

中等专业学校教学参考书

工科专业通用

三角

周桐孙 王延馨编

人民教育出版社

中等专业学校教学参考书

工科专业通用

三 角

周桐孙 王延馨编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

北 京 印 刷 一 厂 印 装

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号 13012·0315 开本 787×1092 1/32 印张 7 14/16

字数 176,000 印数 1,965,001—2,465,000 定价(3) ¥0.55

1960年7月第1版 1964年8月第3版

1979年4月北京第20次印刷

緒言	1
第一章 銳角三角函数, 直角三角形的解法	3
§ 1-1 銳角三角函数的概念	3
§ 1-2 同一銳角的三角函数間的关系	12
§ 1-3 角由 0° 变化到 90° 时三角函数值的增减情况	17
§ 1-4 三角函数表	19
§ 1-5 直角三角形的解法及其应用	23
第二章 角的概念的推广, 角的量法	35
§ 2-1 任意大小的角和弧	35
§ 2-2 角和弧的度量方法	38
§ 2-3 角(或弧)的度与弧的换算	40
§ 2-4 圆弧长	45
第三章 任意角的三角函数	50
§ 3-1 任意角三角函数的定义	50
§ 3-2 三角函数的符号	55
§ 3-3 三角函数在单位圆上的表示法	59
§ 3-4 三角函数的周期性	66
§ 3-5 $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 角的三角函数值	70
§ 3-6 三角函数的递增和递减	74
§ 3-7 三角函数的基本恒等式	79
§ 3-8 根据角的一个三角函数計算其余各三角函数	83
第四章 任意角三角函数的简化公式, 三角函数的 图象	91
§ 4-1 負角的三角函数简化公式	91
§ 4-2 角的形式为 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 的三角函数简化公式	95

§ 4-3	角的形式为 $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$ 的三角函数简化公式	99
§ 4-4	三角函数的图象	103
第五章	斜三角形的解法	123
§ 5-1	正弦定理	124
§ 5-2	余弦定理	129
§ 5-3	三角形的面积	137
§ 5-4	三角函数对数表	142
§ 5-5	利用对数解三角形的例子	147
第六章	加法定理及其推论, 正弦型曲线	160
§ 6-1	正弦和余弦的加法定理	160
§ 6-2	正切的加法定理	163
§ 6-3	二倍角的正弦、余弦和正切	172
§ 6-4	半角的正弦、余弦和正切	180
§ 6-5	三角函数的和差化积与积化和差	187
§ 6-6	正弦型曲线	197
第七章	反三角函数, 三角方程	210
§ 7-1	反三角函数的概念及其运算	210
§ 7-2	最简单的三角方程	228
§ 7-3	解三角方程的例子	237
附录	三角公式一覽	248
	希腊字母表	250

緒 言

三角学是数学的一个分科，它的内容可分为两部分，第一部分是关于三角函数性质的研究，第二部分是三角形解法的研究。这门学科在科学技术上很重要，例如在天文学、测量学、物理学、机械学等方面都有广泛的应用，而且三角函数又是研究高等数学所不可缺少的基础知识。

三角学和其他学科一样，是在解决实际问题的过程中，由人类的实践成长起来的。在古代的生产实践中，由于农业上的需要（编著正确的历书）以及航海上的需要（根据天体的位置来确定船只航行的方向）引起了天文学的产生和发展，而三角形的测量是研究天文学所不可缺少的工具。因此，三角学的最初阶段，是随着天文学而发展起来的。

整个三角课程的内容在十八世纪初就奠定了基础。到十八世纪后半叶，瑞士科学家尤拉（1707—1783），把三角函数看作线段的比，采取了近代形式的叙述，使三角学在理论上和实际应用方面前进了一大步。

我国古代的天文学很发达，很早就有了测量方面的知识，在公元前一世纪左右的数学书“周髀算经”里，载有陈子应用相似三角形比例的关系测量太阳的高、远，星宿的行度等问题。

公元三世纪我国数学家刘徽计算以一为半径的圆内接正六边形、正十二边形等的边长，以及公元十三世纪赵友钦计算

圓內接正四邊形等的邊長，實際上已經求得了某些特殊角的正弦的值。

我國古代歷法中，計算由於節令不同而引起竿的影長不同，實際上已經構成了一個余切函數表。

現在我們所用的三角函數的名稱正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，還都是十六世紀我國已有的名稱，那時再添上正矢、余矢兩個函數，總稱八綫。

十七世紀後半葉，我國數學家梅文鼎編了一本平面三角學和一本球面三角學，十八世紀以後，我國還出版了不少三角學方面的書籍。

由此可見，我國古代很早就用類似三角學的方法解決有關測量的問題，並且出現了不少杰出的數學家，但由於几千年的封建統治，和近一百多年帝國主義的侵略，因而我國的經濟和科學文化受到了影響，在這門科學上也未能取得更大的成就。

