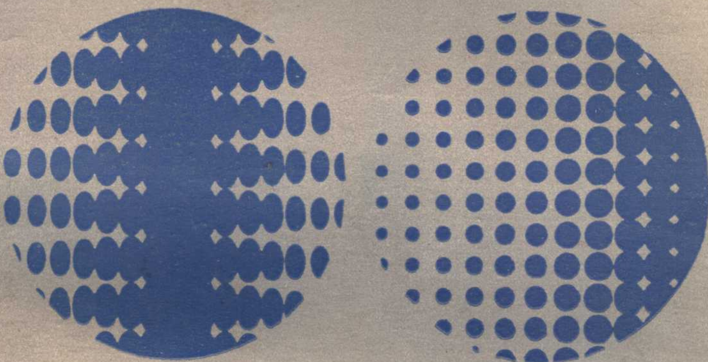
高中代数
解题方法汇集

刘鹏志　等编



青岛出版社

高中代数解题方法汇集

鲁新登字08号

责任编辑　戚道浚
　　　　　刘海波
封面设计　李伯书

高中代数解题方法汇集

青岛出版社出版发行
（青岛市徐州路77号）
胶南市印刷厂印刷

1992年6月第1版　　1992年6月第1次印刷
32开（787×1092毫米）　13.375印张　290千字
印数1—20130
ISBN　7-5436-0757-3/G·357

定价：4.15元

前　言

根据国家教委关于教学改革的精神和《中学数学教学大纲》的要求，我们编写了这本“汇集”，献给广大读者。

众所周知，数学离不开解题，而解题则离不开解题方法。“汇集”就是以此为出发点，对现行高中代数中常用的解题方法进行归纳、整理、分类，并以课本顺序为序，以解题方法为系列编写而成。它的突出特点在于明确地阐明中学代数各章教材中是采用了什么样的解题方法指导解答本章习题的。

“汇集”在内容上不脱离教材，在方法上又高于教材。现行教材中，对一些必要的解题方法、解题思路未做明确系统的介绍。本“汇集”力图作些这方面的弥补，注重解题方法的指导性，因而具有实用性，对指导高中代数的学习将发挥积极的作用。

“汇集”新颖、充实，语言精练，是编者多年教学经验的概括与总结。掌握好方法可节时省功，掌握好方法可举一反三，触类旁通。它既可帮助读者掌握好高中代数的全部知识，又能从“题海”中解脱出来，可供教师教学参考和学生学习使用。

编　者

1992年2月

目　录

前　言

第一章　函数……………………………………………（1）

§1.1 定义法解（证）题……………………………（1）

§1.2 图象法解题……………………………………（17）

§1.3 函数奇偶性的判断方法………………………（22）

§1.4 函数的单调性的证明方法及单调区间的求法……………………………………………（27）

§1.5 指数方程与对数方程的解法…………………（35）

第二章　三角函数………………………………………（50）

§2.1 三角函数的符号………………………………（50）

§2.2 求值与化简……………………………………（57）

§2.3 等式的证明……………………………………（65）

§2.4 周期、最值的求法……………………………（72）

§2.5 三角不等式……………………………………（81）

第三章　两角和与差的三角函数………………………（98）

§3.1 求值与化简……………………………………（98）

§3.2 三角恒等式的证明……………………………（110）

§3.3 三角不等式的解证……………………………（125）

第四章　反三角函数和三角方程 …………………（153）

§4.1 反三角函数…………………………………（154）

§4.2 三角方程的解法……………………………（165）

第五章　数列、极限、数学归纳法……………（195）

§5.1 数列……………………………………………（195）

§5.2 数列的极限…………………………………（217）

§5.3 数学归纳法…………………………………（226）

第六章　不等式…………………………………………（253）

§6.1 不等式的解法………………………………（253）

§6.2 不等式的证明………………………………（264）

§6.3 不等式的应用………………………………（280）

第七章　复数……………………………………………（298）

§7.1 定义法解（证）题…………………………（298）

§7.2 利用复数的性质及运算规律
解（证）题………………………………（307）

§7.3 复数的轨迹方程及其求法………………（318）

§7.4 解方程………………………………………（324）

§7.5 常见的利用复数证明的几个问题………（329）

第八章　排列、组合、二项式定理……………（353）

§8.1 应用加、乘原理解题………………………（353）

§8.2 应用排列、组合公式解应用题…………（356）
§8.3 有限制条件的排列组合问题的解法……（359）
§8.4 排列组合综合题的解法…………………（369）
§8.5 二项展开式的通项及其应用……………（373）
§8.6 二项式定理的应用………………………（379）

