

2005年 高考总复习



高考三人行

高考三人行 状元直通车

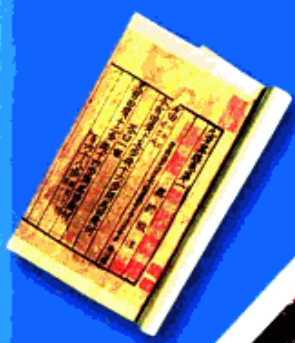
- ◎ 根据2004年《考试大纲》课程标准编写
- ◎ 由国家特、高级教师担纲编辑审定

学生用书

丛书主编 孙继民



数学



远方出版社

决胜高三——与巨人同行

子曰“三人行，必有我师焉！”《高考三人行》正是以先哲的至理名言为契机蕴育成书的。三人者，致力于高考命题研究的专家、耕耘在一线的名校名师、努力拼搏的莘莘学子也！只有这三者的完美结合，高考战场上你才能所向披靡，气势如虹！

牛顿曾经说过这样一句话：“我是站在巨人肩膀上看世界的”。一个人的学识、精力和时间是极有限的，只有擅于吸收他人的研究成果，你才能站得更高、看得更远。《高考三人行》正是深怀这个理念，力邀高考命题研究方面的资深专家担纲策划，众多名校一线教师参与编写，因此它能够紧跟高考的命题趋势，把握高考的最新动向。同时，针对学习中常见的薄弱环节，有的放矢的进行强化训练，使学生在高三复习中“会当凌绝顶，一览众山小”。而学生在使用本丛书的过程中所产生的疑问会及时地反馈回来，在《高考三人行》的修订中得以体现。如此互动、循环往复、生生不息，使《高考三人行》得到不断的完善。

十载寒窗、一朝决战，生死一线、成王败寇，其中的激烈和残酷是不难想象的。怎样才能立于不败之地？怎样才能脱颖而出？当你拥有和别人同样的天赋和内因时，《高考三人行》能助你一臂之力，让你达到内因和外因的完美结合。

站在巨人的肩膀上！

与巨人同行！！

决胜高三!!!

GAOKAOSANRENXING

修 订 说 明

科学有效的学习必须通过科学的训练才能达到深化知识、提升能力、发展思维的最高境界。一本高质量的教辅用书是使学生的知识纯熟升华的助力器。《高考三人行》(地理分册)的修订求真务实,符合学生学习备考的实际,适合教师教学备课的要求,既能引导学生完善知识体系、学会学习方法、培养创新能力,也能免去使用本书的教师批检求索之劳苦。

本书的修订精益求精、质量上乘,充分体现了知识的综合性和整体性。本书能从学生的学习实际出发,把握时代信息,既注重基本知识的训练,又注重整合能力的培养。删掉了陈旧老化的试题和与高考无关的内容,调整了部分章节的知识结构,精心创设增补了体现时代气息、符合课改要求的新型试题,增加了读图试题,进一步突出了地理学科的特点及能力要求。本书试题难易适度,便于不同层面的学生复习备考。本书数易其稿、反复审校,体系更为科学,知识更为完备,题型更为新颖,解析更为精当,表述更为严谨。

新版《高考三人行》(地理分册)修订的依据如下:

①依据最新《考试大纲》对学生的多层次要求,依据教学大纲素质教育的理念,依据新版教材(人教版)的变化,对本书进行了重点增补替换,删改了不符合要求和时代感不强的章节,体现了本书“新颖”、“精当”、“实用”的特点和风格。

②依据教材内容和教材的知识体系,对原版《高考三人行》进行了全方位的修订,我们一线教师在认真领会教材之后,抓住单元的重点、难点,以及各知识点之间的相互联系,从多角度创设试题,使学生见多识广,增强信心,为参加高考奠定坚实的基础。

③依据地理学科的特点,突出了新版的系统性。地理学科虽然知识繁杂,但前后联系明显,该书修订中特别注重单元的知识联系和知识间的因果关系,突出了单元知识的横纵向联系,使学生的知识由零散到有序,由零乱到清晰。

④依据具体要求编写试题,详析例题。教辅用书就是要为学生所用,要符合现代学生的认知要求,深知学生在学习进程中必然遇到的重点和难点,才能在例题解析、强化训练的过程中逐一加以解决。最后掌握适于自己解决问题的技能、技巧和方法,实现质的飞跃。

我们真诚希望本书能成为学生学习和教师教学的“益友知音”,我们也真诚希望各位专家、教师、学生提出宝贵意见,祈盼本书能不断修正,渐趋完美。

——编者





目 录

第一章 集合与简易逻辑	(1)
课时1 集合的概念	(2)
课时2 集合的运算	(5)
课时3 含绝对值的不等式的解法	(8)
课时4 一元二次不等式的解法	(11)
课时5 简易逻辑	(15)
课时6 充要条件	(18)
课时7 本章小结	(21)
本章综合能力检测	(24)
第二章 函 数	(26)
课时8 映射与函数	(31)
课时9 函数的解析式与定义域	(34)
课时10 函数的值域	(37)
课时11 函数的奇偶性	(41)
课时12 函数的单调性	(44)
课时13 反函数	(48)
课时14 幂、指数式与对数式	(52)
课时15 指数函数与对数函数	(55)
课时16 函数的图象	(59)
课时17 函数的最值	(63)
课时18 函数的应用	(67)
课时19 本章小结	(71)
本章综合能力检测	(73)
第三章 数 列	(75)
课时20 数列的概念	(77)
课时21 等差数列	(80)
课时22 等比数列	(84)
课时23 等差数列和等比数列的性质及应用	(87)
课时24 数列求和	(90)
课时25 数列的应用	(93)
本章综合能力检测	(96)
第四章 三角函数	(99)





