彩虹策划

◎丛书总主编　吴　康
◎本册主编　黄照欣

奥赛金牌题典

AOSAI JINPAI TIDIAN

高二物理

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

奥赛金牌之路丛书

本册主编　黄照欣

Aosai Jinpai Tidian

奥赛金牌题典

高二物理

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

奥赛金牌题典 高二物理

主 编 黄照欣

责任编辑：唐丹宁 杨 晨　　装帧设计：杨 琳

广西师范大学出版社出版发行

广西桂林市育才路15号 邮政编码：541004

网址：http://www.bbtpress.cn

广西师范大学印刷厂印刷

开本：890×1 240 1/32　印张：13.25　字数：565千字

2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷

ISBN 7-5633-3554-4/G・2294

定价：14.80元

前 言

中学物理教育是基础教育的重要组成部分。每年一度的全国中学生物理竞赛在激发中学生对物理学科的热爱和学习兴趣,培养科学思维能力和创新能力等方面有重要作用,并产生了积极的影响,因此越来越受到中学师生的重视。

为了配合中学生参加全国中学生物理竞赛,向他们提供可读性强、有参考实用价值的阅读材料,我们依据教学大纲和竞赛考纲编写了本书。立足基础、配合教学、面向竞赛是我们编写的指导思想。为此我们在浩瀚的资料中选编了A类题(例题)、B类题(训练题)和竞赛综合测试题或竞赛套题。A类题既有题目分析和详细解答,又有言简意赅的点评,使读者能从中学会分析问题和解决问题的方法,提高物理思维能力;B类题为读者练习提供了各种类型的好题目和较为详细的解答或提示,有助于检查学习效果;C类题则能使读者更好地了解国内、国际物理竞赛的最新动态。我们相信通过阅读本书,读者一定能够获得扩大知识面,提高分析问题和解决问题的能力,提高灵活运用物理知识的能力,提高物理竞赛成绩的学习效果。因此本书是中学生课外学习和竞赛训练的理想读物。

参加本书编写的作者是大学和著名重点中学的骨干教师,具有丰富的教学经验和物理竞赛辅导经验,他们辅导过的学生有多人次获得全国中学生物理竞赛一、二等奖。本书由华南师范大学张学荣、广州广雅中学叶道昭,广东省实验中学余乃明编写;全书由华南师范大学黄照欣主编。

在本书编写过程中参阅了众多文献和资料,恕不在此一一列出,谨向这些文献、资料的作者表示衷心的感谢。由于编者水平有限,错误和不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

目 录

第Ⅰ部分 物理竞赛例题精析及训练

● 第Ⅰ部分　物理竞赛例题精析及训练

第一章　静电场

A 类题

A1.（选自北京市华罗庚学校高中物理课本第二册）　如图1-1所示，边长为a的正方形4个顶点分别放置电量都是Q的固定点电荷，在对角线的交点O处放置一个质量为m、电量为q的自由点电荷，q与Q同号．今把q沿一条对角线移离O点一个很小的距离至P点．求证：释放q后，q做简谐振动，并求其周期．

分析：q在P点释放后受到来自4个Q的库仑斥力，库仑力位于电荷的瞬时连线上，其合力指向O点，具有回复力的属性．我们要推导的是：该回复力的大小跟q到O点的距离（设为x）成正比．推导中要用到一个常用的数学公式：如果$\delta \ll 1$，则

$$(1+\delta)^n = 1 + n\delta \qquad ①$$

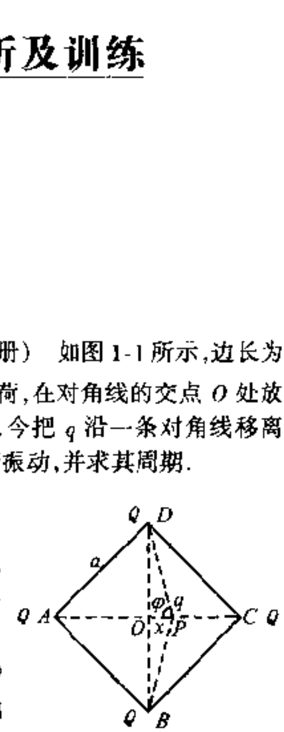

图1-1

解：设正方形对角线的长为$2r$，取AC方向为x轴正方向，O点为坐标原点．把A和C的两个Q给q的合力记为F_1，把B和D的两个Q给q的合力记为F_2，则

$$F_1=\frac{kQq}{(r+x)^2}-\frac{kQq}{(r-x)^2}$$
$$=\frac{kQq}{r^2}\left[\left(1+\frac{x}{r}\right)^{-2}-\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-2}\right]$$

