华夏英才基金学术文库

鲁世杰　陆芳言
李鹏同　董　浙　著

非自伴算子代数

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书主要讨论Hilbert空间上的非自伴算子代数，包括套代数、三角代数、交换子空间格(CSL)代数、JSL代数和自反代数等等. 全书分为八章. 第一章是基本概念和后面各章要用到的预备知识；第二章讨论套代数、CSL代数、三角代数中有限秩算子的可分解性；第三章讨论套代数中的各类理想以及自反算子代数的弱闭自反模；第四章讨论算子代数上的代数同构的空间实现性；第五章讨论套代数和三角代数的几何结构；第六章讨论完全分配格的分类；第七章研究算子代数上的保持映射；第八章研究JSL代数上的导子和初等算子.

本书可作为大学基础数学研究生教材，也可供大学数学教师、数学研究工作者和数学系高年级学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

非自伴算子代数／鲁世杰等著. —北京：科学出版社，2004. 9

(华夏英才基金学术文库)

ISBN 7-03-013934-8

Ⅰ.非… Ⅱ.鲁… Ⅲ.非自伴算子-算子代数-研究 Ⅳ.O177.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第081000号

责任编辑：吕 虹／责任校对：李奕萱

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004年9月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2004年9月第一次印刷　印张：12 3/4

印数：1—3 000　字数：239 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

R.V.Kadison 和 I.M.Singer 于 1960 年发表的 “Triangular operator algebras” 和 J.R.Ringrose 于 1965, 1966 年发表的 “On some algebras of operators Ⅰ, Ⅱ”, 开创了非自伴算子代数的研究. 相对于自伴算子代数, 非自伴算子代数更年青, 数学现象更丰富, 方法也更多样, 并且与其他数学分支也有各种紧密的联系, 因此很快成为算子代数的一个重要分支, 吸引了一大批数学家投身其中. K.R.Davidson 的专著 “Nest Algebras” (1988 年) 系统地总结了前 20 年的研究成果, 提出了许多新的问题, 极大地推动了套代数, 进而也推动了非自伴算子代数的研究. 作者近 10 年来一直致力于套代数、三角代数、交换子空间格代数、完全分配格代数、 JSL 代数和自反代数的研究. 我们的讨论班除了研读著名学者的专著和论文以外, 更多地成为博士生报告自己的工作, 提出问题, 展开讨论的场所. 在这样的氛围中, 我们得到了一批比较好的结果. 这本专著就是这些成果的一个系统总结, 以期和感兴趣的读者进行交流, 达到推动该领域研究的目的.

本书分为八章. 第一章给出非自伴算子代数的基本概念以及以后七章都需要的预备知识. 我们还给出了一些具体例子, 以帮助读者理解各种非自伴代数间的关系. 第二章着重讨论有限秩算子的可分解性, 将用我们提出的相关系数、相关矩阵、非零正合分解等概念, 用全然不同于前人的办法来讨论这个问题. 第三章将讨论套代数中的各种理想和模, 它们的扰动和闭包. 特别地, 我们用零化子来刻画自反代数自反模的最小序同态. 第四章讨论套代数、三角代数和 JSL 代数上的代数同构的空间实现性以及 Jordan 同构的刻画. 我们在去掉传统的 “保对角条件” 后, 证明了次强可约极大三角代数的同构是空间实现的. 第五章讨论算子代数的几何结构, 主要是对三角代数上的等距映射和弱闭套代数模中单位球端点的刻画, 并且把 Russo-Dye 定理推广到弱闭套代数模的情形. 第六章讨论了自反代数的交换子, 并使用可比元的概念对完全分配格进行了分类, 使套和原子 Boolean 格分别位于这个分类的两个端点. 第七章讨论了 $\mathcal{B}(X)$ 、套代数和 JSL 代数上的各种保持映射, 如 Jordan 映射、可乘映射、保可逆线性映射等. 第八章研究了 JSL 代数上的导子和初等算子. 在每一章的最后都有一节注, 简单回顾了本章所研究的问题的历史以及所讲述的内容的来源.

本书中的定理、引理等均按字典序排列, 如定理 2.3.3 表示第二章第三节第三个定理, §4.3 表示第四章第三节.

我们假设读者已熟知泛函分析和算子理论的基本知识, 而对本书用到的算子代数的基本知识则在第一章中介绍, 并力求自给自足. 相对于 “Nest Algebras”, 本书的兴趣只集中在若干方面, 并力求在这些方面有新的贡献.

本书所基于的研究工作受到国家自然科学基金和浙江省自然科学基金的资助,

本书的出版得到华夏英才基金的资助，本书的写作受到浙江大学城市学院科研基金的支持和现代教育中心的技术支持，在此一并表示衷心的感谢. 书中所涉及到的研究工作有些始于 1992 年鲁世杰在美国伯克莱大学、得克萨斯农业机械化大学和北卡州夏洛特大学的访问期间，在此谨向支持或与鲁世杰合作的 W. Arveson, D. R. Larson 和 X. Dai 教授表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，书中不当之处在所难免，敬请专家和读者批评指正.

作　者

2004 年 3 月于杭州

目　　录

第一章 非自伴算子代数的基本概念

本章将简要地介绍 Banach 空间及其对偶空间的基本概念和联系两个空间的几个著名结果. 还将介绍 Hilbert 空间及其算子空间中的几种主要拓扑, 最后介绍非自伴算子代数的基本概念以及本书将着重讨论的几种非自伴算子代数的基本概念.

