的値.

目标函数 $s=3x_1+2x_2-4x_3$ 不含变量 $x_4$，$x_5$，$x_6$，它所取的値只与变量 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 所取的値有关．在(4)的所有非負解中，若有一个解 $x_1=u_1$，$x_2=u_2$，$x_3=u_3$，$x_4=u_4$，$x_5=u_5$，$x_6=u_6$ 使目标函数所取値为最小，則在(3)的所有非負解中相应的解 $x_1=u_1$，$x_2=u_2$，$x_3=u_3$ 就是使 s 取最小値的解．因此我們只要求出滿足(4)而使目标函数取最小値的非負解，就可得出滿足(3)而使目标函数取最小値的解.

这样，我們就把有不等方程出現时的綫性規划問題归結到1中所說一般形式的問題．

(iii) 目标函数中有常数項出現的情况．若目标函数为 $s=25+3x_1+2x_2-4x_3$，我們只要考慮限制条件相同，而目标函数为 $s_1=3x_1+2x_2-4x_3$ 的綫性規划問題．因为把滿足限制条件的各个非負解分別代到 $s_1$ 的表达式中所得的各个值，分別加上25，就得出把滿足限制条件的各个非負解代到 $s$ 的表达式中所得的各个值，当某一个非負解使 $s_1$ 的值为最小时，那末这个非負解也就使 $s$ 所得的值为最小．

4．非綫性規划問題与綫性規划問題的区別，只是它的目标函数不是綫性函数，而是其他函数，对于非綫性規划問題目前还沒有什么研究．

思考題：

1．綫性規划問題的一般数学形式若何？

2．如何将本节所說的綫性規划問題的其他几种形式化到一般形式？

## §2．綫性規划問題

本节給出了几个关于綫性規划問題的实例，用以說明綫性規划在生产上的应用．前三个例子属于一般的綫性規划問題；第四个例子是一种特殊的綫性規划問題——康脫洛維奇問題，由此同时給出了这类問題的普遍数学形式．

1．关于前三个例子，根据給出的問題要列出式子来还是比較容易的．

首先要看所求的是什么，适当地設出未知量．例1中要解决的是另件如何分配的問題，我們設第 $i$ 台机床加工第 $j$ 种另件的个数为 $x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$．例2中間买食物甲、乙、丙、丁各多少，我們設各买 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$ 斤．例3中間种土豆、小麦、大豆、……各多少亩，我們設所种亩数各为 $x_1$，$x_2$，$x_3$，……．

然后根据已知条件及設出的未知量列出式子来．在例1中，要加工的三种另件的个数分别不能少于 $a_1$，$a_2$，$a_3$，各台机床在一星期内操作的时間分别不得超过 $H_1$，$H_2$ 小时，根据所設各台机床所加工的每种另件的个数 $x_{ij}$，以及已知的各台机台生产各种另件一个所需的时間 $h_{ij}$，就列出了講义上的五个不等式，添上 $x_{ij}$ 之値皆为非負，就得出了問題的限制条件．再根据已知的各台机床加工各种另件一个所需費用 $c_{ij}$，及設出的加工另件的个数 $x_{ij}$，就可把目标函数列出来了．在例2中，根据設出的購买各种食物的斤数，已知的每斤食物中維生素的含量，以及每人每日需要各种維生素的数量可以得出限制条件．再根据食物的購买量及每斤食物的价格可以列出目标函数．例3看起来似乎复杂一些，但是也是只要根据設出的种各类作物的亩数，已知的每亩作物所需土地、資金、劳动力的数字，以及社内所能供給的土地、資金、劳动力的数字列出限制条件．再根据設出的种各类作物的亩数及每亩收入列出目标函数．

应当指出的是，在工业生产或經济部門中所遇到的問題并不象上面所說几个例子这样簡单，往往需要我們很熟悉有关的业务，才能很好地考虑各項因素，把問題整理出一个头緒，用数学式子表示出来．