由于$\frac{x}{r}\ll1$,利用①式可得

$$F_1=\frac{kQq}{r^2}\left[\left(1-2\frac{x}{r}\right)-\left(1+2\frac{x}{r}\right)\right]=-\frac{4kQq}{r^3}x$$

设 OP 和 DP 之间的夹角为φ,则

$$F_2=2\frac{kQq}{r^2+x^2}\cos\varphi=2\frac{kQq}{r^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{2kQqx}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{2kQq}{r^3}x\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{2kQq}{r^3}x\left(1-\frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}\right)=\frac{2kQq}{r^3}x$$

上式最后的结果是由于$\left(\frac{x}{r}\right)^2\ll\frac{x}{r}\ll1$,所以把$\frac{3}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2$整项略去.

$$F_{合}=F_1+F_2=\frac{-4kQq}{r^3}x+\frac{2kQq}{r^3}x=-\frac{2kQq}{r^3}x$$

可见,$F_{合}$跟x大小成正比,是线性回复力,这就证明了 q 释放后做简谐振动.其周期可由公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$求出.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2kQq}{r^3}}}=2\pi\sqrt{\frac{mr^3}{2kQq}}$$

由于正方形边长为 a,$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,代入上式消去 r 得

$$T=\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\sqrt{2}kQq}}$$

点评:点电荷之间的库仑力应用的最典型的问题,就是平衡问题.我们已经知道平衡有三种:质点偏离平衡位置后能在回复力作用下自行返回平衡位置,称为稳定平衡;不能自行返回平衡位置,称为不稳定平衡;在任何位置都可以平衡,称为随遇平衡.点电荷在平衡位置上受到的库仑力合力必定为零.点电荷的稳定平衡问题往往伴随有简谐振动的求证和固有周期的求解.因为谐振通常只能在小振幅的条件下实现,所以①式就显得十分重要,十分实用.

A2（选自湖南师范大学出版社出版的《奥林匹克竞赛教程》） 有两根光滑的绝缘杆，可在同一竖直平面内绕 O 点转动．两杆上各穿着一个质量为 m、电量为 q 的小球．两杆与水平面夹角都等于 θ 时，两球在同一水平面上处于静止状态，如图1-2所示．现使两杆同时绕 O 点缓慢转动，此时小球在杆上的位置随之改变．问 θ 取何值时，小球到 O 点的距离 l 为最小值？

分析：杆转得缓慢意味着小球在每一个位置上都处于合力为零的平衡状态．运用三个共点力的平衡条件，可以得到 l 与 θ 之间的函数关系，从函数式去研究 l 的最小值应该是不难的．

解：两球受力对称，分析一个小球就足够了．

小球 m 受三个力作用，而重力 mg 和库仑斥力 F 的合力跟支持力 N 必定等大反向，取长度量 l，$F=k\dfrac{q^2}{(2l\cos\theta)^2}$．由图可见

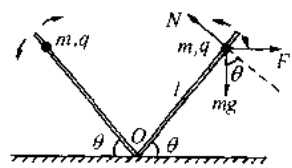

图 1-2

$$k\frac{q^2}{(2l\cos\theta)^2}=mg\tan\theta$$

则 $$l^2=\frac{\dfrac{kq^2}{4mg}}{\cos^2\theta\cdot\tan\theta}$$

又因为 $\dfrac{kq^2}{4mg}$ 是恒量， 设 $x=\cos^2\theta\cdot\tan\theta=\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin2\theta$，

当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$x_{\max}=\dfrac{1}{2}$，$l_{\min}=q\sqrt{\dfrac{k}{2mg}}$．