作为全书的出发点, 本章将介绍一些以后各章都要用到的算子代数的基本概念. 第一节介绍 Banach 空间及其对偶空间, 在此基础上介绍零化子和预零化子. 第二节介绍 Hilbert 空间及 $\mathcal{B}(H)$ 上的拓扑, 以及 $\mathcal{B}(H)$ 与紧算子、迹类算子空间的对偶关系. 第三节介绍作为本书重点讨论对象的几个非自伴算子代数, 如套代数, CSL 代数, 原子 Boolean 格代数, 完全分配格代数, JSL 代数, 三角代数等等.

§1.1 Banach 空间及其对偶空间

本书中的线性空间通常是指复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 赋范空间 X 是一线性空间且在 X 上定义了一个非负函数 $\|\cdot\|: X\to[0,+\infty)$, 对任意 $x,y\in X,\alpha\in\mathbb{C}$ 满足:

(1) $\| x+y \|\leq\| x \| + \| y \|$,

(2) $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$,

(3) $\| x \| = 0$ 当且仅当 $x=0$.

具有以上性质的函数称为范数. 进一步, 如果 X 按度量 $d(x,y)=\| x-y \|$ 完备, 则称 X 是一个 Banach 空间. 记

$$X_r=\{x\in X:\| x \|< r\},$$

$$\overline{X_r}=\{x\in X:\| x \|\leq r\},$$

分别称为 X 中以零向量为心、 r 为半径的开球和闭球. 特别地, 当 $r=1$ 时分别称为开、闭单位球.

设 X,Y 为赋范空间, 线性算子 $T:X\to Y$, 定义

$$\| T \| = \sup\{\| T(x) \|: \| x \|\leq 1\},$$

称为 T 的范数. 如果 $\| T \|<\infty$, 则称 T 是有界的. 我们用 $\mathrm{ran}T$ 表示 T 的值域, 用 $\ker T$ 表示 T 的核. $\mathcal{B}(X,Y)$ 表示有界线性算子 $T:X\to Y$ 全体构成的线性空间. $\mathcal{F}(X,Y)$ 为有限秩线性算子构成的子空间. $X^*=\mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ 称为 X 的对偶空间, X^* 中的元素称为有界线性泛函. 若 Y 是 Banach 空间, 则对任意赋范空间 X,$\mathcal{B}(X,Y)$ 也是 Banach 空间. 这样任意赋范空间 X 的对偶空间 X^* 都为 Banach 空间. 若线

性算子 $T: X \to Y$ 满足 $T(X_{\|\cdot\|\leq 1})$ 的范数闭包在 Y 中范数紧，则称 T 为紧的. 记 $\mathcal{K}(X,Y)$ 为全体紧的有界线性算子 $T: X \to Y$ 构成的线性空间. 我们有

$$\mathcal{B}(X,Y) \supseteq \mathcal{K}(X,Y) \supseteq \mathcal{F}(X,Y),$$

$\mathcal{K}(X,Y)$ 在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中范数闭，且如果 Y 是 Hilbert 空间(定义见 §1.2)，则 $\mathcal{K}(X,Y)$ 是 $\mathcal{F}(X,Y)$ 的范数闭包. 若 $X = Y$，　记 $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X,X)$ 和 $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,X)$.

线性算子 $T: X \to Y$ 称为压缩 (或等距) 算子，如果 $\| T \| \leq 1$ （或 $\| T(x) \| \leq \| x \|, \forall x \in X$). 每个有界线性算子 $T: X \to Y$ 都决定一对偶线性算子 $T^*: Y^* \to X^*, T^*(f)(x) = f(T(x))$. 由 Hahn-Banach 定理，$\| T^* \| = \| T \|$.

设 L 为赋范空间 X 的闭子空间，在商线性空间 X/L 上可定义商范数

$$\| x + L \| = \inf\{\| x + l \|: \ \forall l \in L\}.$$

若 X 是 Banach 空间，X/L 也为 Banach 空间. 设 X, Y 为赋范空间，有界线性算子 $T: X \to Y$ 且 $L = \ker T$, 则诱导线性算子 $\tilde{T}: x + L \to T(x)$ 满足 $\| \tilde{T} \| = \| T \|$, 且 $\tilde{T}$ 为 $X/L \to Y$ 上的单射.

设 L 为赋范空间 X 的一个子集，L 在 X^* 中的零化子定义为

$$L^{\perp} = \{f \in X^*: f(x) = 0, \forall x \in L\};$$

类似地，若 M 为 X^* 的一个子集，M 在 X 中的预零化子定义为

$$M_{\perp} = \{x \in X: f(x) = 0, \forall f \in M\}.$$

设 X 为赋范空间，$\{x_\alpha\} \subseteq X$, 若存在 $x \in X$ 使得对任意 $f \in X^*$ 有

$$f(x_\alpha) \to f(x),$$

则称 $\{x_\alpha\}$ 按弱拓扑收敛于 x, 记为 $x_\alpha \xrightarrow{w} x$. 对偶地，设 $\{f_\alpha\} \subseteq X^*$, 若存在 $f \in X^*$ 使得对任意 $x \in X$ 有

$$f_\alpha(x) \to f(x),$$

则称 $\{f_\alpha\}$ 按弱 * 拓扑收敛于 f, 记为 $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$. 以上二种拓扑分别记为 $\sigma(X, X^*)$, $\sigma(X^*, X)$.

