数学分析学习指导书

2

★ 上册

★ 刘玉琏 苑德新 编

★ 高等教育出版社

GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

数学分析学习指导书

上　册

刘玉琏　苑德新　编

高等教育出版社

本书是与刘玉琏编的中学教师培训教材《数学分析》配套的学习指导书．按教材章次，分章对应编写．每章包括内容结构、学习要求、补充说明、补充例题、自我检查题等五部分．内容结构主要概述内容的安排、处理及所处地位，作用．补充说明和补充例题主要是帮助读者深化、理解教材的有关内容，书末附有自我检查题答案。

数学分析学习指导书

上　册

刘玉琏　苑德新　编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

开本 850×1168 1/32　印张 3.875　字数 90,000

1988 年 4 月第 1 版　1988 年 4 月第 1 次印刷

印数 0001—20,160

ISBN 7-04-000987-0/O·551

定价 0.75 元

编者的话

本书是与刘玉琏编的中学教师培训教材《数学分析》(上、下册)配套的学习指导书．是按照教材章次逐章对应编写的．每章由五部分组成：

一、内容结构：概述教材中本章的内容，以及各节、段内容在该章的地位及其相互之间的联系．

二、学习要求：根据教学大纲和该章教材的内容，向读者提出在理论、计算、方法和能力等方面的学习要求．

三、补充说明：对该章教材中的重要概念、重要定理，与中学数学教材有关内容的联系等多方面作了补充说明．

四、补充例题：在教材中已给例题的基础上，又补充若干典型例题，以增补例题的类型，扩大例题的覆盖面．

五、自我检查题：每章的最后都有7—10个自我检查题．供读者学完一章之后，自我检查该章的学习效果．书后附有计算题的答案．

目　录

第一章　函　　数

一、内容结构

本章有五节十四段，所讲内容除复合函数和初等函数外，都是读者在中学《代数》中学习过的．知识本身基本上没有提高，主要是复习中学《代数》的有关函数知识．由于中学《代数》没讲复合函数，自然也就不能讲初等函数，而六种基本初等函数，至少在形式上，已全部介绍了．

函数概念是本章的重点也是本章的难点．为了对函数概念有个形象直观的认识，首先例举了八个不同类型的函数实例(1.1.1)，其次再给出抽象的函数定义(1.1.2)．为了帮助理解函数定义，对函数定义作了几点说明(1.1.3)，并对函数的表示方法作了细致的讨论(1.1.4)．有了函数定义之后接着要讨论函数的两个方面的问题：一是函数自身的某些几何性质，即有界性(1.2.1)，单调性(1.2.2)，奇偶性(1.2.3)，周期性(1.2.4)；二是函数的运算，即四则运算(1.3.1)，复合运算(1.3.2)，逆运算(即反函数)(1.3.3)．借助函数的逆运算，能够构造基本初等函数(1.4.1)．例如，由指数函数和三角函数的逆运算分别得到对数函数和反三角函数．在基本初等函数的基础上，借助函数的四则运算和复合运算，能够构造新的函数族——初等函数(1.4.2)．数学分析主要是研究初等函数．

二、学习要求

1．深刻理解函数的定义．

2．会确定函数的定义域．

3．了解函数的表示法，重点掌握解析表示法．

4. 理解函数的有界性(包括无界性)、单调性、奇偶性和周期性的定义,并知道它们的图象特点.

5. 理解复合函数和反函数的概念,知道它们存在的条件.

6. 知道哪些函数是基本初等函数,何谓初等函数.

三、补 充 说 明

1. 关于中学《代数》的函数定义.

初中《代数》与高中《代数》分别给出了不同层次的函数定义.对这两个函数定义评述如下:

初中《代数》第四册的函数定义(简称定义 1):

“设在某变化过程中有两个变量 x 和 y, 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值和它对应,那么就把 y 叫做 x 的**函数**, x 叫做**自变量**,”“对于自变量在取值范围内的一个确定的值,……,函数有唯一确定的对应值,……,简称**函数值**.”