第九章 怎样解选择题 …………………………（393）

§9.1 选择题的结构与类型……………………（393）
§9.2 解选择题的常用方法……………………（396）

第一章 函 数

函数是高中数学的重要内容之一。引进函数，使数学研究的内容由静到动，由常量到变量，这是初等数学的一个重大飞跃。由于函数有自变量、因变量、对应法则、定义域、值域，有奇偶性、单调性、周期性等，因而就必须引进许多新的概念，这使数学研究的内容更丰富多彩，而函数自身又各不相同，有幂函数（包括初中阶段学习的一次函数、二次函数、反比例函数）、指数函数、对数函数以及后面的三角函数、反三角函数和一些由简单函数复合而成的函数，这将使我们的函数知识领域扩大，由此而来的题目繁多，题目类型及解题方法也就相应的多且灵活。因而，函数在中学代数中占有较重要的地位。

§1·1 定义法解（证）题

定义是数学的基础，理解和掌握好定义是学习数学的最基本的要求。

每一个定义都是一种新知识的起点，学好定义才能为掌握后面的新知识铺平道路。

每一个定义都有其独特的内涵和外延，有些定义还有隐含着的条件，要学好定义，真正理解它，就必须把定义的每

一个字都能真正理解，只有理解了，才能掌握。

要真正掌握一个定义，除了认真熟悉定义外，还必须做适量的用定义来解决的题目，这样做有两大优点。第一，是应用了定义进行解题；第二，是通过解题进一步加深了对定义的理解。因此，我们应该很好地学会定义法解（证）题。

函数这一章的定义、概念较多，若对定义、概念理解肤浅，生硬地去记忆，就会妨碍解（证）题并进一步妨碍研究函数。而适量并有效地用定义法解（证）题，可以更好地记忆、理解概念，形成一个完整的知识系统。

1.用集合概念解（证）题

集合的概念有子集、交集、并集、补集、空集、全集以及集合相等等。

例1 设集合$A=\{a, b\}$，$B=\{x \mid x\subseteq A\}$，则：

（1）集合A与B的关系用下列哪一个符号表示？$\subset$、$\subseteq$、$\supset$、$\supseteq$、$\neq$、$\in$、$\notin$。

（2）集合B有多少个子集？

解：（1）由集合的定义可知，集合B是由元素x组成，而元素x是集合A的子集，集合A的子集有ϕ、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{a, b\}=A$，故集合$B=\{\phi, \{a\}, \{b\}, A\}$，显然集合$A$是集合$B$中的一个元素，用符号可表示为$A\in B$。

（2）集合B共有4个元素，因此它有$C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=2^4=16$个子集。

注：①两集合的元素若具备共同的性质，则集合间的关系可用从属符号，否则，则需要具体问题具体讨论。

②一般地，集合A有n个元素，则它有$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$个子集，有$2^n-1$个真子集。

例2 记A、B分别是二次方程$2x^2+px+q=0$与$6x^2+(2-p)x+5+q=0$的解集，且$A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$。求$A\cup B$。

解：$\because A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，

$\therefore \quad \frac{1}{2}\in A,\ \frac{1}{2}\in B$。

而$A=\{x\mid 2x^2+px+q=0\}$，$B=\{x\mid 6x^2+(2-p)x+5+q=0\}$。

$$\therefore 有\begin{cases}2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}p+q=0,\\ 6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(2-p)+q+5=0.\end{cases}$$

解此方程组得$\begin{cases}p=7,\\ q=-4.\end{cases}$

此时$A=\{x|2x^2+7x-4=0\}=\left\{\frac{1}{2},-4\right\}$，

$B=\{x\mid 6x^2-5x+1=0\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$。

因此$A\cup B=\left\{\frac{1}{2},-4,\frac{1}{3}\right\}$。

本题的结果是紧扣集合、交集、并集的定义得到的，无疑这将加深对集合、交集等概念的理解。

例3 判断下面各组中集合A与集合B之间的关系。

（1）$A=\{x \mid x=(2n+1)\pi,\ n\in Z\}$，

$B=\{y \mid y=(4m\pm1)\pi,\ m\in Z\}$；

（2）$A=\left\{x \mid x=\frac{n}{3}\pi,\ n\in Z\right\}$，

$$B=\left\{y \mid y=\frac{2m-3}{6}\pi,\ m\in Z\right\}$$，

（3）$A=\left\{x \mid x=\cos\frac{n}{3}\pi,\ n\in Z\right\}$，

$$B=\left\{y \mid y=\sin\frac{2m-3}{6}\pi,\ m\in Z\right\}$$。

解：（1）若去掉π，集合A、B都是表示整数中的奇数，因此$A=B$。

（2）$\because$ $A=\left\{x \mid x=\frac{2n}{6}\pi,\ n\in Z\right\}$，

而$B=\left\{y \mid y=\frac{2m-3}{6}\pi,\ m\in Z\right\}$，

$\therefore$ $A\cap B=\phi$。

（3）$\because$ $B=\left\{y \mid y=\sin\left(\frac{1}{3}m\pi-\frac{\pi}{2}\right),\ m\in Z\right\}$