设 L 为 X 的子集，称为 L 弱闭的，如果 $\{x_\alpha\} \subseteq L, x_\alpha \xrightarrow{w} x$ 蕴含 $x \in L$. 类似地可以定义 X^* 中子集的 w^* 闭性. 一般我们用 $\overline{L}^t$ 或 $[L]^t$ 表示 L 按 t 拓扑的闭包. 在没有异意的情况下，$\overline{L}$ 或 $[L]$ 表示 L 的范数闭包，L 闭指按范数拓扑闭.

下面的命题是 Banach 空间中几个常用的著名结果.

命题 1.1.1 设 X,Y 为 Banach 空间.

(1) 双极 (bipolar) 定理：设 L 为 X 的范数闭子空间， M 为 X^* 的弱 * 闭子空间，则 $L=(L^{\perp})_{\perp}$ 且 $M=(M_{\perp})^{\perp}$；

(2) 设 L 为 X 的范数闭子空间，则 $(X/L)^*=L^{\perp}$ 且 $X^*/L^{\perp}=L^*$;

(3) 线性算子 $T:Y^*\to X^*$ 是弱 * 连续当且仅当 $T\,|_{Y^*_{\|\cdot\|\le 1}}$ 是弱 * 连续. 此时存在有界线形算子 $S:X\to Y$ 使得 $T=S^*$;

(4) 设 M 为 X^* 的闭子空间，则 M 是弱 * 闭当且仅当 $M_{\|\cdot\|\le 1}$ 是弱 * 闭;

(5) 设 L 为 X 的凸子集，则 L 范数闭当且仅当 L 是弱闭,

(6) Krein-Milman 定理：设 L 为 X 的非空凸紧集，则 L 的端点集 $\mathrm{ext}(L)\neq\emptyset$ 且 $\overline{\mathrm{co}}\mathrm{ext}(L)=L$, 其中 $\overline{\mathrm{co}}\mathrm{ext}(\cdot)$ 表示端点集的凸闭包.

§1.2 Hilbert 空间及 $\mathcal{B}(H)$ 上的拓扑

内积空间 H 是一线性空间，且定义了一个二元函数 $(\cdot,\cdot):H\times H\to\mathbb{C}$ 满足：

(1) $(\lambda x_1+\mu x_2,y)=\lambda(x_1,y)+\mu(x_2,y)$;

(2) $\overline{(x,y)}=(y,x)$;

(3) $(x,x)\ge 0$, 且 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$,

其中 $x,y\in H,\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, 满足以上性质的二元函数称为 H 上的内积. 定义 $\| x \|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$, 则 H 成为赋范空间. 如 H 作为赋范空间是完备的，则称 H 为 Hilbert 空间. $\mathcal{B}(H),\mathcal{F}(H)$ 和 $\mathcal{K}(H)$ 分别表示 H 上的有界线性算子, 有限秩算子和紧算子全体. 设 $T\in\mathcal{K}(H)$, T 的绝对值 $|T|$ 也为紧算子. 这样 $|T|$ 有可列个特征值 $\{s_k\}_{s=1}^{\infty}$, 满足

$$s_1\ge s_2\ge\cdots\ge s_k\ge\cdots,$$

我们称 $\{s_k\}_{s=1}^{\infty}$ 为紧算子 T 的 s- 数. 设 $T\in\mathcal{K}(H)$, $\mathcal{E}$ 为 H 的一标准正交基，定义 T 的 Hilbert-Schmidt 范数为

$$\| T \|_2=\left(\sum_{x\in\mathcal{E}}\| Tx \|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{\infty}s_k^2.$$

此定义与基的选取无关. 若 $\| T \|_2<\infty$, 则称 T 为 Hilbert-Schmidt 算子. H 上全体 Hilbert-Schmidt 算子记为 $\mathcal{C}_2(H)$；定义 T 的迹范数为

$$\| T \|_1=\sum_{x\in\mathcal{E}}(| T | x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}s_k,$$

其中 $| T |=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$. 若 $\| T \|_1<\infty$, 则称 T 为迹算子. H 上全体迹算子记为 $\mathcal{C}_1(H)$. 对 $T\in\mathcal{B}(H)$, 定义 T 的迹

$$\mathrm{tr}(T)=\sum_{x\in\mathcal{E}}(Tx,x).$$

下面的命题描述了 $\mathcal{K}(H),\mathcal{C}_1(H)$ 和 $\mathcal{B}(H)$ 三者的关系.

命题 1.2.1　设 H 为 Hilbert 空间, 则在等距同构的意义下有

$$\mathcal{C}_1(H)^* = \mathcal{B}(H),$$
$$\mathcal{K}(H)^* = \mathcal{C}_1(H).$$

其含义为: 任给 $f \in \mathcal{C}_1(H)^*$, 存在唯一的 $A \in \mathcal{B}(H)$ 使得

$$\| f \| = \| A \|,\ f(T) = tr(AT),\ \forall T \in \mathcal{C}_1(H).$$

任给 $g \in \mathcal{K}(H)^*$, 存在唯一的 $B \in \mathcal{C}_1(H)$ 使得

$$\| g \| = \| B \|,\ g(T) = tr(BT),\ \forall T \in \mathcal{K}(H).$$

下面我们介绍 $\mathcal{B}(H)$ 中常用的五种算子拓扑. 设 T, T_α 属于 $\mathcal{B}(H)$,

(1) 称 T_α 按范数拓扑收敛于 T, 如果 $\| T_\alpha - T \| \to 0$. 记为 $T_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} T$;

(2) 称 T_α 按强算子拓扑收敛于 T, 如果 $\| (T_\alpha - T)x \| \to 0, \forall x \in H$. 记为 $T_\alpha \xrightarrow{s} T$;

(3) 称 T_α 按弱算子拓扑收敛于 T, 如果 $(T_\alpha x, y) \to (Tx, y), \forall x, y \in H$. 记为 $T_\alpha \xrightarrow{w} T$;

(4) 称 T_α 按强 * 算子拓扑收敛于 T, 如果 $T_\alpha \xrightarrow{s} T$ 且 $T_\alpha^* \xrightarrow{s} T^*$. 记为 $T_\alpha \xrightarrow{s^*} T$.