点评：解决质点受力平衡或不平衡的问题，第一程序总要对质点做正确的受力分析．怎样分析受力才算正确？第一是力的个数，一个不能多一个也不能少，比起一般常见的力学问题，本题点电荷少了摩擦力，多了一个电场力．第二是力的方向要判断准确，例如本题不能搞错 θ 角．库仑力必然在水平方向．在正确受力分析的基础上，合力如果为零，就是平衡问题，合力如果不为零，就必然等于 ma．力学当中的思维方法，完全可以迁移到静电场中来．

A2（选自北京华罗庚学校《高中物理试题解析》） 两个带正电 Q 的点电荷，固定放在 x 轴上的 A、B 两点处，AB 中点为坐标原点，$AO=OB=r$．在原点 O 放置另一质量为 m、电荷为 q 的点电荷．

（1）当限制 q 只能在哪些方向上运动时（可以理解成有轨道加以约束），它在 O 处才是稳定的？

（2）讨论在这些方向上受扰动之后 q 的运动情况．

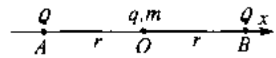

图 1-3

分析：假定 q 是正电荷，限制它在 S 轴上运动，假定它受到约束不能离开 S 轴运动，就无须考虑它在垂直于 S 轴方向上的受力．设它受扰动偏离 O 点发生微小位移（图 1-4 中的 $OP=x$），并设 S 轴与 x 轴正向夹角为 θ．题中提到的"哪些方向"，就是指 θ 的取值范围能令 q 的平衡是稳定的．

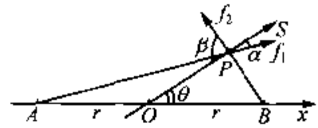

图 1-4

解：q 在 P 点受两个库仑斥力 f_1 与 f_2 作用，沿 S 轴的合力为

$$f_{合}=\frac{kQq}{AP^2}\cos\alpha-\frac{kQq}{BP^2}\cos\beta \qquad ①$$

运用余弦定理，把 AP、BP、$\cos\alpha$、$\cos\beta$ 都力求用 x 和 θ 来表示：

$$AP^2=r^2+x^2+2rx\cos\theta$$

$$BP^2=r^2+x^2-2rx\cos\theta$$

又因为 $\quad r^2=x^2+AP^2-2x\cdot AP\cos\alpha$

得 $\quad \cos\alpha=\dfrac{x+r\cos\theta}{(r^2+x^2+2xr\cos\theta)^{1/2}}$

由 $\quad r^2=x^2+BP^2+2x\cdot BP\cos\beta$

得 $\quad \cos\beta=\dfrac{r\cos\theta-x}{(r^2+x^2-2xr\cos\theta)^{1/2}}$

代入①式再整理，注意到 x^2 项可以略去，得

$$\begin{aligned}f_{合}&=\frac{kQq(x+r\cos\theta)}{(r^2+x^2+2rx\cos\theta)^{3/2}}-\frac{kQq(r\cos\theta-x)}{(r^2+x^2-2rx\cos\theta)^{3/2}}\\&=\frac{kQq}{r^3}\left[\frac{x+r\cos\theta}{\left(1+2\frac{x}{r}\cos\theta\right)^{3/2}}-\frac{r\cos\theta-x}{\left(1-\frac{2x}{r}\cos\theta\right)^{3/2}}\right]\\&=\frac{kQq}{r^3}\left[(x+r\cos\theta)\left(1-\frac{3x}{r}\cos\theta\right)-(r\cos\theta-x)\left(1+3\frac{x}{r}\cos\theta\right)\right]\\&=\frac{2kQq}{r^3}x(1-3\cos^2\theta) \qquad ②\end{aligned}$$

根据②式，当 $\cos^2\theta>\dfrac{1}{3}$ 时（图 1-5 中打斜线的锥体区域内），$f_{合}$ 为负，即合力方向与 x 相反，总指向原点，这是回复力的基本特性，q 的平衡是稳定的．反之在 $\cos^2\theta<\dfrac{1}{3}$ 的区域（同一图中未打上斜线的区域），$f_{合}$ 为正，即合力方向与 x 方向相同，总背离原点，q 的平衡是不稳定的．在平衡稳定的范围内，把②式改写为

$$f_{合} = -\frac{2kQq}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)x \qquad ③$$

