第八章 稳定性分析

8—1 引 言（8—1，8—2，8—3）

随着描述系统的微分方程由线性时不变方程变为线性时变方程再变为非线性方程，动力学系统稳定性分析的复杂程度也在急骤的增长。各种各样的稳定性判据可应用于线性时不变系统。只有几种方法可以用于线性时变系统和非线性系统的稳定性分析。大多数方法在它们的应用中受到很大限制。

在这一章中将要介绍用于线性时不变系统的Routh—Hurwitz稳定性判据和应用于线性及非线性系统稳定性分析的Liapunov方法（Liapunov第一方法和Liapunov第二方法。）我们将要把很大注意力放在Liapunov第二方法上，这种方法不用解方程就可以提供出关于线性和非线性微分方程稳定性的信息；因此，Liapunov第二方法被称为Liapunov直接法。通常，因为非线性微分方程的一些明显的解是无法得出的，因此，Liapunov第二方法对于研究非线性系统的稳定性是十分有用的，这种方法提供了非线性系统平衡状态的渐近稳定性的充分条件还提供了线性时不变系统平衡状态渐进稳定性的必要和充分条件。除稳定性分析之外，Liapunov第二方法在设计一个稳定的最佳控制系统中也是十分有用的。

本节的下一部分我们将给出在动力学系统稳定性分析中所必需的一些术语的定义。

系统 在本章中我们考虑的系统是：

$$\dot{x}=f(x,t) \qquad (8—1)$$

这里x是状态向量（n维向量），f（x，t）是n维向量，它的元素是x_1，x_2……，x_n和t的函数。我们将假定解具有唯一性和解对于初始条件的连续相关性。我们把方程（8—1）的解表示为$\Phi(t, x_0, t_0)$，其中在$t=t_0$时刻上$x=x_0$而t是观测时间。于是

$$\Phi(t_0; x_0, t_0) = x_0$$

运动　在定义稳定性，渐近稳定性和不稳定性时，我们将多次使用"运动"这个词。运动的定义是指从n维状态空间的任意一个状态或任意一点发出的轨迹。

平衡状态　在方程（8—1）的系统中，状态xe称为系统的平衡状态，其中

$$f(x_e, t) = 0 \quad \text{对于所有的} t \qquad (8—2)$$

如果系统是线性时不变的，即f(x，t）＝Ax，当A是非奇异的时，则存在唯一的一个平衡状态；而当A是奇异的时，则存在无穷多的平衡状态。平衡状态相应于系统的常数解（对于所有的t，$x=x_e$）。平衡状态的确定并不能包含系统微分方程（8—1）的解，而只是方程（8—2）的解。

如果平衡状态彼此是孤立的，则称它们为孤立平衡状态。通过坐标转换可以将任何一个孤立平衡状态移动到坐标原点，即f(0，t)＝0。在本书中我们涉及的是只有孤立平衡状态的稳定性分析。因此，本书中所说的平衡状态都应理解为孤立平衡状态。（现有的稳定性理论大多数涉及的都是孤立平衡状态的稳定性，渐进稳定性和不稳定性。）

稳定性　如果对于每个实数$\epsilon>0$都存在实数$\delta(\epsilon, t_0)>0$，使得下列不等式成立

$$\|x_0 - x_e\| \leqslant \delta$$

即　$$\|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leqslant \epsilon \quad \text{对于所有的} t \geqslant t_0$$ 则

称方程（8—1）系统的平衡状态 x_e 是稳定的。实数 δ 与 ϵ 有关，并且通常也与 t_0 有关。如果 δ 与 t_0 无关，则平衡状态称之为一致稳定的。图 8—1 表示的是二维系统的稳定平衡状态 x_e 和从 x_0 发出的典型轨迹。在图 8—1 中，$S(\epsilon)$ 和 $S(\delta)$ 分别表示围绕平稳状态 x_e 半径为 $\epsilon>0$ 和 $\delta>0$ 的圆形区域。〔在 n 维状态空间的情况下任何一个封闭的有界的面都可以用来代替圆。定义 $S(\epsilon)$ 和 $S(\delta)$ 域。〕$S(\epsilon)$ 由满足 $\|x-x_e\|<$ 的状态 x 组成。从图中可见，对于每个 $S(\epsilon)$ 都存在一个 $S(\delta)$，使得在 $S(\delta)$ 中从状态 x_0 开始的运动不会脱离 $S(\epsilon)$，就是说 x_0 在 $S(\delta)$ 中也就意味着对于所有 $t\geqslant t_0$ 都有 $\Phi(t, x_0, t_0)$ 在 $S(\epsilon)$ 中。因此，在 $S(\delta)$ 中开始的运动决不会到达 $S(\epsilon)$ 的边界圆 $H(\epsilon)$。