2．同样，我們可以得出例4中所說問題的数学形式．設从 $A_i$ 运到 $B_j$ 去的土方数为 $x_{ij}$．根据每一A地所能挖的土方数字、每一B地所需要的土方数字，可以列出限制条件来，那就是：

$$
(1)\quad \begin{cases}
x_{11}+x_{12}+\cdots\cdots+x_{1n}=b_1, & \text{(就 } A_1 \text{ 所要挖的土方来看)}\\
x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=b_2, & \text{(就 } A_2 \text{ 所要挖的土方来看)}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{m1}+x_{m2}+\cdots\cdots+x_{mn}=b_m, & \text{(就 } A_m \text{ 所要挖的土方来看)}\\
x_{11}+x_{21}+\cdots\cdots+x_{m1}=a_1, & \text{(就 } B_1 \text{ 所要填下的土方来看)}\\
x_{12}+x_{22}+\cdots\cdots+x_{m2}=a_2, & \text{(就 } B_2 \text{ 所要填下的土方来看)}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{1n}+x_{2n}+\cdots\cdots+x_{mn}=a_n, & \text{(就 } B_n \text{ 所要填下的土方来看)}\\
x_{11},x_{12},\cdots\cdots,x_{mn}\geqslant 0.
\end{cases}
$$

再根据設出的从 $A_i$ 运到 $B_j$ 的土方数 $x_{ij}$ 及已知的从 $A_i$ 到 $B_j$ 之距离 $c_{ij}$ 可以列出目标函数：

(2) $$s=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots\cdots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\cdots\cdots+c_{2n}x_{2n}+\cdots\cdots+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\cdots\cdots+c_{mn}x_{mn}.$$

这是一种特殊的綫性規划問題，就是所謂康脫洛維奇問題．

3．为了更好的掌握康脫洛維奇問題，我們再把它的要点加以說明．有一組 $m\times n$ 个未知量 $x_{11}$, $x_{12}$, ……, $x_{mn}$, 它們滿足如上的限制条件(1)，且目标函数是綫性函数(2)，則称它是康脫洛維奇問題．用表把它列出来就是：把这 $m\times n$ 个未知量排在矩形的表中，在第 $i$ 行($i=1,2,\cdots\cdots,m$)上各未知量之和是已知数 $a_i$，在第 $j$ 列($j=1,2,\cdots,n$)上各未知量之和是已知数 $a_j$(在此，$b_1+b_2+\cdots\cdots+b_m=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$)，同时 $x_{ij}\geqslant 0$，($i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$)，这就是限制条件．目标函数則为关于此 $m\times n$ 个变量的齐次綫性函数。

4．本节中用到求和符号"$\Sigma$"，这个符号的意义在講义第三章§1中有說明，請参閱．

講义中式子 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j=\sum\limits_{i=1}^{m}b_i$ 所表示的就是 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots\cdots+b_m$．前面所說限制条件(1)用求和記号表出即为：

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i & (i=1,\cdots\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=a_j & (j=1,\cdots\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

目标函数則为 $$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}.$$

## §3．康脫洛維奇問題解法

本节給出了康脫洛維奇問題的解法，并用一个实例加以說明．

1．在講到它的解法时，是根据下面几个步驟来說明的．

(i) 根据綫性方程組理論，求出一个消去系統．在这里我們所

討論的是含 $m\times n$ 个未知量 $x_{11}, x_{12}, \cdots\cdots, x_{mn}$ 的綫性方程組，方程的个数是 $m+n$，但最后一个方程可由前面的 $m+n-1$ 个方程推出来，因此可以去掉，我們把这 $m\times n$ 个未知量按 $x_{11}, x_{12}, \cdots\cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots\cdots, x_{2n}, \cdots\cdots, x_{m1}, x_{m2}, \cdots\cdots, x_{mn}$ 的次序排起来，前面的 $m+n-1$ 个方程系数矩陣就是講义上所說的矩陣．由于在第一个方程里，$x_{11}, x_{12}, \cdots\cdots, x_{1n}$ 的系数是1，其他系数是零，故在矩陣的第一行里，只有前 $n$ 个位置的元素是1，后面的元素都是零；在第二个方程里，$x_{21}, x_{22}, \cdots\cdots, x_{2n}$ 的系数是1，其他系数是零，故在矩陣的第二行里，在第 $n+1$ 个位置到第 $2n$ 个位置上的元素是1，其他位置上元素是零；同样可写出矩陣的第三行至第 $m$ 行的元素．在第 $m+1$ 个方程中，$x_{11}, x_{21}, \cdots\cdots, x_{m1}$ 的系数是1，其他的系数是零，故在矩陣的第 $m+1$ 行上，第1个位置，第 $n+1$ 个位置，……，第 $(m-1)n+1$ 个位置上元素是1，其他位置上元素是零，类似地可以写出矩陣的下面的行．在第 $m+n-1$ 个方程里，$x_{1n-1}, x_{2n-1}, \cdots\cdots, x_{mn-1}$ 的系数是1，其他系数是零，故在矩陣的第末行上第 $n-1$ 个位置，第 $n+(n-1)=2n-1$ 个位置，…，第 $(m-1)n+(n-1)=mn-1$ 个位置上元素是1，其他位置上元素是零．在这个矩陣中有一个 $m+n-1$ 阶行列式（按講义上所說的取法）主对角綫上元素都是1，主对角綫下边的元素都是零，