③式中的 $3\cos^2\theta > 1$，可见 q 做简谐振动，其固有周期跟 θ 角的具体取值有关，由下式决定：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{mr^3}{2kQq(3\cos^2\theta - 1)}} \qquad ④$$

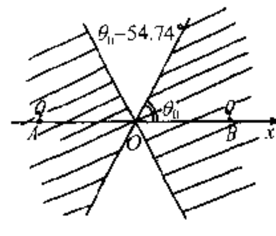

图 1-5

讨论：如果 q 是负电荷，根据相同的推理过程可知，结论刚好与上述相反．在 $\cos^2\theta > \frac{1}{3}$ 的区域，平衡不稳定；在 $\cos^2\theta < \frac{1}{3}$ 的区域，平衡稳定，负电荷做简谐振动，其固有周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr^3}{2kQq(1 - 3\cos^2\theta)}}$$

点评：本题是利用库仑定律论证点电荷的平衡稳定性问题，属于到目前为止我们所能遇到的最高档难度题之一．对于学有余力、学有兴趣的读者，花时间去钻研这道题是值得的．最好的办法，是自己动手去演算一遍．我们一定能领会，原来从物理模型出发进行如此艰深数学运算得出的结果，可以如此直白地表明其物理意义．做物理研究，千万别讨厌更别害怕做这样的运算．

A4. （选自北京华罗庚学校《高中物理试题解析》） 在距离一个接地的很大的导体板为 d 的 A 处放一个带电量为 $-q$ 的点电荷(图 1-6)．

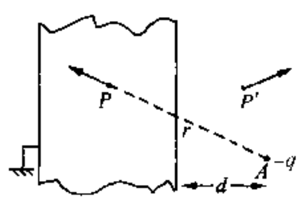

图 1-6

(1) 求板上感应电荷在导体内 P 点($PA = r$)产生的电场强度．

(2) 求板上感应电荷在导体外 P' 点产生的电场强度，已知 P' 点与 P 点以导体板右表面对称．

(3) 求证导体板表面的电场强度矢量总与导体板表面垂直．

(4) 求导体板上感应电荷对点电荷 $-q$ 的作用力．

(5) 若切断导体板跟地的连接线，再把 $+Q$ 电荷置于导体板上，试说明这部分 $+Q$ 电荷在导体板上应如何分布才可以达到静电平衡(略去边缘效应)．

分析：由于导体板很大且接地，因此只有右边表面才分布有正的感应电荷，而左边接地那一表面是没有感应电荷的．静电平衡的条件是导体内场强为零，故 P 点处的场强为零．而 P 点处的零场强是导体外及表面电荷产生场强叠加的结果．

解：(1) $E_{P合} = 0$．但 $E_{P合}$是由两个场强矢量合成的．一个是由 $-q$ 产生，已知

$PA=r$,大小为 kq^2/r^2,指向 A 点.另一个是由导体板右表面的感应电荷产生,当然,大小也是 kq^2/r^2,方向沿 AP 方向远离 A.

(2) 由于 P' 点与 P 点相对导体板右表面对称,亦即以右表面上的感应电荷对称.所以感应电荷在 P 点与 P' 点产生的场强应当是完全对称的,大小也是 kq^2/r^2,见图 1-7.

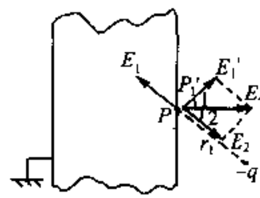

图 1-7

(3) 综合上述两解的方法,考察图 1-7 中导体板右表面两侧板靠近表面的两点 P_1 和 P_1',由导体板右表面感应电荷在 P_1 点产生的 E_1 与在 P_1' 点产生的 E_1' 完全对称.因 P_1 与 P_1' 如此靠近,所以由 $-q$ 在 P_1 点产生的(图中没画出来) E_2 和在 P_1' 点产生的 E_2 等大同向.对于 P_1' 点,必然有 $E_1'=E_2$,且 $\angle 1=\angle 2$,则合矢量 $E_合$ 即导体表面场强跟导体表面垂直.

(4) 再次运用上述(2)的分析方法可知,导体板右表面感应电荷在 $-q$ 所在的 A 点单独贡献的电场强度大小为 $kq/(2d)^2=kq/4d^2$,方向垂直于导体右侧面指向右方,因此,$-q$ 受感应电荷的作用力沿 d 方向指向导体板,$F=qE=kq^2/4d^2$.