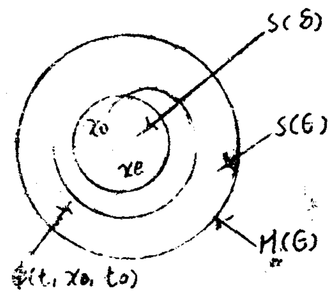

图 8—1 稳定的平衡状态 x_e 和由 x_0 点发出的典型轨迹

对于给定的 $\delta>0$ 如果存在常数 $\epsilon(\delta, t_0)$ 使得

$$\|x_0-x_e\|\leqslant\delta$$

也即是 $\|\Phi(t, x_0, t_0)-x_e\|\leqslant(\delta, t_0)$ 对于所有 $t\geqslant t_0$ 则称方程（8—1）的解为有界的。如果 ϵ 与 t_0 无关，则称解是一致有界的。

渐近稳定性　如果 x_e 是稳定的，并且随着 t 的无限增大从状态 x_0 开始，每个解都充分接近收敛于 x_e，则称方程（8—1）系统的平衡状态 x_e 为渐近稳定的。即，给定二个实数 $\delta>0$ 和 $\mu>0$，存着实数 $\epsilon>0$ 和 $T(\mu, \delta, t)$ 使得

$$\|x_0-x_e\|\leqslant\delta$$

也就是 $\|\Phi(t; x_0, t_0)-x_e\| \leq \epsilon$ 对于所有 $t \geq t_0$

$\|\Phi(t; x_0, t_0)-x_e\| \leq \mu$ 对于所有 $t \geq t_0+T(\mu, \delta, t_0)$

图8—2(A)所示为二阶系统的渐近稳定平衡状态 x_e 和从 x_0 开始的典型轨迹。图8—2(B)所示为时间改变时的典型轨迹。在这些图中，$S(\epsilon)$、$S(\delta)$ 和 $S(\mu)$ 分别是围绕平衡状态 x_e 半径为 $\epsilon>0$，$\delta>0$ 和 $\mu>0$ 的圆。如果平衡状态 x_e 是渐近稳定的，则在 $S(\delta)$ 中从 x_0 开始的运动不会脱离 $S(\epsilon)$，并且当时间无限增长时，收敛于原点。

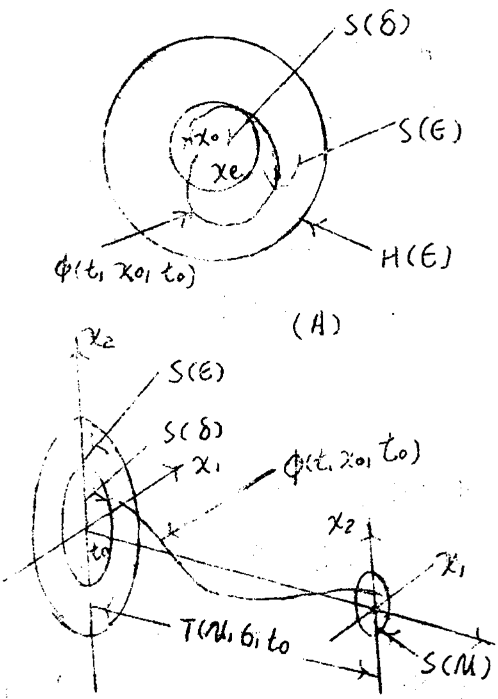

图8—2

(A)渐近稳定的平衡状态和从 x_0 开始的典型轨迹

(B)当时间变化时的典型轨迹图

事实上，渐近稳定性要比稳定性更为重要。因为渐近稳定性是个局部概念，只有渐近稳定性并不意味着系统就能正确运行。对于渐近稳定性最大区域的大小的认识通常是必要的。这种渐近稳定性的最大区域称为引力域。它是状态空间的一部分，这里是渐近稳定运动的起源。换句话说，起源于引力域的每个运动都是渐近稳定的。

大范围渐近稳定性　如果发出运动的所有状态（状态空间的所有点）都是渐近稳定的，则称平衡状态为大范围渐近稳定的。即，如果

x_e是稳定的，并且当t无限增大时，每个解都收敛于x_e，则方程（8—1）所给定系统的平衡状态x_e就称为大范围渐近稳定的。显然，大范围渐近稳定性的必要条件是在整个状态空间中只有一个平衡状态。