在定义 1 中,一是“两个变量 x 和 y”所取的值都是实数; 二是“x 在某一范围内”,即函数的定义域; 三是有一个对应法则(或对应规律),使定义域内“每一个确定的值, y 都有唯一确定的值和它对应”. 因此在实数集内给定了一个函数,即给定了定义域和对应法则.

定义 1, 一方面,“把 y 叫做 x 的函数”; 另一方面,又把 x 所对应的值 y 叫做函数值,即函数就是函数值,反之亦然. 这样就混淆了函数与函数值. 那么函数与函数值是否应该有区别呢? 当然应该有区别.

从严谨的数学理论来说, 这个函数定义 1 是有缺陷的. 为了适合初中学生的知识水平,初中《代数》不能追求理论上严谨,故采用函数定义 1.

高中《代数》第一册先定义映射,后定义函数. 映射的定义是:

“设 A, B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(包括集合 A, B 及从 A 到 B 的对应法则 f)叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f: A\to B$”.

“A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象”.

映射定义由三部分构成：一是集 A；二是集 B；三是对应法则 f. 集 A 与集 B 处于不同的地位. A 是原象集，“集合 A 中任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应”，而象 b 所在的集 B 可能存在那样的元素，它在 A 中没有原象. 一般来说，集 A 的象集仅是 B 的真子集. 因为集 A 与 B 不仅可以是实数，也可以是其它的对象，所以映射的概念是极为广泛的.

特别是，若集 A 与 B 都是实数，对应法则是 f，则这个特殊的映射就是“教材”① 所定义的函数(注意，“教材”仅把对应法则称为函数，二者基本相同).

高中《代数》第一册在映射定义的基础上这样定义函数(简称定义 2)：

“当集合 A, B 都是非空的(实)数的集合，且 B 的每一个元素都有原象时，这样的映射 $f: A\to B$ 就是定义域 A 到值域 B 上的函数”.

“教材”的函数定义与定义 2 有点区别. 前者要求 $B=\mathbf{R}$，即值域可能是 $\mathbf{R}$，也可能是 $\mathbf{R}$ 的真子集，而后者则要求“B 的每一个元素都有原象，即 B 恰是象集，也就是值域. 因此，定义 2 是“定义域 A 到值域 B 上的函数”.

“教材”的函数定义和定义 2 都严格的区分了函数与函数值. 虽然“教材”的函数定义与定义 2 比定义 1 前进了一步，但是这两

① “教材”就是与本书配套的《数学分析》，下同.

个函数定义中的"对应法则"(或"对应规律")仍是不明确的．例如，两个函数

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad 与 \quad g(x)=\frac{1}{x}(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

有相同的定义域，它们却有不同的运算，那么这两个对应法则是否是相同呢？因此"对应规律"一词仍有进一步明确的必要．从这个意义上说，"教材"的函数定义和定义 2 也不是理想的函数定义．现代数学给出了理想的函数定义①．这里从略．

2．关于"确定(或求)函数定义域"这句话的理解

在中学《代数》和"教材"中，都有"确定(或求)函数定义域"的题目．这类题目不能理解为先有函数，后有它的定义域．"给定一个函数"这句话，就意味着同时也给定了这个函数的定义域．当用解析法给定函数时，虽然它的定义域是客观存在的，但是常常并不明确指出它的定义域，这时可根据函数的解析式或函数的实际意义确定(或求)出函数的定义域．

3．关于函数的四则运算

初中《代数》的函数定义是把函数与函数值等同起来，函数的四则运算就是函数值的四则运算．因此，函数的四则运算不需要再定义．

"教材"的函数定义是把对应规律 f 称为函数．因此，两个函数的四则运算是两个对应规律 f 与 g 的四则运算，这是个新概念，何谓两个对应规律 f 与 g 的和、差、积与商？这需要予以定义．于是，在 1.3.1 中给出了函数的四则运算的定义．