课时 26	角的概念及任意角的三角函数	(102)
课时 27	同角三角函数的基本关系	(106)
课时 28	两角和与差的三角函数	(109)
课时 29	三角函数式的求值	(112)
课时 30	三角函数式的化简与证明	(115)
课时 31	三角函数的图象	(118)
课时 32	三角函数的性质(1)	(122)
课时 33	三角函数的性质(2)	(126)
课时 34	三角函数的最值	(129)
课时 35	三角函数的应用	(132)
本章综合能力检测		(135)
第五章 平面向量		(137)
课时 36	向量与向量的初等运算	(139)
课时 37	平面向量的坐标运算	(143)
课时 38	平面向量的数量积	(145)
课时 39	线段的定比分点和平移	(148)
课时 40	解斜三角形及应用	(151)
本章综合能力检测		(154)
第六章 不等式		(156)
课时 41	不等式的概念与性质	(158)
课时 42	算术平均数与几何平均数	(162)
课时 43	不等式的证明(1)	(165)
课时 44	不等式的证明(2)	(168)
课时 45	不等式的解法	(171)
课时 46	含绝对值的不等式	(175)
课时 47	不等式的应用	(178)
本章综合能力检测		(180)
第七章 直线和圆的方程		(182)
课时 48	直线的方程	(184)
课时 49	两条直线的位置关系	(187)
课时 50	简单的线性规划	(190)
课时 51	曲线与方程	(193)
本章综合能力检测		(196)
第八章 圆锥曲线方程		(198)
课时 52	直线与圆的位置关系	(202)
课时 53	椭圆	(206)
课时 54	双曲线	(210)
课时 55	抛物线	(214)





课时 56 直线与圆锥曲线的位置关系	(217)
课时 57 轨迹问题	(220)
课时 58 圆锥曲线的应用	(222)
本章综合能力检测	(225)
第九章 直线、平面、简单几何体	(227)
课时 59 平面的基本性质	(230)
课时 60 空间直线	(232)
课时 61 直线和平面平行的判定及性质	(236)
课时 62 直线和平面垂直的判定及性质	(238)
课时 63 三垂线定理	(242)
课时 64 两个平面平行的判定和性质	(245)
课时 65 两个平面垂直的判定和性质	(248)
课时 66 棱 柱	(251)
课时 67 棱 锥	(253)
课时 68 空间向量及其运算	(257)
课时 69 空间向量的坐标运算	(260)
课时 70 多面体与欧拉公式	(263)
课时 71 球	(264)
本章综合能力检测(A 版本)	(267)
本章综合能力检测(B 版本)	(270)
第十章 排列、组合和概率	(273)
课时 72 两个计数原理	(274)
课时 73 排列组合应用题	(277)
课时 74 排列组合综合题	(279)
课时 75 二项式定理及其应用	(282)
课时 76 概率	(284)
本章综合能力检测	(288)
第十一章 概率与统计	(290)
课时 77 离散型随机变量的分布列	(291)
课时 78 离散型随机变量的期望与方差	(294)
课时 79 抽样方法、总体特征的估计	(298)
本章综合能力检测	(302)
第十二章 极限	(304)
课时 80 数列的极限	(306)
课时 81 函数的极限	(309)
课时 82 函数的连续性	(312)
本章综合能力检测	(315)
第十三章 导 数	(317)





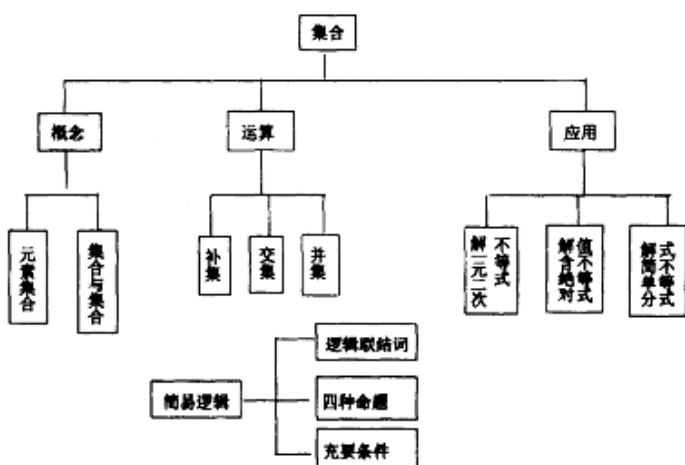
课时 83 导数的概念及性质	(318)
课时 84 导数的应用	(322)
本章综合能力检测	(325)
第十四章 复 数	(327)
课时 85 复数的有关概念	(328)
课时 86 复数的代数形式及其运算	(331)
本章综合能力检测	(334)





第一章 集合与简易逻辑

知识结构



高考要求

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合；掌握简单的绝对值不等式和一元二次不等式的解法。

2. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，理解四种命题及其相互关系，掌握充要条件的意义。

热点分析

考试热点之一是集合，主要考查以下两方面的内容：一是对集合基本概念的认识和理解的水平，比如集合表示法，集合中元素的互异性，元素与集合的关系，集合与集合的关系，集合的运算；二是考查对集合知识的应用水平，如求不等式和不等式组的解集，列不等式或不等式组，用解集解决相关问题。

在考查集合知识的同时突出考查准确使用数学语言

的能力和用数形结合的思想解决问题的能力。

考试热点之二是命题，主要考查两方面内容：一是命题的四种形式及原命题与逆否命题的等价性；二是充要条件的判定。

在考查命题知识的同时，还主要考查命题转换、逻辑推理和分析问题的能力。

复习建议

1. 把握本章的复习重点

①本章要解决的数学问题主要有三类：第一类是运用集合的语言、符号和“或”、“且”、“非”等逻辑联结词来解答有关集合和简易逻辑的基本概念的问题；第二类是解含绝对值不等式、一元二次不等式以及高次不等式和分式不等式。第三类是运用二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的相互关系解决不等式或方程中的参数问题。

②解决好上面三类问题的关键，一是要深刻理解、准确掌握集合、元素、子交并补、命题、充要条件等基





本概念和“或”、“且”、“非”等逻辑联结词的含义，以便更准确地解答有关集合简易逻辑的概念的问题；二是强化数形结合思想，自觉地运用文氏图、数轴、二次函数的图像的直观性，帮助分析和理解，提高形象思维能力，进一步提高抽象思维能力。

2. 加强数学思想方法的复习

本章运用的主要数学思想方法有数形结合思想、分类讨论思想、函数方程思想、等价转化思想、配方法、反证法等。

高·考·题·例·选

1. (2000 全国 - 文 - 1) 设集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq x \leq -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 5\}$, 则 $A \cup B$ 中的元素个数是 ()

A. 11 B. 10 C. 16 D. 15

[分析] 本题主要考查集合元素属性的辨识能力；文、并集的概念；绝对值不等式的几何意义及数形结合思想方法应用能力等；基础较扎实的考生可不动笔得出正确结论：关键是

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

[答案] C

2. (2001 上海 - 理 B) $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的 ()