在控制工程问题中，希望具有大范围渐近稳定特性。如果系统的平衡状态不是大范围渐近稳定的，那么问题就成为确定出渐近稳定性的最大区域，这通常是非常困难的。为了实际应用，就要使得渐近稳定区域足够大，从而使扰动不能超过它。

不稳定性 如果平衡状态既不是稳定的，也不是渐近稳定的，则称这样的平衡状态为不稳定的。图8—3所示为二阶系统不稳定的平衡状态x_e和从x_0开始的典型轨迹。如同在图8—3中所看到的，在不稳定平衡状态的情况下，对于某个实数$\varepsilon>0$和任意一个无论如何小的实数$\delta>0$，在圆域$S(\delta)$内始终存在状态x_0使得从该状态开始的运动脱离$S(\varepsilon)$的边界圆$H(\varepsilon)$。

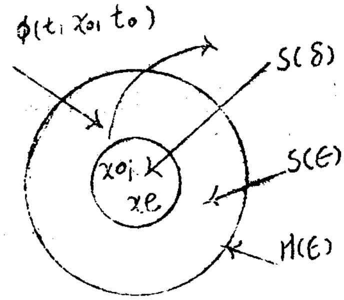

图8—3 不稳定的平衡状态和从x_0开始的典型轨迹

上述的一些定义是为了掌握本章所要介绍的线性和非线性系统稳定性分析所应具有的最基本的要求。要指出的是这些定义并不是平衡状态稳定性概念的唯一定义。实际上在其他著作中采用了各种不同方式去定义稳定性概念。但是在本章中，我们对于稳定性分析的讨论，都是以上面给出的定义为基础。

本章提要 本章的下几节将要介绍用于线性时不变系统的经典的Routh—Hurwitz稳定性判据（8—2节），Liapunov第一方法（8—3节）；Liapunov第二方法的基本原理（8—4节）；

利用Liapunov第二方法进行线性时不变系统的稳定性分析（8—5节）；Routh—Hurwitz稳定性判据的证明（8—5节）；非线性系统的稳定性分析（8—6节）；离散时间系统的稳定性分析（8—7节）；Liapunov第二方法应用于系统设计的简要讨论（8—8节）。

8—9 节为结语。

8—2 Routh和Hurwitz稳定性判据

线性时不变系统的稳定性分析之所以重要，不仅仅因为很多实际的系统可以用线性时不变模型加以近似，而且还因为非线性系统平衡状态的局部稳定性可以通过线性化的方法得到的线性时不变模型的稳定性来加以研究。

考虑系统

$$\dot{X} = AX$$

其中X是状态向量（n维向量），A是n×n非奇异矩阵。很明显其平衡状态是原点X＝0。这个方程解的特性可以根据A的本征值来确定，或根据下列方程的特征根来加以确定：

$$|A-\lambda I| = 0$$

如果特征方程的系数是实数，那么这个方程的根不是实数就是复数共轭的。如果有P个不同的根，那么解X的n个分量可以写为

$$x_i = \sum_{i=1}^{p} g_{ij}(t)e^{\lambda_j t} \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

其中λ_j是A的不同本征值，$g_{ij}(t)$是常数或者是t的多项式。如果A的所有本征值都有负实部，那么系统的平衡状态λ＝0是渐近稳定的。

一旦我们求得了A的多项式，那么各种稳定性判据都可以用来确

定是否所有的根都有负实部。在这种情况下通常使用的二个判据是本节要介绍的。它们是Routh稳定性判据和Hurwitz 稳定性判据。（虽然看起来这二个稳定性判据似乎是彼此不同的，实际上它们是等价的，并且提供相同的关于稳定性的信息。）

下面我们先介绍Routh稳定性判据，然后再介绍Hurwitz稳定性判据。这二个稳定性判据的证明在8—5节中给出。

Routh稳定性判据　考虑下面具有常系数的多项式：

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (8-3)$$

这里系数a是实数。〔往往将方程（8—3）除以a_0使得λ^n的系数为1。〕

如果多项式具有常系数，并且已知系数是已给定的，则Routh稳定性判据给出了为使所有的根都为负实部多项式的系数所应满足的条件。〔这个条件也就等价于特征方程，由公式（8—3）所描述系统的平衡状态是渐近稳定的。〕如果具有常系数的多项式已给定，Routh稳定性判据可以确定多项式有多少根有负实部，有多少根具有正实部，有多少根具有零实部。