$=\left\{y \mid y=-\cos\frac{m}{3}\pi,\ m\in Z\right\}$

$=\left\{-\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$，

而$A=\left\{x \mid x=\cos\frac{n}{3}\pi,\ n\in Z\right\}$

$=\left\{-\frac{1}{2},-1,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$,

$\therefore A=B$。

注：判断两个集合的关系，首先要统一两集合元素的表示形式。本例中第一小题是把元素都统一成奇数乘π考虑，第二小题是统一分母，第三小题是统一函数。否则若只看表面现象，很难得到正确结论。

例4 设全集 $I=\{2,\ 4,\ a^2-a+1\}$，$A=\{2,\ a+1\}$，$\overline{A}=\{7\}$，求a的值。

解：$\because A\cup\overline{A}=I$，

即$\{2,\ a+1,\ 7\}=\{2,\ 4,\ a^2-a+1\}$。

由两集合相等的概念得：

$$\begin{cases} a+1=4 \\ a^2-a+1=7 \end{cases}$$

解得$a=3$。

例5 设全集$I=\{x\mid x$为不大于20的质数$\}$，且$P\cap S=\{3,\ 5\}$，$\overline{P}\cap S=\{7,\ 19\}$，$\overline{P}\cap\overline{S}=\{2,\ 17\}$，求集合$P$及集合$S$。

解：$I=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$，因为$P\cap S=\{3,\ 5\}$，$\overline{P}\cap S=\{7,\ 19\}$，而$P\cup\overline{P}=I$，所以$S\cap I=\{3,\ 5,\ 7,\ 19\}$，即$S=\{3,\ 5,\ 7,\ 19\}$。

由$\overline{P}\cap\overline{S}=\{2,\ 17\}$得$P\cup S=\{3,5,7,11,13,19\}$，而$P\cap S=\{3,\ 5\}$，因此$P=\{3,\ 5,\ 11,\ 13\}$。

本题关键在于利用补集性质$P\cup\overline{P}=I$，若不注意利用这一点，推理就会繁琐的多。

例6 设$A=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$B=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，问$a$取何值时，

（1）集合$(A\cup B)\cap C$只有两个元素？

（2）集合$(A\cup B)\cap C$只有三个元素？

解： $(A\cup B)\cap C$的元素是直线$ax+y=1$，$x+ay=1$，和圆$x^2+y^2=1$的交点。图1—1，1—2这两种情况表示只有两个交点，这时$a=0$或$a=1$，图1—3这种情况表示只有3个交点，这时直线$ax+y=1$和直线$x+ay=1$的交点$\left(\frac{1}{a+1},\ \frac{1}{a+1}\right)$在圆$x^2+y^2=1$上，将点的坐标代入圆的方程解得$a=-1\pm\sqrt{2}$。

因此当$a=0$或$a=1$时，$(A\cup B)\cap C$有两个元素；当$a=-1\pm\sqrt{2}$时，$(A\cup B)\cap C$有三个元素。

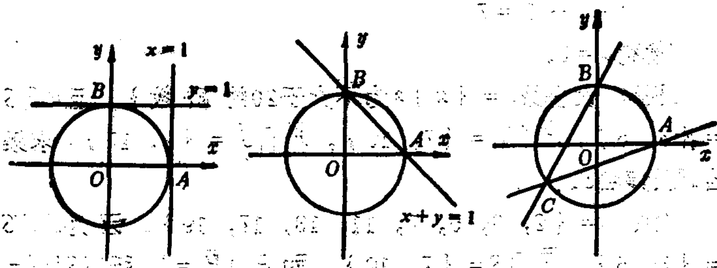


图1—1　图1—2　图1—3

集合在不等式、解析几何、复数、排列组合等方面都有广泛的应用，遇到此类问题，首先要把集合符号翻译成数学语言，打好进一步研究问题的基础。

从上面的例题解答可以看出，如果对集合概念只是停留

在记住的水平上，那么对较灵活的集合题目就会束手无策，而在记忆的基础上加以强化训练，集合概念便显得明晰、透彻。

2.用函数的概念解（证）题

函数的概念包括函数定义、定义域、值域、对应法则、奇偶性、单调性、周期性等。其中函数的单调性、奇偶性，后面有专门一节介绍，这里着重介绍利用函数的其它一些概念来解（证）题。

例 7 （1）已知 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>0) \\ \pi & (x=0) \\ 0 & (x<0), \end{cases}$