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

[分析] 本题主要考查直线方程、两条直线平行的概念；充要条件概念；命题的构成与真伪推断能力；关键是逆命题的构成与真伪判断，已知两直线平行且不重合时，只能有 $a=3$ ，故选 C。

[答案] C

3. (2001 全国 - 15) 在空间中，①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线 ②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线。以上两个命题中，逆命题为真命题的是_____。(把符合要求的命题的序号都填上)。

[分析] 本题主要考查四点共面、异面直线的概念；命题的构成及真伪推断能力；要求较低，只要概念清晰易知，②的逆命题为真。

说明：高中数学教学大纲是高中数学科教学和高考命题的重要依据，而教材是贯彻教学大纲的重要载体，研习教材是学生获取数学知识，形成能力的主要途径。从 2001 年高考数学试卷可以看到，试题严格要求遵循教学大纲和依据教学大纲而制定的《考试说明》，有一定数量的试题直接源自教材，这就要求我们在教学过程中要紧扣教材和大纲，全面、系统地抓好对基础知识、基本技能、基本思想和方法的教学，对章节的内容要注重全面，更要突出重点，对重点内容、通理法要讲清讲透。

4. (2001 年春北京 - 1) 若集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集个数是 ()

A. 32 B. 31 C. 16 D. 15

[答案] A

5. (2001 年上海 11) 已知两个圆： $x^2+y^2=1$ ①与 $x^2+(y-3)^2=1$ ②，则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程，将上述命题在曲线仍为圆的情况下加以推广，即要求得到一个更一般的命题，而已知命题应成为所推广命题的一个特例，推广的命题为：_____

[答案] 设圆的方程： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ①
 $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ ②
($a \neq c$ 或 $b \neq d$)，则由① - ②，得两圆的对称轴方程。

6. (2002 年北京春理 1) 不等式组 $\begin{cases} x^2-1 < 0 \\ x^2-3x < 0 \end{cases}$ 的解集是 ()

A. $\{x \mid -1 < x < 1\}$ B. $\{x \mid 0 < x < 3\}$
C. $\{x \mid 0 < x < 1\}$ D. $\{x \mid -1 < x < 3\}$

[答案] C

7. (2003 年上海 - 6) 设集合 $A = \{x \mid x < 4\}$; $B = \{x \mid x^2-4x+3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____。

[答案] $[1, 3]$

课时 1 集合的概念

要·点·归·纳

一、集合的有关概念

1. 集合是原始概念不能定义，只能描述说明，某些指定对象集在一起就成为一个集合。

构成集合的元素常见的有数、点、式，也有一些其他对象。

2. 集合中元素的三大特性

①确定性 ②互异性 ③无序性

3. 集合的表示法

①列举法 ②描述法 ③图示法 (这里指的是文氏图法)。

4. 集合的分类：

①有限集 ②无限集

5. 常用数集的符号： $\mathbb{N}$ (自然数集)、 $\mathbb{Z}$ (整数集)、 $\mathbb{Q}$ (有理数集)、 $\mathbb{R}$ (实数集)、 $\mathbb{N}^*$ (正整数集)





二、集合中表示关系的概念分两类

1. 表示元素和集合之间的关系,有属于“ $\in$ ”和不属于“ $\notin$ ”两种情形。

2. 表示集合与集合之间的关系

(1) 包含关系

①子集: 如果 $a \in A \Rightarrow a \in B$, 则集合 A 是集合 B 的子集, 记为 $A \subseteq B$, 或 $B \supseteq A$, 显然 $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$

②全集: 如果集合 S 含有我们所研究的各个集合的全部元素, 这个集合就可以看作一个全集。全集通常用 U 表示。

(2) 相等关系

对于两个集合 A 、 B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么集合 A 、 B 相等, 记作 $A = B$ 。

(3) 真子集关系: 对于两个集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 则集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$ 。

(4) 不包含关系: 用 $\not\subseteq$ 表示。

三、空集

1. 空集 $\emptyset$ 是指不含任何元素的集合, 它是任何一个集合的子集, 是任何一个非空集合的真子集。

2. 集合 $\{\emptyset\}$ 不是空集; $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$ 三种表示法都是对的。

四、有限集的子集、真子集的个数

关于有限集的子集个数有下列结论: 若有限集 A 中有 n 个元素, 则 A 的子集个数有 2^n 个, 即 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$; 非空子集有 $2^n - 1$ 个; 真子集有 $2^n - 1$ 个。

考·试·要·求

理解集合、子集的概念, 了解属于、包含、相等关系的意义, 了解空集、全集的意义; 掌握有关的术语和符号, 并会用它们正确地表示一些简单的集合。

高考对集合概念考查有两种主要方式: 一是直接考查集合概念; 二是以集合为工具考查集合语言和集合思想的运用, 小题目综合化是这部分内容的一种命题趋势。

重·点·难·点

1. 集合中元素的确定性、互异性、无序性。
2. 描述法表示集合, $\{x|x \in P\}$, 要抓住竖线前面代表元素以及它所具有的性质 P 。
3. 树立借助文氏图、数轴解决集合问题的意识。

活·题·型·设·计

例1 设集合 $A = \{x|x \geq 3\sqrt{3}\}$, $x = 2\sqrt{7}$, 则下列关系中正确的是 ()

- A. $x \in A$ B. $x \notin A$
C. $\{x\} \in A$ D. $\{x\} \subsetneq A$

[分析] 首先应该分清 x 表示元素, A 和 $\{x\}$

表示集合。而元素与集合之间的关系用 $\in$ 和 $\notin$ 来表示, 集合与集合之间用 $\subseteq$ 和 $\subsetneq$ 来表示, 所以应排除 A 和 C ; 由于 $3\sqrt{3} = \sqrt{27} < \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, 所以 $x = 2\sqrt{7}$ 是集合 A 中的元素, 故选 D 。

例2 已知集合 $P = \{x|x = n, n \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{x|x = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{x|x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}\}$, 则下列正确的是 ()

- A. $Q \subsetneq P$ B. $Q \subsetneq R$
C. $Q = P \cup R$ D. $Q = P \cap R$

[分析] 本题考查集合与集合之间的关系。

[解析] 当 $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, $x = \frac{n}{2} = k$ ($k \in \mathbb{Z}$);