(5) 称 T_α 按弱 * 算子拓扑收敛于 T, 如果 $\mathrm{tr}(T_\alpha S) \to \mathrm{tr}(TS), \forall S \in \mathcal{C}_1(H)$; 记为 $T_\alpha \xrightarrow{w^*} T$;

命题 1.2.2　设 $f : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ 为线性泛函, 则 f 弱 * 连续的充要条件是存在唯一 $T \in \mathcal{C}_1(H)$ 使得 $f(S) = \mathrm{tr}(ST), \forall S \in \mathcal{B}(H)$.

§1.3　非自伴算子代数

定义 1.3.1　设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 的一族闭子空间, 称 $\mathcal{L}$ 是子空间格, 如果

(1) $(0), X \in \mathcal{L}$;

(2) 对 $\mathcal{L}$ 的任一族子空间 $\{L_i \in \mathcal{L} : i \in \Lambda\}$, 总有 $\vee_{i\in\Lambda} L_i,\ \wedge_{i\in\Lambda} L_i \in \mathcal{L}$, 其中 $\vee$ 表示子空间的闭线性扩张, $\wedge$ 表示集合交.

设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的一族闭子空间, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$, 定义

$$\mathrm{Alg}\mathcal{L} = \{T \in \mathcal{B}(X) : T(L) \subseteq L,\ \forall\, L \in \mathcal{L}\},$$

$$\mathrm{Lat}\mathcal{A} = \{L : L \text{ 是 } X \text{ 的闭子空间, 使得 } T(L) \subseteq L,\ \forall\, T \in \mathcal{A}\}.$$

易证 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 是含单位元的弱闭算子代数, $\mathrm{Lat}\mathcal{A}$ 是子空间格, 称 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 为对应于 $\mathcal{L}$ 的子空间格代数且 $\mathrm{Lat}\mathcal{A}$ 为对应于 $\mathcal{A}$ 的子空间格.

定义 1.3.2 设 X 是 Banach 空间，$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(X)$ 是一算子代数，称 $\mathcal{A}$ 是自反的，如果 $\mathcal{A}=\mathrm{AlgLat}\mathcal{A}$; 对偶地，称 X 上的子空间格 $\mathcal{L}$ 是自反的，如果 $\mathcal{L}=\mathrm{LatAlg}\mathcal{L}$.

一般地，算子空间的自反性定义如下.

定义 1.3.3 设 X 是 Banach 空间，$\mathcal{S}\subseteq\mathcal{B}(X)$ 是子空间，记

$$\mathrm{Ref}\mathcal{S}=\{T\in\mathcal{B}(X):Tx\in\overline{\mathcal{S}x},\ \forall\, x\in X\},$$

其中 $\overline{\mathcal{S}x}$ 表示由 $\{Sx:S\in\mathcal{S}\}$ 生成的闭子空间. 称 $\mathcal{S}$ 是自反的，如果 $\mathcal{S}=\mathrm{Ref}\mathcal{S}$.

易知 $\mathrm{Ref}\mathcal{S}$ 是弱闭算子空间，因此自反算子空间必是弱闭的. 此外可以证明，如果 $\mathcal{A}$ 是 X 上的含单位元的算子代数，那么

$$\mathrm{Ref}\mathcal{A}=\mathrm{AlgLat}\mathcal{A}.$$

因此对于这类代数，其自反性在上述两种定义下是一致的.

注 1.3.4 设 H 是 Hilbert 空间，给定算子 $T\in\mathcal{B}(H)$, 如果由 T 和单位算子生成的弱闭代数是自反的，则称算子 T 是自反的. 显然，如果 T 自反，则 T 必有非平凡的不变闭子空间. 这说明自反算子代数与著名的尚未解决的不变子空间问题：是否每个算子都具有非平凡的不变闭子空间，有密切的联系.

容易证明 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 是自反的，因此自反算子代数等价于子空间格代数. 在 Hilbert 空间上，自伴的自反算子代数是 von Neumann 代数；反之，任意 von Neumann 代数都是自反的. 这类代数的理论已经比较成熟. 而非自伴自反算子代数的研究却进展缓慢，其主要原因在于其不变子空间格的结构的复杂性.

在子空间格中，经常使用下列记号.

定义 1.3.5 设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格，$L\in\mathcal{L}$, 定义

(1) $L_-=\vee\{M\in\mathcal{L}:M\not\supseteq L\}$, $(0)_-=(0)$;

(2) $L_+=\wedge\{M\in\mathcal{L}:M\not\subseteq L\}$, $X_+=X$;

(3) $L_\#=\vee\{K\in\mathcal{L}:K_-\not\supseteq L\}$;

(4) $L_*=\wedge\{K_-:K\in\mathcal{L},K\not\subseteq L\}$.

注意，$L_\#\subseteq L\subseteq L_*$ 恒成立.

下面介绍几类重要的非自伴自反算子代数.