4．关于反函数的存在性

1.3.3 的定理 1 指出：严格单调的函数存在反函数．严格单

---

① 参见刘玉琏、杨奎元、吕凤编《数学分析讲义学习指导书》上册第 3 页，高等教育出版社．1987 年．

调仅是存在反函数的充分条件，而不是必要条件．例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

在区间$[-1, 1]$不是单调函数(如图1.1)．但是，它存在反函数

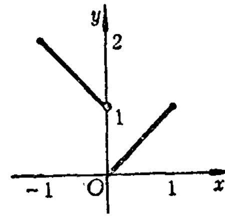

图 1.1

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1-y, & 1<y\leqslant 2.\end{cases}$$

其反函数的定义域为$[0, 2]$，恰是原来函数的值域：

$$\{y\,|\,y=f(x),\ x\in[-1, 1]\}=[0, 2].$$

5．几个基本初等函数的性质

读者在中学«代数»中已学过基本初等函数的性质，现将它们的性质列表集中在一起，供读者学习时参考．

幂函数

$y=x^{\alpha}$，其中α是实数．这里仅给出当$\alpha=\dfrac{p}{q}$是有理数时($q\in\mathbf{N}$, $p\in\mathbf{Z}$, $(p, q)=1$)，幂函数$y=x^{\alpha}$的性质．

	$y=x^{\frac{p}{q}}$, $q\in\mathbf{N}$, $p\in\mathbf{Z}$, $(p, q)=1$					
q	q是偶数		q 是 奇 数			
p	p 必是奇数		$p>0$		$p<0$	
	$p>0$	$p<0$	p是奇数	p是偶数	p是奇数	p是偶数
例	$x^{\frac{1}{2}}$	$x^{-\frac{1}{2}}$	$x^{\frac{1}{3}}$	$x^{\frac{2}{3}}$	$x^{-\frac{1}{3}}$	$x^{-\frac{2}{3}}$
定义域	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}-\{0\}$	$\mathbf{R}-\{0\}$
值　域	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$\mathbf{R}-\{0\}$	$(0, +\infty)$
严增区间	$[0, +\infty)$		$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$		$(-\infty, 0)$
严减区间		$(0, +\infty)$		$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
奇偶性			奇	偶	奇	偶

指数函数与对数函数

$$y=a^x \text{ 与 } y=\log_a x,\ 0<a\neq 1.$$

	$y=a^x$		$y=\log_a x$	
a	$0<a<1$	$1<a$	$0<a<1$	$1<a$
定义域	**R**	**R**	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值　　域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	**R**	**R**
严增区间		**R**		$(0, +\infty)$
严减区间	**R**		$(0, +\infty)$	
图①	图1.11	图1.11	图1.12	图1.12

三角函数

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\mathrm{tg}\, x,\ y=\mathrm{ctg}\, x.$$

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\mathrm{tg}\, x$	$y=\mathrm{ctg}\, x$
定义域	**R**	**R**	$\mathbf{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbf{R}-\{k\pi\}$
值　域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	**R**	**R**
严增区间	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$	$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$	
严减区间	$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$	$[2k\pi, (2k+1)\pi]$		$(k\pi, (k+1)\pi)$
奇偶性	奇	偶	奇	奇
周　期	2π	2π	π	π
图	图1.7	图1.8	图1.16	图1.17

① "图"是指"教材"中的图，下同。

反三角函数

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$.

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\operatorname{arc\,tg} x$	$y=\operatorname{arc\,ctg} x$
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
主值区间	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
严增区间	$[-1, 1]$		$\mathbf{R}$	
严减区间		$[-1, 1]$		$\mathbf{R}$
奇偶性	奇		奇	
图	图1.13	图1.14	图1.9	图1.10

四、补充例题

例 1. 设正方形的周长集合是 A，对应规律 f 是“由正方形的周长 $x\in A$ 到同一正方形的面积 y”. 问 f 是否是定义在 A 上的函数?