当 $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, $x = \frac{n}{2} = k + \frac{1}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$\therefore Q = \{x|x = k \text{ 或 } k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = P \cup R$, 故选 C 。

例3 已知 $A = \{x, xy, \lg xy\}$, $B = \{0, |x|, y\}$, 若 $A = B$, 求 x, y 的值。

[分析] 选好突破口 $0 \in A$, 根据元素的互异性, 逐步进行讨论, 最终达到目的。

[解析] 由 $A = B$ 知, $0 \in A$, 根据集合中元素的互异性及对数函数的定义域知 $x \neq 0$, $xy \neq 0$, 故 $\lg xy = 0$, 所以 $xy = 1$; 此时集合 A, B 可确定为 $A = \{x, 1, 0\}$, $B = \{0, |x|, y\}$, 又因为 $x \neq xy$, 即 $x(1-y) \neq 0$, $\therefore x \neq 0$ 且 $y \neq 1$, $\therefore |x| = 1$,

所以 $x = -1, y = -1$ 。

[评析] 两个集合相等, 则两个集合的元素相同, 突破口为 $0 \in A$, 这是思维的障碍点, 是解决这个题的关键。

例4 已知集合 $A = \{x|y = \sqrt{15-2x-x^2}\}$ 与 $B = \{y|y = a-2x-x^2\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围。

[分析] 集合 A 是使函数 $y = \sqrt{15-2x-x^2}$ 有意义的实数, 集合 B 是使二次函数的值域确定的实数。

[解析] 集合 A 化简为 $A = \{x|-5 \leq x \leq 3\}$, 集合 B 化简为 $B = \{y|y \leq a+1\}$, 因为 $A \subseteq B$, 所以 $a+1 \geq 3$, 即 $a \geq 2$ 。

[评析] 此题不能把集合 A 看作是函数的值域; 要理解集合描述法的实质。

例5 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合: (1) S 内不含 1; (2) 若 $a \in S$, 则 $\frac{1}{1-a} \in S$, 解答下列问题。

- (1) 若 $2 \in S$, 则 S 中必有其他两个数, 求出这两个数。
- (2) 求证: 若 $a \in S$, 则 $1 - \frac{1}{a} \in S$ 。
- (3) 在集合 S 中元素的个数能否只有一个? 请说明理由。





[分析] 理解集合中元素的属性是解决问题的突破口,由(1)(2)知 S 中不能只有一个元素,对问题的思考,若从正面考虑有困难,可逆向,即正难则反。

[解析] (1) $\because 2 \in S, \therefore \frac{1}{1-2} \in S$, 即 $-1 \in S$,
 $\therefore \frac{1}{1-(-1)} \in S$, 即 $\frac{1}{2} \in S$.

(2) 证明: $\because a \in S, \therefore \frac{1}{1-a} \in S, \therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = 1 - \frac{1}{1-a} \in S$.

(3) (用反证法证明) 假设 S 中只有一个元素, 则有
 $a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$ 方程无实数解, $\therefore$ 集合 S 中不能只有一个元素。

错·例·分·析

例6 设 $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 组成的集合的子集有多少?

[错解] 化简集合 $A = \{3, 5\}$, 化简集合 $B = \{x | x = \frac{1}{a}\}$

$\because B \subseteq A, \therefore \frac{1}{a} = 3$ 或 $\frac{1}{a} = 5, \therefore a = \frac{1}{3}$ 或 $a = \frac{1}{5}$,
 $\therefore$ 实数 a 组成的集合为 $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$, 它的子集共有 4 个。

[错因] 忘记了 $B = \emptyset$, 能满足 $B \subseteq A$, 这样漏掉了 $a = 0$ 的情况。

[正解] 化简集合 $A = \{3, 5\}$

当 $a = 0$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $B \subseteq A, \therefore a = 0$ 符合题意。

当 $a \neq 0$ 时, $B \neq \emptyset$, 则 $x = \frac{1}{a}, \therefore B \subseteq A, \therefore \frac{1}{a} = 3$ 或 $\frac{1}{a} = 5, \therefore$ 实数 a 组成的集合为 $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$, 它的子集共有 2^3 个, 即 8 个。

现·律·方·法·总·结

1. 掌握集合中元素的确定性、互异性、无序性, 它是正确解决有关集合问题的重要一环。

2. 关注“ $\emptyset$ ”, 在考查两个集合的关系时, 不要忘记“ $\emptyset$ ”。

3. 对于已知某两集合间的关系, 求其满足的条件, 应将集合化简并转化为方程或不等式的问题求解。

训·练·设·计

一、选择题

- 集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的非空真子集的个数是 ()
 A. 32 B. 31
 C. 30 D. 16
- (2003年北京理—1) 设集合 $A = \{x | x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x | \log_2 x > 0\}$, 则: $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | x > 1\}$ B. $\{x | x > 0\}$
 C. $\{x | x < -1\}$ D. $\{x | x < -1$ 或 $x > 1\}$

3. 若 $\{1\} \subsetneq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是 ()

- A. 5 B. 6
 C. 7 D. 8

4. 集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

- A. $M = N$ B. $M \supseteq N$
 C. $M \subseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

5. 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 那么集合 $M \cap N$ 为 ()

- A. $x = 3, y = -1$ B. $(3, -1)$
 C. $\{3, -1\}$ D. $\{(3, -1)\}$

二、填空题

6. 集合 A 中有 m 个元素, 若在 A 中增加一个元素, 则它的子集个数将增加 _____ 个。

7. 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$, $A = \{x | f(x) = 2x\} = \{2\}$, 则 a, b 的值分别是 _____。

8. 设集合 $A = \{x | x = a^2 - 4a + 5, a \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y | y = 4b^2 + 4b + 2, b \in \mathbb{R}\}$, 则 A 与 B 的关系是 _____。

9. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbb{R}\}$, 若 A 中元素至多有 1 个, 则 a 的取值范围是 _____。

三、解答题

10. 已知 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 8 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + a^2 - 12 = 0\}$, $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值集合。





11. (2003年上海春—5) 已知: 集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是多少?

12. 已知集合 $A = \{x \mid -x^2 + 3x + 10 \geq 0\}$, $B = \{x \mid m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$. 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

13. 设 $f(x) = x^2 + px + q$, $A = \{x \mid x = f(x)\}$, $B = \{x \mid f[f(x)] = x\}$,

- (1) 求证 $A \subseteq B$
(2) 如果 $A = \{-1, 3\}$, 求 B

14. 设 $a, b \in \mathbb{Z}$, $E = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + 3b \leq 6y\}$, 点 $(2, 1) \in E$, 但点 $(1, 0) \notin E$, $(3, 2) \notin E$, 求 a, b 的值.