1. 套代数

设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格，如果 $\mathcal{L}$ 是全序集，则称 $\mathcal{L}$ 是套 (nest), 并称 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 是套代数. 如果 $\mathcal{L}$ 是套，$L\in\mathcal{L}$, 则定义 1.3.5 中的 L_- 和 L_+ 为

$$L_-=\vee\{M\in\mathcal{L}:M\subset L\},$$

$$L_+=\wedge\{M\in\mathcal{L}:M\supset L\}.$$

易见 $L_-\subseteq L\subseteq L_+$.

设 $\mathcal{L}$ 是 Hilbert 空间 H 上的套，$L \in \mathcal{L}$, 若 $L \neq L_-$, 则称 $L \ominus L_-$ 为 $\mathcal{L}$ 的原子. 若 $\vee\{L \ominus L_- : L \in \mathcal{L}\} = H$, 则称 $\mathcal{L}$ 是原子套. 若对任意 $L \in \mathcal{L}$ 都有 $L = L_-$, 则称 $\mathcal{L}$ 为连续套. 若对任意 $L \in \mathcal{L}$ 都有 $\dim L \ominus L_- \leq 1$, 则称 $\mathcal{L}$ 为极大套.

2. CSL 代数

设 $\mathcal{L}$ 是 Hilbert 空间 H 上的子空间格，则 $\mathcal{L}$ 中每个元素都对应唯一的正交投影. 如果这些正交投影两两可交换，则称 $\mathcal{L}$ 是交换子空间格，简记为 CSL, 并称 Alg$\mathcal{L}$ 是交换子空间格代数，简称 CSL 代数.

注意， CSL 代数只在 Hilbert 空间上有定义，是套代数在 Hilbert 空间上的推广.

3. 原子 Boolean 格代数

设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格，称 $K \in \mathcal{L}$ 是原子，如果 $L \in \mathcal{L}$ 使得 $0 \subseteq L \subseteq K$, 则必有 $L = 0$ 或 $L = K$. 称 $\mathcal{L}$ 是原子格，如果 $\mathcal{L}$ 中每个元素都是它所包含的原子的闭线性扩张，即

$$L = \vee\{K \in \mathcal{L} : K \subseteq L \text{ 是原子}\}.$$

称 $\mathcal{L}$ 是分配格，如果对任意 $L, M, N \in \mathcal{L}$, 都有分配律

$$\begin{cases} L \wedge (M \vee N) = (L \wedge M) \vee (L \wedge N), \\ L \vee (M \wedge N) = (L \vee M) \wedge (L \vee N). \end{cases} \tag{1.3.1}$$

称 $\mathcal{L}$ 是 Boolean 格，如果它是分配格，并且任给 $L \in \mathcal{L}$, 都存在 $L' \in \mathcal{L}$ 使得 $L \vee L' = X$, $L \wedge L' = (0)$.

如果 $\mathcal{L}$ 是原子 Boolean 格，则称 Alg$\mathcal{L}$ 是原子 Boolean 格代数.

4. 完全分配格代数

设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格，称 $\mathcal{L}$ 是完全分配格，如果分配律 (1.3.1) 对 $\mathcal{L}$ 的任一族子空间成立，确切地说，有下列无穷分配律:

$$\bigwedge_{a \in A} \bigvee_{b \in B} L_{a,b} = \bigvee_{f \in B^A} \bigwedge_{a \in A} L_{a,f(a)}$$

和

$$\bigvee_{a \in A} \bigwedge_{b \in B} L_{a,b} = \bigwedge_{f \in B^A} \bigvee_{a \in A} L_{a,f(a)},$$

其中 A, B 是任意指标集， B^A 表示映射 $f : A \to B$ 的全体.

如果 $\mathcal{L}$ 是完全分配格，则称 Alg$\mathcal{L}$ 是完全分配格代数. 注意，套和原子 Boolean 子空间格是两类重要的完全分配格. 对于完全分配格，我们有如下常用的等价命题.

命题 1.3.6 ([123]) 设 $\mathcal{L}$ 是子空间格，则下列命题等价：

(1) $\mathcal{L}$ 为完全分配格；

(2) $L = L_{\#}$，$\forall\, L \in \mathcal{L}$；

(3) $L = L_{*}$，$\forall\, L \in \mathcal{L}$.

5. JSL 代数

设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格，定义

$$\mathcal{J}(\mathcal{L}) = \{K \in \mathcal{L} : K \neq (0) \text{ 且 } K_{-} \neq X\}.$$

称 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{J}$- 子空间格，简称 JSL, 如果

(1) $\vee\{K : K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})\} = X$,

(2) $\wedge\{K_{-} : K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})\} = (0)$,

(3) $K \vee K_{-} = X$, $\forall K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$,

(4) $K \wedge K_{-} = (0)$, $\forall K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$.

称 Alg$\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{J}$- 子空间格代数，简称 JSL 代数，如果 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{J}$- 子空间格.