第一章 銳角三角函数, 直角三角形的解法

在平面几何中, 我們已經学习过銳角三角函数, 并且应用它解决了一些有关测量和計算中的問題。因为这些知識, 在学习物理和某些专业課时, 經常用到, 所以在这一章里, 有必要把銳角三角函数和直角三角形的解法, 进一步加以研究。

§ 1-1 銳角三角函数的概念

1. 銳角三角函数的定义

在初中, 我們学了銳角三角函数的定义, 就是設 α 是任意銳角, 并使这个角的頂点和直角坐标系的原点 O 重合, 角的始边和 Ox 軸的正半軸重合(图 1-1), 在角的終边上任意取一点 $M(x, y)$ 并設 $OM = r$, 便得銳角 α 的三角函数的定义如下:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad (4)$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}, \quad (5)$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y}. \quad (6)$$

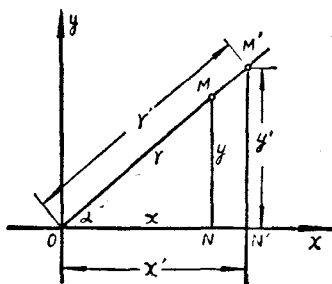


图 1-1

上面的六个比值, 随着角 α 的确定而确定, 与在終边上所取点 M 的位置无关. 因为, 如果我們在銳角 α 的終边上再任意取一点 $M'(x', y')$, 并設 $OM' = r'$ (图 1-1), 从 M 点和 M' 点分别作 Ox 軸的垂綫 MN 和 $M'N'$; 那么 $\triangle ON'M' \sim \triangle ONM$, 所以

$$\frac{y'}{r'} = \frac{y}{r}, \quad \frac{x'}{r'} = \frac{x}{r}, \quad \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x},$$

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}, \quad \frac{r'}{x'} = \frac{r}{x}, \quad \frac{r'}{y'} = \frac{r}{y}.$$

这就是說, 对于每一个給定的角 α , 不論点 M 在角 α 的終边上的位置怎样 (不与頂点重合), 上面的六个比, 都各有一个确定的值和它对应. 所以它們都是角 α 的函数, 也就是 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\operatorname{tg} \alpha$ 、 $\operatorname{ctg} \alpha$ 、 $\sec \alpha$ 和 $\csc \alpha$ 都是角 α 的函数; 角 α 叫做自变量, $\sin \alpha$ 叫做角 α 的正弦函数 (简称正弦), $\cos \alpha$ 叫做角 α 的余弦函数 (简称余弦), $\operatorname{tg} \alpha$ 叫做角 α 的正切函数 (简称正切), $\operatorname{ctg} \alpha$ 叫做角 α 的余切函数 (简称余切), $\sec \alpha$ 叫做角 α 的正割函数 (简称正割), $\csc \alpha$ 叫做角 α 的余割函数 (简称余割). 这些函数統称为銳角 α 的三角函数.

因为角 α 是銳角, 它的終边上任意一点 M 在第 I 象限內, 所以点 M 的横坐标 x 和纵坐标 y 都是正的, 由于我們規定从原点到点 M 的距离 r 也是正数, 因此可知, 銳角 α 的六个三角函数值都是正的.

例 1. 用直接度量法, 求 48° 角的六个三角函数值.

解: 在直角坐标系中, 以原点 O 为頂点, Ox 軸的正半軸为始边, 用量角器作出一个 48° 角, 在它的終边上取一点 A , 使 $OA = 100$ 毫米 (图 1-2), 設 A 点的坐标为 (x, y) , 可以量得

$x=67$ 毫米, $y=74$ 毫米.

因此得 48° 角的六个三角函数的近似值如下:

$$\sin 48^\circ = \frac{74}{100} = 0.74,$$

$$\cos 48^\circ = \frac{67}{100} = 0.67,$$

$$\operatorname{tg} 48^\circ = \frac{74}{67} = 1.1,$$

$$\operatorname{ctg} 48^\circ = \frac{67}{74} = 0.91,$$

$$\sec 48^\circ = \frac{100}{67} = 1.5,$$

$$\csc 48^\circ = \frac{100}{74} = 1.4.$$

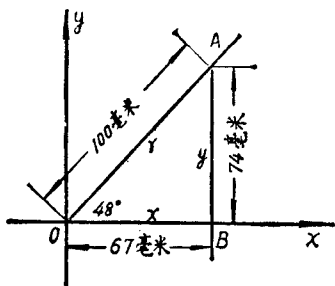


图 1-2

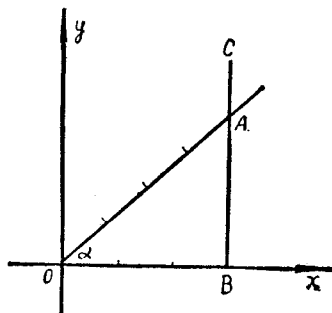


图 1-3

例 2. 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, 求作銳角 α .