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{vmatrix}$$

这个行列式的値等于1，不是零，而矩陣中无更高阶子式，故矩陣之秩为 $m+n-1$，这 $m+n-1$ 个方程是独立的．我們可以根据某 $m+n-1$ 个未知量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 解出来(在此，我們把未知量另用符号 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$ 表出，$k=mn$)，这样就得出了一个消去系統．当未知量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 取定后，相应的消去系統唯一地确定．

当消去系統中出現的常数項 $N_1, N_2, \cdots\cdots, N_{n+m-1}$ 为非負时，则称此消去系統为可行消去系統．当独立未知量 $x_{j_1}, \cdots\cdots, x_{j_s}$ 的値都取作零时，得出的 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 之値就是 $N_1, N_2, \cdots\cdots, N_{n+m-1}$，它們皆为非負，因此得出了綫性方程組的一个非負解，我們称它是一个可行解．

在 $m\times n$ 个未知量中适当地取 $m+n-1$ 个来解綫性方程組，得出消去系統，根据未知量的不同选法消去系統的个数不能超过 $C_{mn}^{n+m-1}$，它是一个有限数．可行消去系統的个数至多只能与消去系統的个数相同，故亦为有限数．

(ii) 利用叠代法得出所要求的解．求出了一个可行消去系統后，将 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 的表达式代到 $s$ 中去，这样，这些变量就不在 $s$ 中出現，而 $s$ 只包含常数項及变量 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots\cdots, x_{j_s}$ 了：

$$S=M+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k x_{jk}.$$

(a) 若所有的 $\lambda_k$ 皆大于或等于零，则在所有的 $x_{jk}(k=1,\cdots,s)$ 皆取零値时，$s$ 的値 $s_1=M$，而在某些 $x_{jk}$ (或全部 $x_{jk}$)取大于零的数値时，则 $s$ 的値 $s_1'$ 将大于或等于 $M$．由此可知当 $x_{jk}$ 皆取零値时的可行解就是这問題的最优解，而 $s$ 的最小値就是 $M$．

(b) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_s$ 中有負数値，那就要进行叠代了．若 $\lambda_1<0$．对应于 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots\cdots, x_{j_s}$ 都取零値时的可行解，目标函数 $s$ 取的値是 $M$，而若 $x_{j_2}, x_{j_3}, \cdots\cdots, x_{j_s}$ 取零，$x_{j_1}$ 取某正値 $u_{j_1}$，则相应的 $s$ 的値为 $M+\lambda_1 u_{j_1}<M$．若在 $x_{j_1}$ 取 $u_{j_1}$，$x_{j_2}, \cdots\cdots, x_{j_s}$ 取零时，$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 的値皆为非負，则得到滿足限制条件的一个解，