可以证明原子 Boolean 子空间格是 $\mathcal{J}$- 子空间格，并且 Hilbert 空间上的交换 $\mathcal{J}$- 子空间格是原子 Boolean 格，但并非所有的 $\mathcal{J}$- 子空间格都可交换. 例如，设 A 是 Hilbert 空间 H 上的单射的不可逆正算子， $N \neq (0)$ 是 H 的闭子空间使得 $\mathrm{ran}(A) \wedge N = (0)$. 定义 $H^{(3)}$ 的子空间： $M_1 = \{(0, x, Ax) : x \in H\}$， $M_2 = (0) \oplus N^{\perp} \oplus (0)$， $M_3 = \{(Ax, x, 0) : x \in H\}$. 则由 $\{M_1, M_2, M_3\}$ 生成的子空间格 $\mathcal{L}$ 是一个 $\mathcal{J}$- 子空间格，它不是原子 Boolean 格，见图 1.3.1. 此外， $\mathcal{J}$- 子空间格不一定是分配格. 一个非分配的 $\mathcal{J}$- 子空间格的例子是五角格 (pentagon), 即

$$\mathcal{P} = \{(0), K, L, M, X\},$$

这里 K, L, M 是 Banach 空间 X 的闭子空间，并且满足 $K \wedge M = (0)$, $K \vee L = X$, $L \subset M$, 见图 1.3.2. 注意，一个五角子空间格只有在无限维空间上才能实现.

一秩算子在算子代数的研究中起着至关重要的作用.

设 H 是 Hilbert 空间， $x, y \in H$ 是非零向量，一秩算子 $x \otimes y$ 定义为

$$x \otimes y(z) = (z, y)x, \quad \forall\, z \in H.$$

一般地，设 X 是 Banach 空间，对于非零元素 $x \in X$, $f \in X^{*}$, 一秩算子 $x \otimes f$ 定义为

$$x \otimes f(y) = f(y)x, \quad \forall\, y \in X.$$

下面的命题给出了自反算子代数的一秩算子的一个重要特征，它首先由 W. E.

Longstaff 在 Hilbert 空间中给予证明 [124], 但它在 Banach 空间中同样成立.

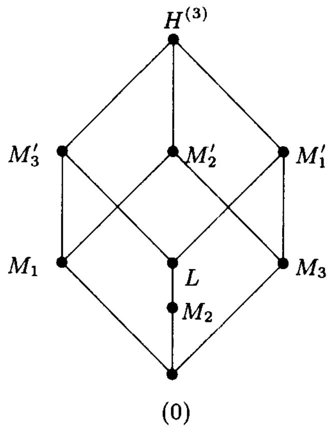

图 1.3.1

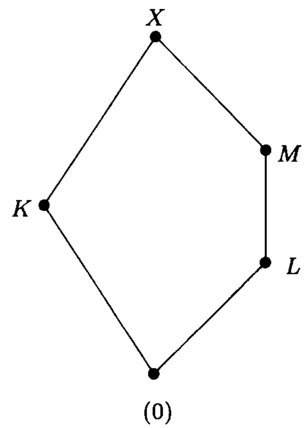

图 1.3.2

命题 1.3.7 设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格, 则一秩算子 $x\otimes f\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 的充要条件为: 存在 $L\in\mathcal{L}$ 使得 $x\in L, f\in L_-^\perp$.

证明 充分性. 假设存在 $L\in\mathcal{L}$, 使得 $x\in L$, $f\in L_-^\perp$. 对任意 $M\in\mathcal{L}$, 若 $M\supseteq L$, 则 $x\otimes f(M)\subseteq L\subseteq M$; 若 $M\not\supseteq L$, 由 L_- 的定义知 $M\subseteq L_-$, 这样 $x\otimes f(M)=(0)$. 因此总有 $x\otimes f(M)\subseteq M$, 故 $x\otimes f\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$.

必要性. 假设 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$, 记 L 为 $\mathcal{L}$ 中包含 x 的最小元, 即 $L=\wedge\{M\in\mathcal{L}: x\in M\}$, 则 $x\in L$. 下证 $f\in L_-^\perp$. 设 $M\in\mathcal{L}$ 使得 $M\not\supseteq L$, 由 L 的定义知 $x\notin M$. 由于 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$, 故 $x\otimes f(M)\subseteq M$, 因此必然有 $f(M)=(0)$. 由 L_- 的定义可知 $f\in L_-^\perp$. 证毕.

6. 三角代数

最后, 介绍另一类非自伴算子代数, 即三角代数. 设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{B}(H)$ 的子代数, 记 $\mathcal{S}^*=\{A^*: A\in\mathcal{S}\}$, $\mathcal{D}=\mathcal{S}\wedge\mathcal{S}^*$ 称为 $\mathcal{S}$ 的对角. 如 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{B}(H)$ 中的极大交换 von Neumann 代数 (即 masa), 称 $\mathcal{S}$ 为三角代数. 若 $\mathcal{S}$ 不真包含在其它三角代数中, $\mathcal{S}$ 称为极大三角代数. 由 Zorn 引理易知任一三角代数包含在一具有相同对角的极大三角代数中. 极大三角代数的不变子空间格 Lat$\mathcal{S}$ 是一个套 ([83, 引理 2.3.3]), 称为 $\mathcal{S}$ 的包套, 且 AlgLat$\mathcal{S}$ 称为 $\mathcal{S}$ 的包套代数. 一般地, 包套 Lat$\mathcal{S}$ 是拟极大的, 即 Lat$\mathcal{S}$ 的原子的维数要么不大于一, 要么是无穷 ([41, 定理 1]). 若 Lat$\mathcal{S}=\{(0),H\}$, 称 $\mathcal{S}$ 是不可约的; 若 Lat$\mathcal{S}$ 是极大套, 称 $\mathcal{S}$ 是强可约的. 记 $\mathcal{C}$ 为投影 $\{N: N\in\mathrm{Lat}\mathcal{S}\}$ 生成的 von Neumann 代数, 称 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{S}$ 的核. 若 $\mathcal{C}=\mathcal{D}$, 称 $\mathcal{S}$ 为超可约极大三角代数.