课时2 集合的运算

要点归纳

1. 有关概念

(1) 交集: $A \cap B = \{x \in A \text{ 且 } x \in B\}$, 如图中阴影部分表示集合 A 与 B 的交集 $A \cap B$.



(2) 并集: $A \cup B = \{x \in A \text{ 或 } x \in B\}$, 如图中阴影部分表示集合 A 与 B 的并集 $A \cup B$.



(3) 补集: 如果已知全集 U , 集合 $A \subseteq U$, 则 $C_U A = \{x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$, 如图



中阴影部分

表示集合 A 在全集 U 中的补集 $C_U A$.

2. 常用的运算性质及一些重要结论

- (1) $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B = B \cap A$

$$(2) A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(3) A \cap C_U A = \emptyset, A \cup C_U A = U.$$

$$(4) (C_U A) \cap (C_U B) = C_U (A \cup B), (C_U A) \cup (C_U B) = C_U (A \cap B)$$

$$(5) A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B, A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$$

$$(6) C_U (A \cap B) = (C_U A) \cup (C_U B), C_U (A \cup B) = (C_U A) \cap (C_U B)$$

$$(7) \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

$$(8) A \subseteq B, B \subseteq C \text{ 则 } A \subseteq C$$

考·试·要·求

理解交集、并集、全集、补集的概念, 掌握集合的运算性质, 能利用数轴或文氏图进行集合的运算.

重·点·难·点

1. 熟练掌握集合的图形表示、数轴表示等基本方法, 并树立借助文氏图、数轴解决集合问题的意识——属于“画图意识”或“数形结合意识”.





2. 集合问题多与函数、方程、不等式、解析几何有关, 要注意知识的联系。

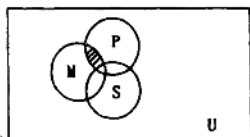
例题·型·设计

例1 已知全集 $U = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $M = \{x | -1 < x < 1\}$, $C_U N = \{x | 0 < x < 2\}$, 那么集合 $N =$ _____, $M \cap C_U N =$ _____, $M \cup N =$ _____。

[分析] 把全集 U , 集合 M , $C_U N$ 在数轴上表示出来, 运用数形结合的方法. $N = \{x | -3 \leq x \leq 0 \text{ 或 } 2 \leq x \leq 3\}$, $M \cap (C_U N) = \{x | 0 < x < 1\}$, $M \cup N = \{x | -3 \leq x < 1 \text{ 或 } 2 \leq x \leq 3\}$.

例2 如图, U 是全集, M , P , S 是 U 的3个子集, 则阴影部分所表示的集合是 ()

- A. $(M \cap P) \cap S$
- B. $(M \cap P) \cup S$
- C. $(M \cap P) \cap C_U S$
- D. $(M \cap P) \cup C_U S$



[分析] 符号语言、文氏图 (图形语言)、文字语言三者的转译能力是高考命题的一个侧重点, 应力求熟练准确。

[解析] 图中阴影部分的元素 x 的属性是: $x \in M$ 且 $x \in P$, 但 $x \notin S$, 故选 C.

例3 设 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 其中 $a \in R$, 如果 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围。

[分析] 化简 $A = \{0, -4\}$, $\because A \cap B = B, \therefore B \subseteq A$,
(1) 当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$, 解得 $a < -1$ 。

(2) 当 $B = \{0\}$ 或 $\{4\}$ 时, 即 $B \subsetneq A$ 时, $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0$

解得 $a = -1$, 此时 $B = \{0\}$, 满足 $B \subseteq A$ 。

(3) 当 $B = \{0, -4\}$ 时,

$$\begin{cases} \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) > 0 \\ -2(a+1) = -4 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } a = 1,$$

综上所述实数 a 的取值范围是 $a = 1$ 或 $a \leq -1$ 。

例4 集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 求当 a 取什么实数时, $A \cap B \neq \emptyset$ 和 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立。

[分析] 由于集合 B , C 分别是方程: $\log_2(x^2 - 5x + 8) = 1$ 和 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 的解集, 可以求得 $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, -4\}$, $A \cap B \neq \emptyset$, 即 $A \cap B \neq \emptyset$, $\therefore 2$ 或 3 是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ 的解, $A \cap C = \emptyset$, 即 2 和 -4 都不是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ 的解, 由此可求 a 。

[解析] 由 $\log_2(x^2 - 5x + 8) = 1$ 得 $x^2 - 5x + 8 = 2$, $\therefore B = \{2, 3\}$, 由 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 得 $C = \{2, -4\}$,

又 $A \cap C = \emptyset$, $\therefore 2$ 和 -4 都不是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ 的解, 而 $A \cap B \neq \emptyset$, 即 $A \cap B \neq \emptyset$, $\therefore 3$ 是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ 的解, $\therefore 3^2 - a \cdot 3 + a^2 - 19 = 0$, 可以解得: $a = 5$ 或 $a = -2$, 当 $a = 5$ 时, 可以求得 $A = \{2, 3\}$

$\therefore A \cap C = \{2\}$, 这与 $A \cap C = \emptyset$ 不相符, 所以把 $a = 5$ 舍去。

当 $a = -2$ 时, 可以求得 $A = \{3, -5\}$ 符合 $A \cap C = \emptyset$,

$A \cap B \neq \emptyset$, $\therefore a = -2$ 。

例5 设集合 $A = \{(x, y) | y^2 - x - 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) | 4x^2 - 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) | y = kx + b\}$, 是否存在 k, b ($k \in N, b \in N$), 使 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, 证明你的结论。

[分析] 由于直线 $y = kx + b$ 中有两个要确定的字母 k 与 b , 根据图形及其几何意义一个一个地求之。

[证明] 由集合 A

得抛物线 $y^2 - x - 1 = 0$

在 y 轴上的截距为 1 和

-1 , 由集合 B 得抛物

线 $4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$

在 y 轴上的截距为 $\frac{5}{2}$,

若存在 b ,

则 $1 < b < \frac{5}{2}$, 如

图, 又因为 $b \in N$, $\therefore b = 2$,

因为 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$,

所以只要考虑是否存在 k , 使 $A \cap C = \emptyset$ 且 $B \cap C = \emptyset$ 。

将直线方程 $y = kx + 2$ 代入抛物线 $y^2 - x - 1 = 0$ 中得:

$(kx + 2)^2 - x - 1 = 0$, 即 $k^2 x^2 + (4k - 1)x + 3 = 0$

令 $\Delta = (4k - 1)^2 - 12k^2 < 0$,

化简为 $4k^2 - 8k + 1 < 0$,

解得 $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} < k < \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$, 又 $k \in N$, $\therefore k = 1$ 。

将直线 $y = kx + 2$ 代入抛物线 $4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$

中, 得 $4x^2 + (2 - 2k)x + 1 = 0$

令 $\Delta = (2 - 2k)^2 - 4 < 0$ 解得: $-1 < k < 3$ 。

因为 $k \in N$, $k = 0$

$\therefore k = 1$ 或 $k = 2$, 所以使 $A \cap C = \emptyset$ 且 $B \cap C = \emptyset$ 的 k

为 1 。

综上所述, 满足条件的 k, b 是存在的, 即当 $k = 1$,

$b = 2$ 时, $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ 。

例6 设全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{12a - 11, 2\}$, $C_U A = \{5\}$, 求实数 a 的值。

[错解] $\because C_U A = \{5\}$, $\therefore 5 \in U$, 且 $5 \notin A$, $\therefore a^2 + 2a - 3 = 5$, 解之得, $a = 2$ 或 $a = -4$ 。

错解分析: 由 $C_U A = \{5\}$ 只能得出 $5 \in U$ 且 $5 \notin A$, 但不能得出 $a^2 + 2a - 3 = 5$, 因为 U 中可能还有别的元素等于 5 。

正解: 由 $C_U A = \{5\}$ 知 $5 \in U$ 且 $5 \notin A$, 所以 $a^2 + 2a - 3 = 5$ 或 $12a - 11 = 5$ 或 $2 = 5$ 。

由 $a^2 + 2a - 3 = 5$ 得 $a = 2$ 或 $a = -4$ 。

由 $12a - 11 = 5$ 得 $a = 1$ 。

由 $2 = 5$ 得 a 不存在。

综上所述, $a = 2$ 或 $a = -4$ 或 $a = 1$ 。

例7 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例8 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例9 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例10 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例11 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例12 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例13 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例14 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例15 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例16 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例17 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例18 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例19 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例20 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, 求 $A \cap B$ 。

错解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

正解: $A \cap B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 7x + 12 = 0\}$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。

综上所述, $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

例21 设全集 $U = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x |$



【错因】 错误在于忽视了本题的隐含条件 $A \subseteq U$ (或者说 $A \subseteq U$, 因 U 为三元素集, A 为二元素集)。

【正解】 (1) 应继续对 a 的值是否适合 $A \subseteq U$ 进行验证, 当 $a=2$ 时, $|2a-1|=|4-1|=3 \neq 5$, 此时 $A = \{2, 3\} \subseteq U$;

当 $a=-4$ 时, $|2a-1|=|-8-1|=9 \neq 5$, 此时 $A = \{9, 2\} \not\subseteq U$,

$\therefore a$ 的值只能为 2。

(2) 如果按以下方法解答, 可以免除这种问题。

$\because C_U A = \{5\}$, $A = \{|2a-1|, 2\}$, $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$

$$\therefore \begin{cases} |2a-1|=3 \\ a^2+2a-3=5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=2 \text{ 或 } a=-1 \\ a=2 \text{ 或 } a=-4 \end{cases}$$

$\therefore a=2$ 。

【评析】 集合是一种具有深刻含义的数学语言, 它的内容丰富, 表达准确, 方法多样, 在应用中弄清它的准确含义, 可避免产生各种错误。

规律·方法·总结

1. 加强集合中元素特征的理解, 互异性常常容易被忽略, 在解决问题时要特别注意。

2. 集合用描述法表示时, 要搞清代表元素是什么。

3. 注意两大关系的区别: $\in$ 和 $\subseteq$ 的本质区别, 注意分类讨论思想的适时运用。

4. 子集、补集、交集、并集是集合的核心, 是数学语言的充分体现, 在解有关集合的问题时, 常将集合化简或转化为熟知的代数、三角、几何问题。

训练·设计

一、选择题

- (2003年春季高考题·北京卷) 若集合 $M = \{y|y = 2^{-x}\}$, $P = \{y|y = \sqrt{x-1}\}$, 则 $M \cap P =$ ()
A. $\{y|y > 1\}$
B. $\{y|y \geq 1\}$
C. $\{y|y > 0\}$
D. $\{y|y \geq 0\}$
- 设 $A = \{(x, y) | 4x + y = 6\}$, $B = \{(x, y) | 3x + 2y = 7\}$, 满足 $C \subseteq A \cap B$ 的集合 C 的个数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
- 已知集合 $M = \{a^2, a+1, -3\}$, $N = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 若 $M \cap N = \{-3\}$, 则 a 的值是 ()
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
- 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | (x+2)(x+1) > 0\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 0\}$, 则 $A \cup (C_U B)$ 等于 ()
A. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 0\}$

B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

C. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$

D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 0\}$

5. 设全集 $U = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $M = \{x | f(x) \neq 0\}$, $N = \{x | g(x) \neq 0\}$, 那么集合 $\{x | f(x)g(x) = 0\}$ 等于 ()

A. $(C_U M) \cap (C_U N)$

B. $(C_U M) \cup N$

C. $M \cup (C_U N)$

D. $(C_U M) \cup (C_U N)$

6. 已知集合 $A = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} | x - 2y = 0\}$, $B = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} | \frac{y-1}{x-2} = 0, x \neq 2\}$, 则 $A \cup B$ 是 ()

A. $\{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} | (x-2y)(y-1) = 0\}$

B. $\{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} | (x-2y)(y-1) = 0, x \neq 2\}$

C. $\{(2, 1)\}$

D. $\emptyset$

二、填空题

7. 全集 U 含有 10 个元素, 它的子集 A 含有 5 个元素, 子集 B 含有 4 个元素, $A \cap B$ 有 2 个元素, 那么 $A \cup B$ 含有元素的个数是_____。
8. 已知集合 $A = \{x | -x^2 + 3x + 10 \geq 0\}$, $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\} \neq \emptyset$, 若 $B \subseteq A$, 则 m 的取值范围是_____。
9. 已知集合 $A = \{(a, b) | a^2 + \sqrt{2b-1} = 2a-1\}$, $B = \{(1, \frac{1}{2})\}$, 则 A _____ B . (填“=”或“≠”).
10. $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, a > 0, b > 0\}$, 当 $A \cap B$ 只有 1 个元素时, a, b 的关系式是_____。

三、解答题

11. 设 $A = \{2, -1, x^2 - x + 1\}$, $B = \{2y, -4, x+4\}$, $C = \{-1, 7\}$, 且 $A \cap B = C$, 求 x, y 的值。





12. 设 $U = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{m \mid \text{方程 } mx^2 - x - 1 = 0 \text{ 有实根}\}$, $N = \{n \mid \text{方程 } x^2 - x + n = 0 \text{ 有实根}\}$, 求 $(C_U M) \cap N$.