利用这个判据进行稳定性分析的步骤如下：

1. 如果公式（8—3）的系数至少有一个是正系数，同时其它系数为零或者为负数，那么至少存在一个零根，或者至少有一个具有正实部的根，或者有一些虚根。（因此，在这种情况下系统不是渐近稳定的，如果渐近稳定性已确定，就没有必要再进行下面的步骤了。）可见所有的系数a都是正的是个必要条件。这可从下面叙述中看出：具有实系数的λ的多项式总是可以因式分解为线性的和二次因式，例如（λ＋a）和（$\lambda^2+b\lambda+c$），这里a，b和c是实数。线性因式形

成实根，而二次因式则形成多项式的复根，只有当 b 和 c 二者为正数时，因式（$\lambda^2+b\lambda+c$）才形成具有负实部的根 为了使所有的根部具有负实部，在所有因式中的常数 a，b，c 等等都必须是正的。由若干只包含有正系数的线性和二次因式的乘积所形成的多项式始终具有正的系数。然而，所有的系数都是整数这一条件对于确保稳定性并不充分。稳定性的必要（但不充分）条件是公式（8—3）的系数 a 必须全部出现，并且必须全具有正符号。（如果所有的系数 a 都是负的，可以通过将方程两边同乘以－1而变为正的。因此，我们只须考虑正号的情况。）

2 如果所有系数 a 都是正的，则将这些系数按如下方式将它们按行和列排列起来：

λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	……	——第一行
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	……	——第二行
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4		
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4		……
	⋮	⋮	⋮	⋮	…	……
λ^3	d_1	d_2	0			
λ^2	e_1	e_2	0			
λ^1	f_1	0				
λ^0	g_1					
	↑					
	第一列					

系数 b_1，b_2，b_3等是按下式求得的：

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$

$$b_3=\frac{a_1a_6-a_0a_7}{a_1}$$

………………………………

………………………………

对于 b 的计算一直继续到其余的 b 值全等于零时为止。这种将不同二行系系数进行斜乘的办法，也可用来计算系数 c，d，e 等等。

即：

$$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1}$$

$$c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$$

$$c_3=\frac{b_1a_7-a_1b_4}{b_1}$$

………………………………

………………………………

$$f_1=\frac{e_1d_2-d_1e_2}{e_1}$$

并且 $g_1=e_2$

（系数的计算一直继续到第（n+1）行完成为止。系数的 Routh 陈列是三角形的。）需要指出的是在形成陈列时，可以对整个一行乘以或除以一个正数，以便在不影响稳定性的同时简化数值计算。Routh 稳定性判据的内容是具有正实部的多项式的根的个数等于第一列的系数符号改变的次数。因此，在第一列中各项的具体数值并不需要知道，而只需要知道各项的符号。方程（8—3）的所有根都有负实部的必

要和充分条件是方程（8—3）的所有系数a都是正的，并且陈列中第一列的所有各项都具有正号。

例8—1　如果将Routh稳定性判据应用于下面的三阶多项式：

$$a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$$

这里所有的系数a都是正数，那么系数的Routh陈列为：

λ^3	a_0	a_2
λ^2	a_1	a_3
λ^1	$\dfrac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$	0
λ^0	a_3	

所有根都具有负实部的条件是由 $a_1a_2>a_0a_3$ 给出的。当多项式的阶数增加时，渐近稳定性的条件也就变得更复杂。

例8—2　研究下面的例题

$$\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5=0$$

下面的过程完整地表示出了系数的Routh陈列的组成。前面二行可直接由多项式给定的系数得出。其余的各项可由给定的计算方法求出。（如果某些系数不存在，可在陈列中用零来代替。）