因为三角代数的子空间格是一个套, 三角代数与套代数有密切的关系, 所以我

们举几个例子说明两者的关系.

例 1.3.8 $\mathcal{A}=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix} : a_{ij}\in\mathbb{C}\right\}$ 既是套代数，又是三角代数而且是超可约的.

例 1.3.9 $\mathcal{A}=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix} : a_{ij}\in\mathbb{C}\right\}$ 是三角代数，而非套代数.

例 1.3.10 $\mathcal{A}=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix} : a_{ij}\in\mathbb{C}\right\}$ 是套代数，而非三角代数，因为 $\mathcal{A}$ 的 对角 $\mathcal{D}=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 \\ & a_{32} & a_{33} & 0 \\ & & & a_{44} \end{bmatrix} : a_{ij}\in\mathbb{C}\right\}$ 不是交换的.

本节的最后，我们介绍一个在算子代数中经常应用的命题.

命题 1.3.11 设 $\mathcal{D}$ 为 masa 且 $x_1,x_2\in H$, 则存在 $D_1,D_2\in\mathcal{D}$ 和 $x\in H$ 使得 $D_ix=x_i$.

第二章　有限秩算子

一秩算子和有限秩算子既是算子代数理论的研究对象又是研究算子代数的重要工具. 本章讨论套代数、 CSL 代数和三角代数中有限秩算子的可分解性和稠密性. 所谓有限秩算子的可分解性问题是指某个算子代数中的有限秩算子是否能写成该代数中的有限个一秩算子之和. 为了研究 CSL 代数中有限秩算子的可分解性我们引入相关系数、相关矩阵及非零正合分解等概念.

§2.1　一秩子代数的弱 * 稠密性

设 H 是可分的复 Hilbert 空间, 如果 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是子空间, 则用 $\mathcal{R}_1(\mathcal{A})$ 表示由 $\mathcal{A}$ 中的所有一秩算子生成的子空间. 特别地, 若 $\mathcal{L}$ 是 H 上的子空间格, 则记 $\mathcal{R}_1(\mathcal{L}) = \mathcal{R}_1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$, 此时它也构成一个代数, 通常称之为 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 的一秩子代数. 本节, 我们研究 $\mathcal{R}_1(\mathcal{L})$ 在 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 中的弱 * 稠密性问题. 由于命题 2.1.1 成立, 故一般可假设 $\mathcal{L}$ 是完全分配的.

命题 2.1.1　设 $\mathcal{L}$ 是 H 上的子空间格, 若 $\mathcal{R}_1(\mathcal{L})$ 在 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 中弱 * 稠密, 则 $\mathcal{L}$ 是完全分配的.

证明　根据命题 1.3.6, 只需验证 $L = L_{\#}$ 对任何 $L \in \mathcal{L}$ 成立, 这里 $L_{\#} = \vee\{K \in \mathcal{L} : K_{-} \not\supseteq L\}$. 固定 $L \in \mathcal{L}$, 首先证明 $L_{\#}^{\perp}(x \otimes y)L = 0$ 对所有 $x \otimes y \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 成立. 设 $x \otimes y \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$, 则存在 $K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$ 使得 $x \in K$ 且 $y \in K_{-}^{\perp}$. 若 $L \subseteq K_{-}$, 则 $(x \otimes y)L = (0) \subseteq L_{\#}$; 若 $L \not\subseteq K_{-}$, 则 $K \subseteq L_{\#}$, 因而 $(x \otimes y)L \subseteq K \subseteq L_{\#}$. 因此 $L_{\#}^{\perp}(x \otimes y)L = 0$ 对所有 $x \otimes y \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 成立, 进而 $L_{\#}^{\perp}AL = 0$ 对所有 $A \in \mathcal{R}_1(\mathcal{L})$ 成立. 由于 $I \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$, 所以存在网 $\{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{R}_1(\mathcal{L})$ 弱 * 收敛于 I. 在等式 $L_{\#}^{\perp}A_\alpha L$ 中取极限, 得到 $L_{\#}^{\perp}L = 0$. 进而由于 $L_{\#} \subseteq L$, 所以 $L = L_{\#}$. 证毕.

下面的定理说明, 当 $\mathcal{L}$ 是交换子空间格时, 命题 2.1.1 的逆也成立 (见 [107]). 但由于证明较繁, 故略去证明. 特别地, 当 $\mathcal{L}$ 是套时, 通常称该定理为 Erdos 稠密性定理 ([42, 定理 2]).

定理 2.1.2　设 $\mathcal{L}$ 是 H 上的完全分配交换子空间格, 则 $\mathcal{R}_1(\mathcal{L})$ 在 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 中弱 * 稠密.

设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{C}_1(H)$. 由命题 1.2.1 知 $\mathcal{C}_1(H)^* = \mathcal{B}(H)$, 那么 $\mathcal{U}$ 的预零化子和 $\mathcal{V}$ 的零化子分别为

$$\mathcal{U}_{\perp} = \{T \in \mathcal{C}_1(H) : \mathrm{tr}(TS) = 0, \ \forall\, S \in \mathcal{U}\},$$

$$\mathcal{V}^{\perp} = \{T \in \mathcal{B}(H) : \mathrm{tr}(TS) = 0, \ \forall\, S \in \mathcal{V}\}.$$

进一步，定义

$$\mathcal{U}_{\perp\perp}=(\mathcal{U}_{\perp})_{\perp}=\{T\in\mathcal{C}_1(H):\operatorname{tr}(TS)=0,\ \forall\, S\in\mathcal{U}_{\perp}\},$$

称 $\mathcal{U}_{\perp\perp}$ 为 $\mathcal{U}$ 的二次预零化子.