13. 已知 $A = \{y \mid y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0\}$, $B = \{y \mid y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, 0 \leq x \leq 3\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

14. 若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则称 (A_1, A_2) 为集合 A 的一种分拆, 并规定: 当且仅当 $A_1 = A_2$ 时, (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 A 的同一种分拆, 则集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的不同分拆种数是多少?

15. 已知 $A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$, $B = \{x \mid mx^2 - 4x + m - 1 > 0, m \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 且 $A \cup B = A$, 求 m 的取值范围.

课时 3 含绝对值的不等式的解法

要点·归纳

- 实数 a 的绝对值: $|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$
- $a > 0$ 时 $|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$, $|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$.
- 当 $c > 0$ 时, $|ax + b| > c \Leftrightarrow ax + b > c$ 或 $ax + b < -c$,
 $|ax + b| < c \Leftrightarrow -c < ax + b < c$
- 不等式的基本性质 (1) 若 $a > b$ 则 $a + c > b + c$;
(2) 若 $a > b, b > c$ 则 $a > c$;
(3) $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$; (4) 若 $a > b, c < 0$ 则 $ac < bc$ 是解任何不等式的基础.

考试·要求

掌握一些简单的绝对值不等式的解法.

商·考·要·求

含绝对值的各种不等式的解法, 其基本原则是去掉绝对值符号, 重点是掌握去掉绝对值符号的方法; 难点是含绝对值的不等式与其他内容的综合问题.

活·题·型·设·计

例 1 解下列不等式

- (1) $|3 - 5x| > 2$ (2) $|2x - 3| < x - 1$ (3) $2 < |3x - 1| \leq 4$

[分析] 此类不等式是运用 $|ax + b| > c$ 或 $|ax + b| < c$ 来解的.

[解析] (1) $|3 - 5x| > 2$ 等价于 $15x - 3| > 2$ 等价于 $5x - 3 > 2$ 或 $5x - 3 < -2$, 解得 $x > 1$ 或 $x < \frac{1}{5}$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x \mid x < \frac{1}{5} \text{ 或 } x > 1\}$.

(2) $\because x - 1 \leq 0$ 时, 不等式 $|2x - 3| < x - 1$ 无解





∴原不等式等价于 $\begin{cases} x-1>0 \\ -x+1<2x-3<x-1 \end{cases}$

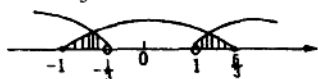
$$\text{解得} \begin{cases} x>1 \\ \frac{4}{3}<x<2 \end{cases}$$

∴原不等式的解集为 $|x|-\frac{4}{3}<x<2|$.

(3) 原不等式等价于 $\begin{cases} |3x-1|>2 \\ |3x-1|\leq 4 \end{cases}$ 等价于

$$\begin{cases} 3x-1>2 \text{ 或 } 3x-1<-2 \\ -4\leq 3x-1\leq 4 \end{cases}$$

$$\text{等价于} \begin{cases} x>1 \text{ 或 } x<-\frac{1}{3} \\ -1\leq x\leq \frac{5}{3} \end{cases} \text{ 把解集表示在数轴上.}$$



∴原不等式的解集为 $[-1, -\frac{1}{3}) \cup (1, \frac{5}{3}]$

例2 解不等式 $|x-1|+|x+2|>4$

[分析] 此种不等式可称为多项含绝对值不等式, 这种不等式的解法一般是找零点分段讨论, 从而去掉绝对值符号, 由 $x-1=0$ 和 $x+2=0$ 得两个零点 $x=1$, $x=-2$, 1 和 -2 将数轴分为 3 段. 在这三段上分别去掉绝对值符号.

[解析] 原不等式等价于

$$\begin{cases} x\leq -2 \\ -x+1-x-2>4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -2<x<1 \\ -x+1+x+2>4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x\geq 1 \\ x-1+x+2>4 \end{cases}$$

等价于 $x<-\frac{5}{2}$ 或 $x>\frac{5}{2}$

∴原不等式的解集为 $|x|<-\frac{5}{2}$ 或 $x>\frac{5}{2}|$.

例3 解下列不等式

$$(1) |x|<|x+1| \quad (2) |\frac{x-1}{x+2}|>\frac{x-1}{x+2}$$

[解析] (1) ∵ $|x|$, $|x+1|$ 皆为非负数,

∴不等式两边可以平方, 得 $x^2<x^2+2x+1$

$$\therefore x>-\frac{1}{2}$$

∴原不等式的解集为 $|x|>-\frac{1}{2}|$

(2) 此题有点特别, 绝对值符号内的式子 $\frac{x-1}{x+2}$ 和右边的式子 $\frac{x-1}{x+2}$ 一样, 可分析:

$$\text{若 } \frac{x-1}{x+2}\geq 0, \text{ 则 } |\frac{x-1}{x+2}|=\frac{x-1}{x+2},$$

$$\text{若 } \frac{x-1}{x+2}<0, \text{ 则 } |\frac{x-1}{x+2}|>\frac{x-1}{x+2}$$

∴原不等式等价于 $\frac{x-1}{x+2}<0$, 解得 $-2<x<1$,

∴原不等式的解集为 $(-2, 1)$.

例4 解关于 x 的不等式 $|3x-2|<2m-1$ ($m\in\mathbb{R}$)

[分析] 这里 $2m-1\in\mathbb{R}$, 所以要分类讨论.