	λ^4	1	3	5
	λ^3	2	4	0
一次符号改变	λ^2	1	5	0
一次符号改变	λ^1	−6		
	λ^0	5		

	λ^4	1	3	5
	λ^3	1	2	0 ←第二行除以2
一次符号改变	λ^2	1	5	0
一次符号改变	λ^1	−3	0	
	λ^0	5		

在该陈列中第一列系数符号改变的次数是2。就是说存在二个具有正实部的根。该例题证明了为了简化系数的计算而将某一行的系数乘以或

除以一个正数并不影响结果。

3. 如果某一行第一列的项为零，而其余的项不是零，可用一个非常小的正数 ϵ 来代替这个零项，并对阵列的其它各项进行计算。

例 8 — 3 考虑下面的方程

$$\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2=0 \qquad (8-4)$$

系数的 Routh 阵列为：

λ^3	1	1
λ^2	2	2
λ^1	$0\approx\epsilon$	0
λ^0	2	

如果在零(ϵ)上面的系数和它下面的系数符号相同，则表明存在一对虚根。实际上方程(8 — 4)有根 $\lambda=j$ 和 $\lambda=-j$，然而如果零(ϵ)上面的系数与下面的系数符号相反，则表明存在一次符号改变。例如，对于下面的方程：

$$\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

它的系数阵列是：

	λ^3	1	-1
一次符号改变	λ^2	-2	2
	λ^1	$0\approx\epsilon$	0
一次符号改变	λ^0	2	

因此，在第一列中有二次符号改变，这与多项式方程分解因式形式所指出的正确结果是一致的。

4. 如果某个导出行的所有系数都为零，则表明存在一对或 n 对具有相同幅值但符号相反的实根，和/或存在一对或 n 对共轭虚根。

在这种情况下，陈列其余项的计算可用如下方法继续进行。利用零行上面一行的系数组成一个辅助多项式，并取这个辅助多项式导数的系数作下一行。这种具有相同幅值但符号相反的根，可以通过求解始终为偶次的辅助多项式而求得。对于 2n 阶的辅助多项式，有 n 对等幅值反号的根。

例 8—4　考虑下面的方程

$$\lambda^5+2\lambda^4+24\lambda^3+48\lambda^2-25\lambda-50=0$$

系数的 Routh 陈列为：

λ^5	1	24	−25
λ^4	2	48	−50 → 辅助多项式 $P(\lambda)$
λ^3	0	0	

λ^3 行的各项全为零。因此辅助多项式可由 λ^4 行的系数组成。辅助多项式 $P(\lambda)$ 为：

$$P(\lambda)=2\lambda^4+48\lambda^2-50$$

它表明有二对等值反号的根。可以通过求解辅助多项式 $P(\lambda)=0$ 来求得这二对根。将 $P(\lambda)$ 对 λ 求导数可得：

$$\frac{dp(\lambda)}{d\lambda}=8\lambda^3+96\lambda$$

λ^3 行的各项可用上式的系数来代替，即用 8 和 96 代替。因此，系数陈列变为：

λ^5	1	24	−25	
λ^4	2	48	−50	
λ^3	8	96	0	← $\frac{dp(\lambda)}{d\lambda}$ 的系数
λ^2	24	−50	0	

	λ^1	112.70
一次符号改变	λ^0	−50

由此可见，新陈列第一列中有一次符号变化。因此，原来的方程有一个具有正实部的根。求解辅助多项式方程：

$$2\lambda^4+48\lambda^2-50=0$$

的根我们可得：$\lambda=\pm1$或$\lambda=\pm5j$

这二对根是原来方程根的一部。事实上原来的方程可写成如下因式分解形式：

$$(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+5j)(\lambda-5j)(\lambda+2)=0$$

显然，原来的方程有一个具有正实部的根。

二 最后要指出，如果对方程（8—3）作如下的代换：

$$\lambda=\mu-\delta$$

其中δ是个常数，并用μ来构成多项式。那么应用Routh稳定性判据可以指出实部大于$-\delta$的根的数目。即Routh陈列第一列符号改变次数这种方法推广到μ的多项式时，就变为实部大于$-\sigma$的根的数目。

Hurwitz稳定性判据 Hurwitz稳定性判据给出的是这样的条件，即为了使所有的根都具有负实部公式（8—3）所给出的多项式的系数应满足的条件。如同上述讨论一样，为使所有的根都具有负实部所有的系数a都必须是正的。这是一个必要条件但不充分。如果这个条件不满足，则表明存在某些根，它们具有正实部或虚数或为零。所有的根都具有负实部的充分条件在下面给出：如果多项式所有系数都是正的，正的，将这些数字排列成下面的行列式：

$$
\Delta_n=\begin{vmatrix}
a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\
a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & a_1 & a_3 & \cdots\cdots & \cdots a_n & 0 & 0\\
0 & a_0 & a_2 & \cdots\cdots & a_{n-1} & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & a_{n-2} & a_n & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n
\end{vmatrix}
$$