解法 验证对应规律 f 是否满足函数的定义.

解 任意正方形的周长 $x\in A$，正方形一边之长是 $\frac{x}{4}$，对应规律 f 使 x 对应该正方形唯一的面积 $y=\left(\frac{x}{4}\right)^2\in\mathbf{R}$，即 f 是定义在 A 上的函数.

例 2. 设三角形的周长集合是 A，对应规律 f 是“由三角形的周长 $x\in A$ 到同一三角形的面积 y”，问 f 是否是定义在 A 上的函数?

解法 验证对应规律 f 是否满足函数的定义.

解 任意三角形的周长 $x\in A$. 设三角形三边之长分别是 a, b, c，即 $a+b+c=x$. 已知该三角形面积 y 是

$$y=\sqrt{\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-a\right)\left(\frac{x}{2}-b\right)\left(\frac{x}{2}-c\right)}.$$

当给定 x 时，a, b, c 都可变化，因此对应规律 f 使 x 对应的三角形面积 y 不是唯一的，不满足函数的定义。于是，f 不是 A 上的函数。

例 3. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$ 在 $\mathbf{R}$ 无界。

证法 应用函数在 A 无界的定义。

证明 $\forall M>0$(限定 $x^2>1$)，有

$$|f(x)|=\left|\frac{x^3}{1+x^2}\right|=|x|\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\geqslant|x|\left(\frac{x^2}{x^2+x^2}\right)$$

$$=\frac{|x|}{2}>M.$$

或 $|x|>2M$，即 $\exists x_M\in\mathbf{R}$，当 $|x_M|>2M\ (x_M^2>1)$，有

$$|f(x_M)|=\left|\frac{x_M^3}{1+x_M^2}\right|>M,$$

即函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$ 在 $\mathbf{R}$ 无界。

例 4. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 单调 $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2, x_3\in I$，且 $x_1<x_2<x_3$，有

$$[f(x_2)-f(x_1)]\cdot[f(x_3)-f(x_2)]\geqslant 0.$$

证法 应用单调函数的定义.

证明 **必要性** 若函数 $f(x)$ 在 I 单调增加(或单调减少)，则 $\forall x_1, x_2, x_3\in I$，且 $x_1<x_2<x_3$，有

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0 \quad 与 \quad f(x_3)-f(x_2)\geqslant 0$$

(或 $\quad f(x_2)-f(x_1)\leqslant 0 \quad$ 与 $\quad f(x_3)-f(x_2)\leqslant 0.$)

于是，$\quad [f(x_2)-f(x_1)]\cdot[f(x_3)-f(x_2)]\geqslant 0.$

充分性 若 $\forall x_1, x_2, x_3\in I$，且 $x_1<x_2<x_3$，有

$$[f(x_2)-f(x_1)]\cdot[f(x_3)-f(x_2)]\geqslant 0$$

从而有 $\quad f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0 \quad$ 与 $\quad f(x_3)-f(x_2)\geqslant 0$;

或 $\quad f(x_2)-f(x_1)\leqslant 0 \quad$ 与 $\quad f(x_3)-f(x_2)\leqslant 0.$

前者说明函数 $f(x)$ 在 I 单调增加，后者说明函数 $f(x)$ 在 I 单调减少. 于是，$f(x)$ 在 I 是单调函数.

例 5. 证明：任意有理数都是狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

的周期.

证法 应用周期函数的定义，已知两个有理数的代数和还是有理数；有理数与无理数的代数和是无理数.

证明 对任意有理数 r，有

$$D(x\pm r)=\left\{\begin{matrix}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{matrix}\right\}=D(x),$$

即任意有理数 r 都是狄里克莱函数 $D(x)$ 的周期.

注意 任意正有理数也都是 $D(x)$ 的周期. 因为正有理数没有最小的，所以 $D(x)$ 不存在基本周期（即最小的正的周期）.

例 6. 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. 求使 $f[f(x)]=x$ 的条件.