(5) 切断接地线后,板右侧感应电荷呈原状态分布不变,导体内部各处场强为零.把 $+Q$ 电荷从外界加入导体,$+Q$ 均匀地分布在导体的左右两个侧面时,$+Q$ 本身在导体内部贡献的场强就处处为零,就不会破坏导体的静电平衡.

点评:独立性原理和叠加原理,是物理学中非常重要的原理.场强叠加只是该原理的应用之一罢了.我们首先要弄清楚,到底空间有多少个电荷.本例中,$-q$ 是场源电荷,导体板右侧面的感应电荷跟场源电荷一齐在导体内、导体外产生场强,在导体内叠加的结果为零[例如(1)],在导体外叠加的结果不为零[例如(3)].场强是矢量,其合成遵从平行四边形法则.

A5 如图 1-8 所示,无限长的均匀带电量为 Q 的细线 $A'ACBB'$,其中半圆弧 ACB 的半径为 R,中心 O 处一个电量为 q、质量为 m 的小球,在 4 条互相绝缘的垂直细丝 OA、OB、OC、OD 约束下静止,求 4 条细丝的拉力.

分析:细丝的拉力跟小球是否带电有什么关系?如果 O 点有电场,小球除了受重力作用外,还受电场力作用,重力方向向下,而电场力方向取决于场强方向和 q 的符号.4 根细丝的拉力会是一种结果.如果 O 点根本无电场,小球仅受向下重力作用,则细丝拉力就会是另一种结果.下面我们先论证 Q 在 O 点(无论 O 点是否有 q 小球)不产生电场.

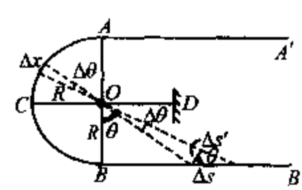

图 1-8

解:设 Q 的电荷线密度(单位长度电量)为 λ,在 AC 弧上取极短的 Δx,在

BB'线上取同样微小、对顶角的线段 Δs

因为 $\quad \Delta\theta = \dfrac{\Delta x}{R} = \dfrac{\Delta s'}{\dfrac{R}{\cos\theta}}$

所以 $\quad \Delta x = \Delta s'\cos\theta$

由于 $\Delta\theta$ 实在太小，可认为 $\Delta s'$ 与 Δs 夹的角也是 θ，$\Delta s'$ 与 O 点之间夹一个顶角趋于 0 底角接近 90°的等腰三角形，所以 $\Delta s' = \Delta s\cos\theta$，即 $\Delta x = \Delta s\cos^2\theta$. 于是

$$\frac{\Delta x}{R^2} = \frac{\Delta s\cos^2\theta}{R^2}\ ,\ k\ \frac{\lambda\Delta x}{R^2} = k\ \frac{\lambda\Delta s}{\left(\dfrac{R}{\cos\theta}\right)^2}$$

上式意义是：弧 AC 的电荷与射线 BB' 的电荷，在 O 点产生的电场强度．同理，可求出弧 BC 的电荷与射线AA'的电荷，在 O 点产生的电场强度．因为弧 AC 的电荷与射线 BB'的电荷以及弧 BC 的电荷与射线 AA' 的电荷在 O 点产生的电场强度等大反向，所以叠加结果必为零．O 点是没有电场的．q 小球放在 O 点，约束它的 4 根细丝的拉力就跟 q 无关．在静止条件下，有

$$T_{AO} = mg\ ,\ T_{BO} = T_{CO} = T_{DO} = 0$$

点评：本例应用的其实是微积分中的思维方法，即先把无限长线上的电荷 Q 细分成极大数目的小段，弧上某小段与相同对顶角的射线对应段，在 O 点产生的场强矢量抵消．再把所有小段电荷产生的效果叠加，就是把极大数目的效果相加．在高中物理奥林匹克课程中，能初步接触这种无限细分再无穷叠加的思维方法，是无可避免的，而且是十分必要、十分有好处的．