使得 $s$ 的值較$M$为更小. $M$ 既非 $s$ 的最小值, $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots\cdots, x_{j_8}$ 取零时的可行解亦非最优解. 此时我們看了在所得可行消去系統中那些消去未知量的表达式中所含 $x_{j_1}$ 項的系数是負的. 設有 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots, x_{i_r}$. 若拿这些消去量的表达式中出現的常数項 $N_1$, $N_2, \cdots\cdots, N_r$ 来看, 設若 $N_1$ 为最小, 我們就以 $x_{i_1}$ 代替 $x_{j_1}$ 作为独立未知量, $x_{j_1}, x_{i_2}, \cdots\cdots, x_{i_{n+m-1}}$ 作为消去未知量求出相应的消去系統. 在下节中我們将証明在康氏問題的可行消去系統中, 各个独立未知量的系数是 $+1$ 或 $-1$, 利用这个結果, 我們可以知道所得新的消去系統有下面形式:

$$
\begin{cases}
x_{j_1}=N_1-x_{i_1}+\cdots\cdots,\\
x_{i_2}=N_2-x_{j_1}+\cdots\cdots=(N_2-N_1)+x_{i_1}+\cdots\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{i_r}=N_r-x_{j_1}+\cdots\cdots=(N_r-N_1)+x_{i_1}+\cdots\cdots,\\
x_{i_{r+1}}=N_{r+1}+x_{j_1}+\cdots\cdots=(N_{r+1}+N_1)+x_{i_1}+\cdots\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{i_{n+m-1}}=N_{n+m-1}+x_{j_1}+\cdots\cdots=(N_{n+m-1}+N_1)-x_{i_1}+\cdots\cdots,
\end{cases}
$$

常数項 $N_1, N_2-N_1, \cdots\cdots, N_r-N_1, N_{r+1}+N_1, \cdots\cdots, N_{n+m-1}+N_1$ 皆为非負, 故为一可行消去系統. 当 $x_{i_1}, x_{j_2}, \cdots\cdots, x_{j_8}$ 皆取作零时, 得可行解 $x_{j_1}=N_1$, $x_{i_2}=N_2-N_1, \cdots\cdots, x_{i_{n+m-1}}=N_{n+m-1}+N_1$. 要計算 $s$ 的值, 可以将这些数值代入原来給出的目标函数, 也可以把它代到前面得到的表达式 $s=M+\sum\limits_{k=1}^{8}\lambda_k x_{jk}$ 里去, 这样就容易看出 $s$ 的值为 $M+\lambda_1 N_1<M$ ($\because$ $\lambda_1<0$). 当我們把新的可行消去系統中消去变量的表达式代到原来給出的目标函数的表达式中去, 如果独立变量的系数全为非負, 則可知所得可行解是最优解; 如果某些独立变量的系数为負数, 則再进行叠代, 得出新的可行消去系統, 因为 $s$ 的值逐漸減小, 所以可知在叠代过程中每次出現的可行消去系統不同, 而可行消去系統只有有限个, 因此在有限次叠代后, 必然可得一可行消

去系統，代入目标函数中，独立变量的系数全为非負，于是相应的可行解就是最优解。

2. 講义上的例子就是根据上面所說的解法来进行的。給出了限制条件和目标函数。

（i）求出它的一个可行解(12)，代到目标函数中去，得到(13)。在(13)中 $x_{13}$，$x_{14}$，$x_{24}$ 的系数都是負的，而以 $x_{14}$ 的系数的絕对值为最大，我們把 $x_{14}$ 叠代掉，就是說，不把它当独立未知量了。

（ii）在(12)中，消去未知量 $x_{12}$，$x_{23}$，$x_{34}$ 的表达式中所含 $x_{14}$ 項的系数为負，它們的常数項是 10，15，35．$x_{12}$ 的表达式中的常数項最小，用 $x_{12}$ 来叠代 $x_{14}$，作为独立未知量。

从(12)的第二式解出 $x_{14}$，把它代到 $x_{22}$，$x_{22}$，$x_{33}$，$x_{34}$ 的表达式中，得到新的可行消去系統(14)．以(14)代入 $s$，得到(15)．其中 $x_{21}$，$x_{24}$，$x_{31}$ 的系数皆为負数，而以 $x_{21}$ 的系数的絕对值为最大，我們把 $x_{21}$ 叠代掉。