[解析] (1) 当 $2m-1\leq 0$ 时, 即 $m\leq \frac{1}{2}$ 时, 原不等式恒不成立,

∴解集为空集

(2) 当 $2m-1>0$ 时即 $m>\frac{1}{2}$ 时, 原不等式等价于 $-2m+1<3x-2<2m-1$, 解得 $-\frac{2m-3}{3}<x<\frac{2m+1}{3}$.

综上所述, 当 $m\leq \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $m>\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为

$$|x|-\frac{2m-3}{3}<x<\frac{2m+1}{3}|$$

例5 对任意实数 x , 若不等式 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ()

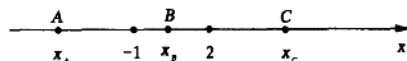
A. $k<3$ B. $k<-3$

C. $k\leq 3$ D. $k\leq -3$

[分析] 利用绝对值的几何意义或数形结合解决.

[解析] 解法一: 根据绝对值几何意义:

$|x+1|$ 和 $|x-2|$ 可分别看作是数轴上的任意点 x , 到点 -1 和点 2 的距离, 我们在数轴上任取三个点 x_A , x_B , x_C .



显然有 ① $|x_A+1|-|x_A-2|=-3$,

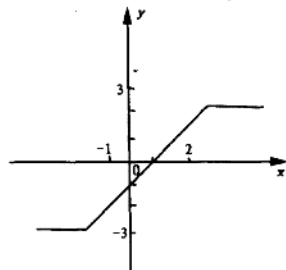
② $|x_C+1|-|x_C-2|=3$,

③ $-3<|x_B+1|-|x_B-2|<3$

∴ $-3\leq|x+1|-|x-2|\leq 3$, 若 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立, 则只需 $k<-3$. 故选 B.

解法二: 令 $y=|x+1|-|x-2|$, 在平面直角坐标系中作出图像,

$$y=|x+1|-|x-2|=\begin{cases} -3 & (x\leq -1) \\ 2x-1 & (-1<x<2) \\ 3 & (x\geq 2) \end{cases}$$



从图像看出 $y\in[-3, 3]$

∴要使 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立, 只需 $k<-3$.

[评析] 运用数形结合思想, 可使问题形象化、直





现化。

错·例·分·析

例6 解不等式 $|x-a| > a$.

【错解】 原不等式变为 $x-a > a$ 或 $x-a < -a$, 即 $x > 2a$ 或 $x < 0$.

∴ 原不等式的解集为 $|x| > 2a$ 或 $x < 0$.

【错因】 本题错误在于误认为 a 一定为正数, 但题目中并没有规定 $a > 0$, 所以应对 a 进行讨论.

【正解】 (1) 当 $a < 0$ 时, $x \in \mathbb{R}$

(2) 当 $a = 0$ 时, $x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0$

(3) 当 $a > 0$ 时, 原不等式变为 $x-a > a$ 或 $x-a < -a$ 即 $x > 2a$ 或 $x < 0$.

现·律·方·法·总·结

1. 不等式 $|ax+b| > c$ 可化为 $ax+b > c$ 或 $ax+b < -c$ ($c > 0$) 再由此求出原不等式的解集; 不等式 $|ax+b| < c$ ($c > 0$) 可化为 $-c < ax+b < c$, 再由此求出原不等式的解集, 这种方法体现了一种转化与化归的思想方法.

2. 去掉绝对值符号的途径有:

(1) 根据实数绝对值的意义:

$$|x| < a \Leftrightarrow \begin{cases} -a < x < a & (a > 0) \\ \emptyset & (a \leq 0) \end{cases}$$

$$|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x < -a \text{ 或 } x > a & (a > 0) \\ x \neq 0 & (a = 0) \\ x \in \mathbb{R} & (a < 0) \end{cases}$$

(2) 两边平方: 两边都为非负数 (式) 时, 可以两边平方, 去掉绝对值符号.

(3) 分段讨论: 对含有多个绝对值的不等式, 可找到零点 (零点即是使含绝对值符号的代数式的值等于 0 的未知数的值), 将这些值标在数轴上, 它们将数轴分为若干段, 进行分段讨论.

(4) 对形如 $|x-a|+|x-b| < c$, $|x-a|-|x-b| > c$ 的不等式, 可利用绝对值的几何意义来确定不等式的解集.

训·练·设·计

一、选择题

- (2004 年安徽春考—2) 不等式: $|2x^2-1| \leq 1$ 的解集为: ()
A. $\{x|-1 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$
C. $\{x|0 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x|-2 \leq x \leq 0\}$
- (2003 年春季高考题·北京卷) 若不等式 $|ax+2| < 6$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则实数 a 等于 ()
A. 8 B. 2 C. -4 D. -8
- 不等式 $|x-1|+|x-2| \leq 3$ 的最小整数解是 ()
A. 0 B. -1 C. 1 D. 2

- 不等式 $|2x-\log_2 x| < 2x+|\log_2 x|$ 成立, 则 ()
A. $1 < x < 2$ B. $0 < x < 1$
C. $x > 1$ D. $x > 2$
- 若不等式 $|x-3|+|x-7| < a$ 在 $\mathbb{R}$ 上的解集非空, 则 a 的取值范围是 ()
A. $(0, 4)$ B. $(-\infty, 4)$
C. $(4, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$
- 设命题甲为: $0 < x < 7$, 命题乙为 $|x-3| < 4$, 那么 ()
A. 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件
B. 甲是乙的必要不充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

- 不等式 $|x+2| > \frac{3x+14}{5}$ 的解集为 ()
A. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
B. $(-3, 2)$
C. $(-2, 0)$
D. $(0, 2)$

二、填空题

- 不等式 $\frac{3-|x|}{|x|+2} \geq \frac{1}{2}$ 的解集为_____.
- 使 $\frac{\sqrt{2-|x|}}{\sqrt{|2x+1|-4}}$ 有意义的 x 的范围是_____.
- 不等式 $|x-a| < b$ ($b \in \mathbb{R}$) 的解集为_____.
- 不等式 $4 < |1-3x| \leq 7$ 的解集为_____.
- 不等式 $||x+1|-|x-1|| < 1$ 的解集为_____.

三、解答题

- 不等式 $|x-1|+|x+3| > m$ 对一切实数 x 都成立, 求实数 m 的取值范围.
- 解不等式 $|5x-6| < x^2$.

- 解不等式 $|x^2-3|x|-3| \leq 1$



10

三人行, 必有我师焉