A6 如图 1-9，半径分别为 $2r$、$4r$、$6r$ 的三个同心导体球壳，球心有点电荷 Q，另有 A、B、C 三点到球心 Q 的距离分别是 r、$3r$、$5r$，要使这三个点的电场强度相等即 $E_A = E_B = E_C$，问三个球面各需带电量多少？

分析：A、B、C 每一个点的场强，都包含了三个球面电荷各自的贡献．但不要忘了，对于任一个球面的电荷，在其球内产生的场强都是零．

解：首先看 A 点．无论三个球壳的内外表面带多少电荷，它们在 A 点都不产生电场，E_A 只是由点电荷 Q 产生的．

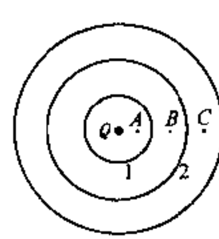

图 1-9

$$E_A = k\ \frac{Q}{r^2}$$

再看 B 点．由于 Q 的存在和静电感应，球壳 1 的内表面必出现 $-Q$，设球壳 1 外表面出现感应电荷 q_1，球壳 2 与球壳 3 的电荷在 B 点不

贡献电场，于是有

$$E_B = k\frac{Q}{r^2} = k\frac{Q}{(3r)^2} - k\frac{Q}{(3r)^2} + k\frac{q_1}{(3r)^2}，得\ q_1 = 9Q$$

球壳1的内外表面共有电荷 $9Q - Q = 8Q$.

再看 C 点. 球壳2的内表面感应出 $-9Q$，设球壳2外表面出现 q_2，球壳3电荷在 C 点不贡献电场. 根据叠加原理

$$E_C = k\frac{Q}{r^2} = k\frac{Q}{(5r)^2} - k\frac{Q}{(5r)^2} + k\frac{9Q}{(5r)^2} - k\frac{9Q}{(5r)^2} + k\frac{q_2}{(5r)^2}$$

则 $q_2 = 25Q$.

球壳2的内外表面共有电荷 $25Q - 9Q = 16Q$.

球壳3的内表面感应出 $-25Q$，外球面可带任意电荷.

点评：完成本例之后，对于静止不动的电荷产生静电场的场强问题，我们可做个简单的小结. ① 场强定义式是 $E = \frac{F}{q}$，检验电荷 q 是个认识工具，E 的分布、大小和方向，完全和 q 无关. ② 决定场强大小的重要因素之一是场源电荷 Q. 要强调大写 Q 和小写 q 不仅是书写的差别更是角色的差别. 对于一切电场，必定有 $E \propto Q$. 比如在真空或空气中的点电荷，$E = k\frac{Q}{r^2}$. ③ 对于均匀带电的导体球面，设球半径为 R，电量为 Q，则它产生的场强，在球内 $r < R$ 处，$E = 0$；在球外，等效于把全部 Q 集中于球心处的点电荷，即在 $r > R$ 处，$E = k\frac{Q}{r^2}$. ④ 关于场强的叠加原理，可表述为：空间任一点场强等于各个点电荷单独存在时各自在该点贡献的场强的矢量和.

A7.（选自北京华罗庚学校高中物理课本）

一个带绝缘柄的半径为 r 的金属小球原不带电，另有一个半径为 $R(>r)$ 的极薄带正电为 Q 的金属球壳(图1-10)，依下列程序操作时，每项操作之后，小球及球壳的带电情况如何变化？它们的电势如何变化？

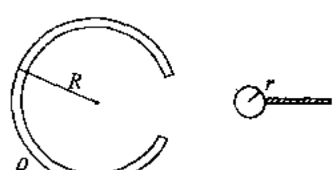

图 1-10

(1) 把小球从距球壳很远处通过壳上的孔移入壳内中心处，移动过程中两者不接触.

(2) 把位于球壳中心的小球接一下地，立即断开.

(3) 把球壳接一下地，立即断开.

(4) 把小球从球壳内取出，移到跟球壳中心 O 距离为 d 的 O' 点，移动过程中

两者不接触.

分析:本题用到的有关电势的知识点较多.包括带电导体球电势公式,电势叠加原理,静电场中导体的静电平衡条件,等等.首先我们要学习这方面的知识,通过本例或类似的例题能帮助我们加深对这些知识的理解.