（iii）在(14)中，消去未知量 $x_{23}$，$x_{11}$，$x_{34}$ 的表达式中，含 $x_{21}$ 項的系数都是負数，而常数項分别为 5，15，25．因此我們用 $x_{23}$ 来叠代 $x_{21}$．从(14)的第二式解出 $x_{21}$，以它代到 $x_{14}$，$x_{11}$，$x_{33}$，$x_{34}$ 的表达式中去，得到可行消去系統(16)．把(16)代到 $s$ 的表达式中去，得到(17)．其中仍有独立未知量 $x_{32}$，$x_{31}$ 的系数是負数，还要进行叠代。我們将 $x_{32}$ 叠代掉。

（iv）在(16)中，消去未知量 $x_{12}$，$x_{11}$，$x_{34}$ 的表达式中所含 $x_{32}$ 項的系数都是負数，而以 $x_{11}$ 的常数項为最小．我們用 $x_{11}$ 来叠代 $x_{32}$．从(16)的第四式解出 $x_{32}$，代到 $x_{21}$，$x_{14}$，$x_{12}$，$x_{34}$ 的表达式中去，得到可行消去系統(18)．再把(18)代入 $s$，得到(19)．其中 $x_{24}$ 的系数为負数．我們把它叠代掉。

（v）在(18)中，消去未知量 $x_{22}$，$x_{34}$ 的表达式中所含 $x_{24}$ 項的系数都是負数，而常数項相同．我們就以 $x_{34}$ 来叠代 $x_{24}$．从(18)的最末一式解出 $x_{24}$，把它代到 $x_{32}$，$x_{22}$，$x_{34}$ 的表达式中去得到可行消去系統：

$$\begin{cases} x_{24}=10+x_{12}+x_{11}+x_{13}-x_{34}, \\ x_{32}=20+x_{23}-x_{31}+x_{13}-x_{34}, \\ x_{21}=15-x_{31}-x_{11}, \\ x_{14}=25-x_{13}-x_{12}-x_{11}, \\ x_{22}=-x_{23}+x_{31}-x_{12}-x_{13}+x_{34}, \\ x_{33}=30-x_{23}-x_{13}, \end{cases} \tag{20}$$

把它代到 $s$ 的代达式中去，得到

$$s=535+2x_{12}+2x_{13}+4x_{23}+x_{11}+x_{34}, \tag{21}$$

在(21)中，独立量的系数全为非負，故相应的可行解

$$x_{12}=x_{13}=x_{23}=x_{11}=x_{34}=x_{22}=x_{31}=0,$$

$$x_{14}=25,\ x_{21}=15,\ x_{24}=10,\ x_{32}=20,\ x_{33}=30$$

是最优解，$s$ 的最小值为 535．

思考題：

1．如何求出綫性規划問題的消去系統？

2．怎样利用叠代法求出綫性規划問題的最优解？

## §4．康氏問題的表解法

在本节中給出了利用表解求出綫性規划問題的第一个可行消去系統及可行解的方法；又根据圈路定理的研究結果利用表解来确定 $\lambda$ 的数值．如何进行叠代得出新的可行消去系統及新的可行解，經过若干次这种手續就得出所求的最优解．

1．求出第一个可行解．这里介紹了两个方法．

（i）西北角法．講义上所給出的第一个方法就是西北角法．由講义上給出的例子来看，先根据 $b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3, a_4$ 的数值作出下表（表1）．

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | 25 |
| $A_2$ | | | | | 25 |
| $A_3$ | | | | | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

表 1

我們考虑給未知量 $x_{11}$ 数值．由表上第一行末的常数 25 及第一列末的常数 15 可知，$x_{11}$ 所取数值不能超

过 15，否則 $x_{21}$ 或 $x_{31}$ 将取到負数值，得不到可行解．我們取它的最大可能值 15．把这个数值写在表内第一行、第一列上的方格中（見表 2）．

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | (15) | | | | 25 |
| $A_2$ | | | | | 25 |
| $A_3$ | | | | | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

表 2

在 $x_{11}$ 取数值 15 后，$x_{21}$，$x_{31}$ 的数值必須是零，因此在表上第二行第一列及第三行第一列的方格上写上零（見表 3）．

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | (15) | | | | 25 |
| $A_2$ | 0 | | | | 25 |
| $A_3$ | 0 | | | | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