求$f\{f[f(-1)]\}$的值。

（2）已知$f(x)=9x+1, g(x)=x^2$，求满足$f[g(x)]=g[f(x)]$的x的值。

解：（1）$f\{f[f(-1)]\}=f[f(0)]=f(\pi)=\pi+1$。

（2）$\because f[g(x)]=9x^2+1$，$g[f(x)]=(9x+1)^2$，

$\therefore$由已知得到二次方程，$9x^2+1=(9x+1)^2$。

整理得，$72x^2+18x=0$，因此$x=0$或$x=-\dfrac{1}{4}$。

例8 已知$f(x-1)=x+\dfrac{1}{x}$，求$f(x+1)$的解析式。

解：方法Ⅰ（拼凑法）

$f(x-1)=(x-1)+1+\dfrac{1}{(x-1)+1}$，

$\therefore f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$。

$$\therefore f(x+1)=(x+1)+1+\frac{1}{(x+1)+1}$$

$$=x+2+\frac{1}{x+2}.$$

方法Ⅱ（换元法）

令$t=x-1$，则$x=t+1$，

于是$f(t)=t+1+\dfrac{1}{t+1}$，$f(t+1)=(t+1)+1+$

$$\frac{1}{(t+1)+1}=t+2+\frac{1}{t+2},$$

$$\therefore f(x+1)=x+2+\frac{1}{x+2}.$$

注：换元法和拼凑法的实质是一样的。能顺利地用代换变量t表示出x的题目，用换元法简单，如本例。否则用拼凑法较好，如已知$f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$，求$f(x)$。

例9 已知$f(\cos x)=\sin x$，求$f(\sin x)$。

解：$f(\sin x)=f\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=\cos x,$$

$\therefore f(\sin x)=\cos x$。

例9若先得函数$f(x)$的解析式，然后再求$f(\sin x)$，便显得很笨拙，因此对求函数解析式的题目要因题而异，灵活处理。

显然，上面三个例子对理解函数定义、自变量、解析式等概念大有益处。

例10 已知函数$y=f(x)$的定义域为$[1, 3]$，求函数$y=f(x^2)$及$y=f(x-1)$的定义域。

解：对函数$y=f(x^2)$，若视x^2为自变量，则由已知，$1\leqslant x^2\leqslant 3$，解得$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$或$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$。

因此函数$y=f(x^2)$的定义域是$\{x\mid -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$或$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$。

函数$y=f(x-1)$的定义域请读者自己考虑。

函数的定义域是使函数有意义的自变量x的取值范围，要熟练地完成例10，就必须对定义域有透彻的理解。

例11 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{|x-2|+|x+1|}$；

（2）$y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-1}$；

（3）$y=\sqrt[k]{\dfrac{1}{x+2}}-\log_{\frac{1}{2}}\log_2(3-x)$（$k\in N$）；

（4）$y=\log_{\frac{1}{2}}(a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x})$（$a>0$，$b>0$且$a\neq 1$，$b\neq 1$）。

解：（1）因为对任意$x\in R$，$|x-2|+|x+1|\neq 0$，所以，函数$y=\dfrac{1}{|x-2|+|x+1|}$的定义域为R。

（2）要使函数有意义，须

$$\begin{cases}1-2x\geqslant 0,\\ 2x-1\geqslant 0.\end{cases}$$

解之得　$x=\dfrac{1}{2}$。

故函数$y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-1}$的定义域是$\{\frac{1}{2}\}$。

（3）当$k=2n$（$n\in N$）时，要使函数有意义，须

$$\begin{cases}\frac{1}{x+2}>0,\\ \log_2(3-x)>0,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x>-2,\\ 3-x>1.\end{cases}$$

得 $-2<x<2$。

当$k=2n-1$（$n\in N$）时，有

$$\begin{cases}x+2\neq0,\\ \log_2(3-x)>0.\end{cases}$$

解之得，$x<2$且$x\neq-2$。

所以，当$k=2n$（$n\in N$）时，函数$y=\sqrt[k]{\frac{1}{x+2}}+\log_{\frac{1}{2}}\log_2(3-x)$的定义域是$\{x\mid-2<x<2\}$；当$k=2n-1$（$n\in N$）时，定义域为$\{x\mid x<2$且$x\neq-2\}$。

（4）要使函数有意义，须

$$a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}>0,$$

两边同除以b^{2x}得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+2\left(\frac{a}{b}\right)^x-1>0.$$

$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^x<-1-\sqrt{2}$（舍去）或$\left(\frac{a}{b}\right)^x>\sqrt{2}-1$，

$\therefore$当$a>b>0$时，$x>\log_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$；

当$a=b>0$时，$x\in R$；

当$0<a<b$时，$x<\log_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$。