解:(1) 小球本来不带电,移入 O 点后仍然不带电.因为带正电 Q 的整个导体球壳是个等势体.$U=k\dfrac{Q}{R}$.小球移到 O 点后,电势也变为 $k\dfrac{Q}{R}$.球壳自身的电量、电势不因小球的进入而改变.

(2) 小球未接地前电势为正,比地面高,一旦接地,电势迅速变为零.这一瞬间有电量 $-q(q>0)$ 由地通过接地线流入小球.q 可由下式计算:

$$k\frac{Q}{R}-k\frac{q}{r}=0$$

$q=\dfrac{r}{R}Q<Q$.由于小球带上 $-q$,因此球壳内表面会出现 $+q$,根据电荷守恒律,球壳外表面剩余电量:$(Q-q)=Q(R-r)/R$.内表面和小球之间的空腔出现电场,电场方向指向小球.球壳的电势会改变,其电势数值根据叠加原理可得

$$U_{壳}=k\frac{(-q)}{R}+k\frac{q}{R}+k\frac{(Q-q)}{R}=k\frac{Q(R-r)}{R^2}=k\frac{Q}{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)<k\frac{Q}{R}$$

说明球壳的电势仍为正,比小球高,但比原来降低了.

(3) 把球壳接一下地,球壳电势马上变为零.这一瞬间有负电荷 $-(Q-q)$ 由地通过接地线移入球壳.壳内表面仍有净正电荷 $q=\dfrac{r}{R}Q$.小球电量 $-q$ 不变,空腔电场分布不变,但小球电势会变,根据叠加原理,设小球电势变为 U',

$$U'=k\frac{(-q)}{r}+k\frac{q}{R}=-kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)=-k\frac{r}{R}Q\frac{R-r}{rR}=-kQ\frac{R-r}{R^2}$$

说明小球电势变为负.电场线由零电势的球壳内表面指向小球.

(4) 小球移出壳外,小球电量和球壳电量都不变,设小球电势变为 U_1,球壳电势变为 U_2,根据叠加原理有

$$U_1=k\frac{(-q)}{r}+k\frac{q}{d}=-kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d}\right)=-k\frac{r}{R}Q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d}\right)=-kQ\frac{d-r}{Rd}$$

$$U_2=k\frac{q}{R}+k\frac{(-q)}{d}=kq\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d}\right)=k\frac{r}{R}Q\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d}\right)=kQ\frac{r(d-R)}{R^2d}$$

点评:对静电场产生的电势问题,做一个简单的小结:① 电势的定义式是 U

$=\frac{\varepsilon_p}{q}$，U 是标量，其大小和符号完全跟 q 无关. ② 选定无穷远处和大地作零电势参考面，决定电势符号正负的惟一因素就是 Q，对于一切电场必有 $|U|\propto Q$，比如真空中点电荷 Q 产生的电势公式为 $U=k\frac{Q}{r}$. 正的 Q 产生的电势总是正的，离场源 Q 越近电势越高. 负的 Q 产生的电势总是负的，离场源 Q 越近电势越低. ③ 对于均匀带电的导体球面，设球半径为 R，电量为 Q，则它在球内 $r<R$ 处产生的电势 $U=k\frac{Q}{R}$ 是定值，表示整个球是个等势球；在球外，等效于把全部电荷 Q 集中于球心处的点电荷，即在 $r>R$ 处，$U=k\frac{Q}{r}$. ④ 关于电势的叠加原理，可表述为：空间任一点的电势等于各个点电荷单独存在时各自在该点产生的电势的代数和.

A8. 在点电荷 q 的电场中放入一个半径为 R 的接地导体球，从 q 到该球球心的距离为 l，求导体球对点电荷 q 的作用力.

分析： 因静电感应在球面左侧产生与 q 异号的电荷 $-q'$，$-q'$ 在球面的分布是个复杂问题，因而 $-q'$ 对 q 的力也是个复杂问题. 把 $-q'$ 看成无限多个点电荷的集合，利用库仑定律和叠加原理，原则上我们可以求出这个力，但要借助高等数学工具. $-q'$ 本身不是点电荷，一种可行的常用的思路是，在球内寻找一个点电荷 q''，这个 q'' 在球内外空间产生的电场（包括 E 矢量和电势 U），跟面分布的 $-q'$ 产生的电场完全等效. 这个 q'' 对 q 的作用力才可等效于导体球对 q 的作用力.