解 令

$$f[f(x)]=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\frac{a\dfrac{ax+b}{cx+d}+b}{c\dfrac{ax+b}{cx+d}+d}$$

$$=\frac{a^2x+ab+bcx+bd}{acx+bc+cdx+d^2}$$

$$=\frac{(a^2+bc)x+ab+bd}{(ac+cd)x+bc+d^2}=x$$

只需
$$\begin{cases}a^2+bc=bc+d^2,\\ ab+bd=0,\\ ac+cd=0.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}a=d, & b=c=0,\\ a=-d, & b\text{ 与 }c\text{ 为任意数.}\end{cases}$$

于是，使 $f[f(x)]=x$ 的条件是

$$\begin{cases} a=d, & b=c=0, \\ a=-d, & b \text{ 与 } c \text{ 为任意数}. \end{cases}$$

第一章自我检查题

1. 设长方体的对角线长的集合为 A，对应规律 f 是"对角线长 $x\in A$ 对应它的体积"。问 f 是否是函数？

2. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$。已知 $f(-2)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=5$。求 a,b
c。

3. 设函数 $f(u)$ 的定义域是 $[0, 1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$。(2) $f(\ln x)$。(3) $f(\sin x)$。

4. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，用逻辑符号表示：

(1) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 无界.

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 不是严格增加.

(3) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 不是单调减少.

(4) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 不是奇函数.

(5) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 不是周期函数.

5. 证明：

(1) $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上严格减少.

(2) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，当 $ad-bc>0$ 时，在定义域上严格增加.

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 A 单调增加，函数 $g(x)$ 在 A 单调减少，则函数 $f(x)-g(x)$ 在 A 单调增加.

7. 证明：若 $y=\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是周期函数，函数 $f(y)$ 定义在 $\varphi(\mathbf{R})$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 $\mathbf{R}$ 也是周期函数，且与 φ 有相同周期.

8. 计算下列复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$：

(1) $f(x)=x^2$，$g(x)=\sqrt{x+1}$.

(2) $f(x)=1-x$，$g(x)=x^2+2x$.

(3) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

9. 下列等式在什么范围内成立？为什么？

(1) $y=\cos(\arccos y)$.

(2) $y=\mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,ctg}\,y)$.

10. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, $x\in\mathbf{R}$.

(2) $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$, $0<x<+\infty$.

第二章 极　限

一、内容结构

本章有六节二十一段，主体是函数极限. 极限概念和极限理论自然就成为本章的重点，它们也是本章的难点. 虽然读者在中学《微积分初步》中学习了一些函数极限，但是那里基本上是采用描述性的方法讲授的，因此对极限的了解，在类型上不全，性质上不深刻，理论上也不够严谨. 它们对学习数学分析是不够的，数学分析需要建立在严谨的极限概念和极限理论的基础上.

由于函数类型的不同与自变数变化方式的不同，也就有了各种不同类型的函数极限. 尽管函数极限类型多样，但是极限的思想出自一源，描述极限的方法实质上是完全相同的. 为了读者易于接受极限概念并掌握极限概念的精髓，这里首先讲直观易懂的数列极限，力求将数列极限的思想，数学表述，极限理论等讲得形象直观、全面深透、理论严谨. 这样对学习其它类型的函数极限能起到举一反三触类旁通的效果.

为了读者看到研究数列极限的必要性和理解数列极限的思想，首先(2.1.1)应用刘徽的割圆求，说明计算圆的周长需要数列极限. 其次，根据由特殊到一般，由具体到抽象的认识规律，先对一个特殊的数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$(2.1.2)，详尽分析了这个数列的极限是1的由定性到定量的数学描述，给出一个具体数列极限的数学模型. 然后在此基础上归结出数列极限的一般定义(2.1.3).

给出数列极限定义之后，自然要讨论收敛数列的性质、四则运算、数列收敛的充分条件以及与数列极限有联系的子数列等问题