一般情况下，$\mathcal{U}_{\perp\perp}$ 应定义在 $\mathcal{K}(H)$ 中，而我们把它定义在 $\mathcal{C}_1(H)$ 中. 下面将会发现这样的定义非常有用.

引理 2.1.3 设 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 是弱 * 闭子空间, 则 $\mathcal{M}$ 自反的充分必要条件为: $\mathcal{M}_{\perp}$ 是由 $\mathcal{M}_{\perp}$ 中的所有一秩算子生成的迹范数闭子空间.

证明 易见一秩算子 $x\otimes y\in\mathcal{M}_{\perp}$, 当且仅当 $(Ax,y)=0$ 对所有 $A\in\mathcal{M}$ 成立, 进而当且仅当 $y\in\overline{\mathcal{M}x}^{\perp}$. 因此 $A\in\mathcal{B}(H)$ 使得 $\operatorname{tr}(AF)=0$ 对所有的有限秩算子 $F\in\mathcal{M}_{\perp}$ 成立，当且仅当 $Ax\in\overline{\mathcal{M}x}$ 对所有 $x\in H$ 成立.

充分性. 设 $A\in\mathcal{B}(H)$ 使得 $Ax\in\overline{\mathcal{M}x}$ 对所有 $x\in H$ 成立. 则由前段可知 $\operatorname{tr}(AF)=0$ 对所有的有限秩算子 $F\in\mathcal{M}_{\perp}$ 成立. 进而由于 $\mathcal{M}_{\perp}$ 是由 $\mathcal{M}_{\perp}$ 中的所有一秩算子生成的迹范数闭子空间，所以 $\operatorname{tr}(AT)=0$ 对所有 $T\in\mathcal{M}_{\perp}$ 成立. 因此 $A\in(\mathcal{M}_{\perp})^{\perp}=\mathcal{M}$.

必要性. 设 $\mathcal{S}$ 是由 $\mathcal{M}_{\perp}$ 中的所有一秩算子生成的迹范数闭子空间, 则 $A\in\mathcal{S}^{\perp}$ 当且仅当 $Ax\in\overline{\mathcal{M}x}$ 对所有 $x\in H$ 成立. 因此由 $\mathcal{M}$ 的自反性知，$\mathcal{S}^{\perp}=\mathcal{M}=(\mathcal{M}_{\perp})^{\perp}$. 但 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{M}_{\perp}$, 所以 $\mathcal{M}_{\perp}=\mathcal{S}$. 证毕.

设 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 是代数， $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 是子空间. 称 $\mathcal{M}$ 是左 (右)$\mathcal{A}$- 模，如果 $\mathcal{AM}\subseteq\mathcal{M}$ $(\mathcal{MA}\subseteq\mathcal{M})$; 称 $\mathcal{M}$ 是 (双边)$\mathcal{A}$- 模，如果 $\mathcal{M}$ 既是左 $\mathcal{A}$- 模又是右 $\mathcal{A}$- 模.

定理 2.1.4 设 $\mathcal{L}$ 是 H 上的完全分配子空间格，记 $\mathcal{A}=\operatorname{Alg}\mathcal{L}$, 则下列命题等价:

(1) $\mathcal{R}_1(\mathcal{L})$ 在 $\mathcal{A}$ 中弱 * 稠密,

(2) 任意弱 * 闭 $\mathcal{A}$- 模是自反的,

(3) $[\mathcal{A}_{\perp}]^{w^*}$ 和 $[\mathcal{A}_{\perp\perp}]^{w^*}$ 是自反的.

证明 (1)⇒(2). 不失一般性，设 $\mathcal{M}$ 是弱 * 闭右 $\mathcal{A}$- 模，则 $\mathcal{MA}\subseteq\mathcal{M}$. 设 $\mathcal{S}$ 是由 $\mathcal{M}_{\perp}$ 中的所有一秩算子生成的迹范数闭子空间. 设 $T\in\mathcal{M}_{\perp}$, 由引理 2.1.3 知只需证 $T\in\mathcal{S}$. 由条件 (1), 存在网 $\{F_\alpha\}\subseteq\mathcal{R}_1(\mathcal{A})$ 弱 * 收敛于 I. 因为 $\mathcal{MA}\subseteq\mathcal{M}$, 所以 $\mathcal{AM}_{\perp}\subseteq\mathcal{M}_{\perp}$, 因而 $\{F_\alpha T\}\subseteq\mathcal{M}_{\perp}$. 进而由于 F_α 弱 * 收敛于 I, 所以 $F_\alpha T$ 弱 * 收敛于 T. 但 $\mathcal{S}$ 是凸的迹范数闭集，由命题 1.1.1(5) 知它也是弱闭的，因而 $T\in\mathcal{S}$.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(1). 将证明分为下列四步.

断言 1 $\mathcal{A}_{\perp\perp}\subseteq\mathcal{A}$, 并且 $\mathcal{A}_{\perp\perp}$ 与 $\mathcal{A}$ 有相同的一秩算子.

设 $T\in\mathcal{A}_{\perp\perp}$. 假若 $T\notin\mathcal{A}$, 由于 $\mathcal{A}$ 是弱 * 闭的，根据 Hahn–Banach 定理可知，存在 $\mathcal{B}(H)$ 上的弱 * 连续线性泛函 f 使得 $f(T)\neq 0$, 但对任意 $A\in\mathcal{A}$ 有