解: 作直角坐标系 xOy , 并在 Ox 軸的正半軸上截取綫段 $OB=3$ 个单位长(图 1-3).

过 B 点作 $BC \perp OB$. 以 O 点为圆心, 4 个单位长为半径画弧交 BC 于 A 点, 連結 OA , 得 $\angle AOB = \alpha$.

因为 $\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{4}$, 所以角 α 就是所求的銳角. 用量角器量出它的近似值为 41° .

从图 1-1 中, 还可以看出, 綫段 r , x 和 y 組成一个含有銳角 α 的直角三角形, 而 r 是直角三角形的斜边, x 和 y 是两条直角边, 其中 x 是角 α 的邻边, y 是角 α 的对边. 所以公式 (1)——(6) 又可以写成:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}, \quad (1')$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}, \quad (2')$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}, \quad (3')$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}}, \quad (4')$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}, \quad (5')$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}}. \quad (6')$$

公式 (1')——(6') 建立了直角三角形每两边的比与銳角之間的函数关系, 它們在实际应用上很重要, 我們必須熟記. 本章着重研究 (1')——(4') 四个三角函数, (5') 和 (6') 两个三角函数, 将在第三章里討論它.

2. 互余兩角三角函數間的關係

我們知道，在 $\triangle ABC$ 中，
三個角 A 、 B 、 C 的對邊的長
分別用 a 、 b 、 c 來表示。在直
角三角形中，還用 C 表示直
角。根據這種規定，在圖1-4
的直角三角形中，就有 B

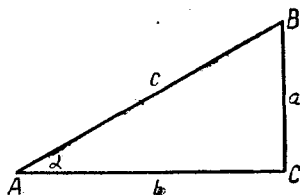


圖 1-4

$= 90^\circ - A$ ，即角 A 和角 B 互為余角，由銳角三角函數定義就
得出 A 、 B 兩角的三角函數之間有下面的關係：

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B = \cos(90^\circ - A),$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B = \sin(90^\circ - A),$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg}(90^\circ - A),$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B = \operatorname{tg}(90^\circ - A).$$

即互為余角的两角中，任一角的正弦等於另一角的余弦，任一
角的正切等於另一角的余切。例如：

$$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ,$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ,$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 60^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ,$$

$$\operatorname{ctg} 18^\circ = \operatorname{tg} 72^\circ.$$

例 3. 把下面各三角函數化成小於 45° 角的三角函數：

(1) $\sin 80^\circ 10'$, (2) $\cos 47^\circ$,

(3) $\operatorname{tg} 70^\circ 4'$, (4) $\operatorname{ctg} 62^\circ 30'$.

解: (1) $\sin 80^{\circ}10' = \cos 9^{\circ}50'$,

(2) $\cos 47^{\circ} = \sin 43^{\circ}$,

(3) $\operatorname{tg} 70^{\circ}4' = \operatorname{ctg} 19^{\circ}56'$,

(4) $\operatorname{ctg} 62^{\circ}30' = \operatorname{tg} 27^{\circ}30'$.

例 4. 化簡: $\sin(60^{\circ} + \alpha) - \cos(30^{\circ} - \alpha)$.

解: 因为 $90^{\circ} - (60^{\circ} + \alpha) = 30^{\circ} - \alpha$, 根据互余两角三角函数間的关系, 得

$$\cos(30^{\circ} - \alpha) = \sin(60^{\circ} + \alpha),$$

所以 $\sin(60^{\circ} + \alpha) - \cos(30^{\circ} - \alpha)$

$$= \sin(60^{\circ} + \alpha) - \sin(60^{\circ} + \alpha) = 0.$$

3. 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值

我們还可以利用銳角三角函数的定义, 求出 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值.

作出分別含有 30° 和 45° 角的直角三角形 (图 1-5 和图 1-6).

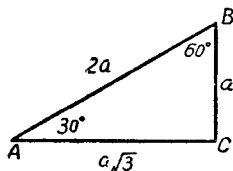


图 1-5

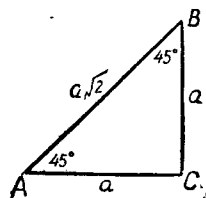


图 1-6

由图 1-5, 設 $BC = a$, 則 $AB = 2a$,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

由此可得 $\sin 30^{\circ} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

因为 60° 和 30° 互为余角, 所以

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由图 1-6, 設 $BC=a$, 則 $AC=a$,

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

由此可得 $\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

为了便于记忆, 将以上特殊角 30° 、 45° 、 60° 的三角函数值列表如下:

角 α 函 数 值	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

例 5. 计算 $5 \operatorname{ctg} 30^\circ + 2 \sin 60^\circ - 2 \cos 60^\circ$.