这里如果 $s>n$ 我们用零代替 a_s，或写为：

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0\\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & 0\\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot\\
0 & \cdot & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4}\\
0 & \cdot & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\\
0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n
\end{vmatrix}
$$

为了稳定性，或为使所有根具有负实部，必须使 Δ_n 的逐次主子式为正的。逐次主子式是下面一些行列式：

$$
\Delta_i=\begin{vmatrix}
a_1 & a_3 & \cdots & a_{2i-1}\\
a_0 & a_2 & \cdots & a_{2i-2}\\
0 & a_1 & \cdots & a_{2i-3}\\
\cdot & \cdot & & \cdot\\
\cdot & \cdot & & \cdot\\
\cdot & \cdot & & \cdot
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0\\
a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\
a_5 & a_4 & \cdots & 0 & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & & \cdot &
\end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2i-1} & a_{2i-2} & \cdots & a_i \end{vmatrix}$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

上式中如果 $s>n$ 则 $a_s=0$。（可见低阶行列式的某些条件是包含在较高阶的行列式的条件中。）如果所有这些行列式都是正的，并且如同已假定的那样 $a_0>0$，那么特征方程由方程（8—3）给定的系统的平衡状态是渐近稳定的。这里并不需要行列式的具体数值，而只需要知道这些行列式的符号就可以确定稳定性。

例 8—5　对于下面的特征方程

$$a_0\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda^1+a_4=0$$

渐近稳定性的条件是所有的系数 a 都是正的，并且

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}=a_1(a_2a_3-a_1a_4)-a_0a_3^2$$

$$=a_3(a_1a_2-a_0a_3)-a_1^2a_4>0$$

显然，如果所有的 a 都是正的，并且 $\Delta_3>0$ 这一条件得到满足，则条件 $\Delta_2>0$ 也是满足的。因此，为使给定的特征方程的所有根都具有负实部，其必要和充分条件是所有的系数 a 都应是正的，并且 $\Delta_3>0$。

Routh 稳定性判据和 Hurwitz 判据的等价　Routh 稳定性判据和 Hurwitz 稳定性判据的等价关系是容易建立的。如果我们将 Hurwitz 行列式写成三角形的：

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \bullet \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

上式中在主对角线左下方的元素为零，在主对角线右上方的元素为零或非零，因此

$$\Delta_i = a_{11}\, a_{22} \;\cdots\cdots\; a_{ii} \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

利用这个事实可将 Hurwitz 条件

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \cdots\cdots, \Delta_n > 0$$

简化为如下条件：

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{33} > 0, \cdots\cdots, a_{nn} > 0$$

不难看出，利用 Routh 陈列式中的 a_1，b_1，c_1 等等，可将 a_{11}，a_{22}，a_{33}，…表示为：

$$a_{11} = a_1, \quad a_{22} = b_1, \quad a_{33} = c_1, \cdots\cdots$$

因此，渐近稳定性的 Hurwitz 条件变为：

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \cdots\cdots$$

这就是渐近稳定性的 Routh 条件。（详细内容见习题 A—8—3）这样 Routh 稳定性判据和 Hurwitz 稳定性判据的等价关系就建立起来了。

8—3 Liapunov 第一方法（8—4）

Liapunov 第一方法由若干过程组成，对于确定稳定性来说，其中的每个过程都要用到解的具体形式。在这种方法中，如果存在一个以上的平衡状态，则要对每个状态分别进行研究。

8—17

考虑非线性系统：

$$\dot{X}=f(X) \qquad (8-5)$$

其中X是状态向量（n维向量），f(X)是n维向量，并且它对于x_1，x_2……，x_n是连续可微的。现在我们将非线性向量函数f(X)在所讨论的平衡状态X_e上展开成泰勒级数。引入新的向量Y=X－X_e可将平衡状态移动到原点。通过将f(X)在X＝X_e点展开成泰勒级数，方程（8—5）变为：

$$\dot{Y}=AY+G(Y)Y$$

其中A是n×nJacobian矩阵，它等于

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

这里f_1，f_2，……，f_n是f(X)的n个分量。出现在Jacobian矩阵A中的所有偏导数都是在平衡状态X＝X_e或Y＝0点求取的。n×n矩阵G(Y)是由泰勒级数展开式中的高阶导数项组成的。G(Y)的元素在平衡状态是变为零。因此，可在原点附近将方程（8—5线性化表示为：

$$\dot{Y}=AY$$

公式（8—6）是对非线性方程（8—5）的一次近似。我们称方程（8—6）是通过对方程（8—5）进行线性化所求得的。