表 3

然后考慮給未知量 $x_{12}$ 数值．由第一行末之常数 25 及 $x_{11}$ 已取的数值 15，第二列末之数字为 20，$x_{12}$ 的最大可能数值是 25－15＝10．予 $x_{12}$ 数值 10，写在表上第一行第二列的方格上．$x_{11}$ 取值 15，$x_{12}$ 取值 10，$x_{13}$，$x_{14}$ 就只能取零了，也把它們記在表上（見表 4）．

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | (15) | (10) | 0 | 0 | 25 |
| $A_2$ | 0 | | | | 25 |
| $A_3$ | 0 | | | | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

表 4

再考慮給第二行第二列位置上未知量 $x_{22}$ 以数值．由第二行末之常数，第二列末之常数，第二行上未知量已取数值，第二列上未知量已取数值，知 $x_{22}$ 的最大可能值是 20－10＝10，予它这个数值，写在表上．$x_{21}$、$x_{22}$，分别取了数值 10、10，第二列末之常数是 20，于是 $x_{32}$ 的数值就必須是零，在表上記出它（見表 5）．

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | (15) | (10) | 0 | 0 | 25 |
| $A_2$ | 0 | (10) | | | 25 |
| $A_3$ | 0 | 0 | | | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

表 5

$x_{23}$ 的最大可能值是 $min$（25－10，30）＝15（即25－10，30 二数中的較小的那一个）．$x_{23}$ 取数值 15．于是 $x_{24}$ 的数値必須是零（見表 6）．

$x_{33}$ 的最大可能数值是 $30-15=15$．$x_{33}$ 取数値 15（見表 7）．

最后 $x_{34}$ 的必須取值 35（見表 8）．

这样我們就得出了一个可行解：

$$x_{13}=x_{14}=x_{21}=x_{24}=x_{31}=x_{32}=0,$$

$$x_{11}=15, x_{12}=10, x_{22}=10,$$

$$x_{23}=15, x_{33}=15, x_{34}=35.$$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | (15) | (10) | 0 | 0 | 25 |
| $A_2$ | 0 | (10) | (15) | 0 | 25 |
| $A_3$ | 0 | 0 | | | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

表 6

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | (15) | (10) | 0 | 0 | 25 |
| $A_2$ | 0 | (10) | (15) | 0 | 25 |
| $A_3$ | 0 | 0 | (15) | | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

表 7

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | (15) | (10) | 0 | 0 | 25 |
| $A_2$ | 0 | (10) | (15) | 0 | 25 |
| $A_3$ | 0 | 0 | (15) | (35) | 50 |
| | 15 | 20 | 30 | 35 | |

表 8

由此还可以写出相应的可行消去系統．在此，独立未知量是 $x_{13}$，$x_{14}$，$x_{21}$，$x_{24}$，$x_{31}$，$x_{32}$．消去未知量是 $x_{11}$，$x_{12}$，$x_{22}$，$x_{23}$，$x_{33}$，$x_{34}$．要写出此消去系統，我們仍从西北角（左上角）上的未知量开始．表 8 的第一列上除了消去未知量 $x_{11}$ 外，其他都是独立未知量，我們就根据对应于此列的方程 $x_{11}+x_{21}+x_{31}=15$ 解出未知量 $x_{11}$，得到

$$x_{11}=15-x_{21}-x_{31}. \qquad (1)$$

再来看与 $x_{11}$ 相邻的消去未知量 $x_{12}$．表 8 的第一行上，除了 $x_{12}$ 外，还有已得到它的表达式的消去未知量 $x_{11}$，独立未知量 $x_{13}$，$x_{14}$．根据对应于此行的方程 $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=25$，解出 $x_{12}$，再将 $x_{11}$ 的表达式代入，得到：

$$\begin{aligned} x_{12}&=25-x_{11}-x_{13}-x_{14}\\ &=25-(15-x_{21}-x_{31})-x_{13}-x_{14}\\ &=10=10+x_{21}+x_{31}-x_{13}-x_{14}. \end{aligned} \qquad (2)$$

再考慮与 $x_{12}$ 相邻的消去未知量 $x_{22}$．表 8 的第二列上除 $x_{22}$ 外，还有