解： 如图 1-11 所示. 由于 $-q'$ 的面分布有轴对称性，q'' 肯定在 qO 连线上. 因导体球接地，所以 q'' 与 q 在球面上各自贡献的电势合成必为零. 在球面上任选一点 P，θ 为任意角，则

$$k\frac{q}{x_1}-k\frac{q''}{x_2}=0 \qquad ①$$

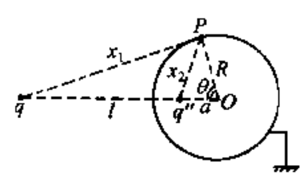

图 1-11

设 q'' 到 O 点的距离为 a，根据余弦定理，

$$x_1^2=l^2+R^2-2lR\cos\theta$$

$$x_2^2=a^2+R^2-2aR\cos\theta$$

代入①式变形化简后可得

$$\frac{q}{\sqrt{l^2+R^2-2lR\cos\theta}}=\frac{q''}{\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta}}$$

$$q^2a^2+q^2R^2-2q^2aR\cos\theta=q''^2l^2+q''^2R^2-2q''^2lR\cos\theta \qquad ②$$

②式对于球面上任意 P 点、任意 θ 角都必须成立，条件是要满足下面的方程

组：

$$\begin{cases} q^2a^2+q^2R^2=q''^2l^2+q''^2R^2 & ③ \\ q^2aR=q''^2lR & ④ \end{cases}$$

由 $a=l\dfrac{q''^2}{q^2}$,代入③式得

$$\frac{l^2}{q^2}q''^4-q''^2(l^2+R^2)+q^2R^2=0$$

解得

$$q''=\begin{cases} q & （舍去）\\ \dfrac{R}{l}q \end{cases}$$

对应的 $a=\dfrac{R^2}{l}$，q'' 与 q 反号.

因此，导体球对 q 的吸引力等于 q'' 对 q 的吸引力等于球面分布的感应电荷 $-q'$ 对 q 的吸引力等于 $k\dfrac{qq''}{(l-a)^2}=k\dfrac{q^2Rl}{(l^2-R^2)^2}$.

讨论：本例求出的点电荷 q'' 位于球内距离 O 点为 $a(<R)$ 处，它在球内外产生的场跟球面分布的感应电荷 $-q'$ 产生的场完全等效，我们称 q'' 为 q 的电像.

A9 如图 1-12 所示，4 个半径为 $a(a\ll r)$ 的相同导体球位于边长为 r 的正方形的 4 个顶点上，球 1 带电 Q，用金属丝依次连接球 1 和球 2，球 1 和球 3，球 1 和球 4，最后连接球 1 和地. 设每次接通都能达到静电平衡. 不计金属丝上可能带的电荷，求流入大地的电量.

分析：每次都能达到静电平衡，就是每次接触金属丝两端都能达到等势. 但每一端的电势都要计及各个电荷的贡献，都要进行叠加.

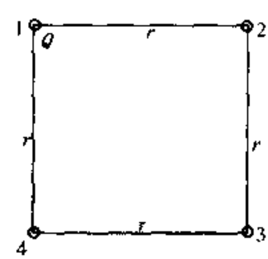

图 1-12

解：球 1 接触球 2 且平衡后，球 1 带 $\frac{1}{2}Q$，$q_2=\frac{1}{2}Q$. 球 1 接触球 3 且平衡后，由于分布具有对称性，即球 1 与球 3 以球 2 和球 4 的对角线对称，球 2 与球 1 的电荷在球 1 上产生的电势跟球 2 与球 3 的电荷在球 3 上产生的电势相等（注意，如果球 1 先接触球 2 后接触球 4，就没有对称性了），所以，球 1 带电量变为 $\frac{1}{4}Q$，$q_3=\frac{1}{4}Q$.

球 1 接触球 4，平衡后 4 个电荷的分布已不具备对称性，但必有 $U_1=U_4$. 这时 4 个电荷（除 q_2 与 q_3 外，另设 q_1' 与 q_4）在球 1 上和球 4 上都贡献电势，U_1 与 U_4 分