解: $\because \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$

$$\begin{aligned}
 \therefore 5 \operatorname{ctg} 30^\circ + 2 \sin 60^\circ - 2 \cos 60^\circ \\
 &= 5 \times \sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} \\
 &= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 6\sqrt{3} - 1 \\
 &= 6 \times 1.732 - 1 = 9.392.
 \end{aligned}$$

例 6. 计算 $\cos^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ$.

这里 $\cos^2 30^\circ = (\cos 30^\circ)^2$, $\sin^2 45^\circ = (\sin 45^\circ)^2$, 以后三角函数的幂指数都采取这种形式表示.

解: $\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$$\begin{aligned}
 \therefore \cos^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

复习問題

1. 銳角三角函數的定義是什麼？為什麼我們說它們是角 α 的函數？同一銳角的正弦和余割、余弦和正割、正切和余切之間有什麼關係？

2. 互余兩角的三角函數之間有什麼關係？

3. 已知直角三角形的三邊為：

$$(1) a=5, b=12, c=13; \quad (2) a=9, b=40, c=41;$$

說出角 A 和角 B 的六個三角函數值。

4. $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的三角函數值是怎样導出的？

習 題 一

1. 用直接度量法求 35° 角的六個三角函數值。

2. 由下列已知銳角 α 的三角函數值，求作角 α ，并用量角器量出角 α 的近似值（準確到 1° ）：

$$(1) \cos \alpha = \frac{2}{5},$$

$$(2) \operatorname{tg} \alpha = 0.75.$$

3. 在直角三角形 ABC 中，

(1) 已知： $A=30^\circ, a=3$ ，求 30° 和 60° 角的三角函數值；

(2) 已知： $A=45^\circ, a=2m$ ，求 45° 角的三角函數值。

4. 求下列各式的值：

$$(1) 2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ; \quad \text{答: } 3.5$$

$$(2) 3\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ + 2\cos 60^\circ; \quad \text{答: } \sqrt{3}$$

$$(3) \frac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}; \quad \text{答: } 2 - \sqrt{3}$$

$$(4) \sin^2 60^\circ + \sin^2 45^\circ. \quad \text{答: } 1.25$$

5. 把下列各三角函數化成小於 45° 角的三角函數：

$$(1) \sin 72^\circ 15'; \quad (2) \cos 64^\circ 46';$$

$$(3) \operatorname{tg} 58^\circ 28'; \quad (4) \operatorname{ctg} 49^\circ 42'.$$

6. 把 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ 写成两个銳角的正弦的差, 再写成两个銳角的余弦的差.

7. 把 $1 + \sqrt{3}$ 写成两个銳角的正切的和, 再写成两个銳角的余切的和.

§ 1-2 同一銳角的三角函数間的关系

取任意銳角 α , 作出直角三角形 ABC , 使 $A = \alpha$ (图 1-7).

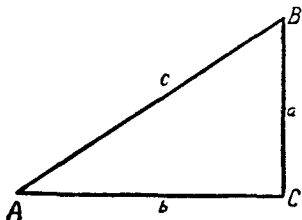


图 1-7

1. 根据勾股定理, 得

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

用 c^2 除等式的两边得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

$$\text{由于 } \frac{a}{c} = \sin \alpha, \frac{b}{c} = \cos \alpha,$$

因此得

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(I)

即一銳角的正弦和余弦的平方和等于 1.

$$2. \text{ 由 } \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \text{ 和 } \sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

可得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

(II)

即一銳角的正切等于它的正弦和余弦的比.

$$3. \text{ 由 } \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} \text{ 和 } \sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a},$$

可得

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{III})$$

即一銳角的余切等于它的余弦和正弦的比。

$$4. \text{ 由 } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \text{ 和 } \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a},$$

可得

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (\text{IV})$$

即一銳角的正切和它的余切互为倒数。

上面的四个公式表示了同一銳角的三角函数間的关系，它們对于任何銳角都能成立。我們可以利用这些公式由已知銳角的一个三角函数值，計算这个角的其他三角函数值。也可以利用它們化簡含有三角函数的式子或证明三角恒等式。

例 1. 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，求角 α 的余弦、正切和余切的值。

解：从公式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，可得

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

由于角 α 是銳角，所以根号前面取正号。

把 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 代入，得

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25-16}{5^2}} = \sqrt{\frac{3^2}{5^2}} = \frac{3}{5}.$$

根据公式 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，可得