高等学校数学学习辅导教材

概率论与数理统计

全程学习指导

人大·概率论与数理统计修订版

王丽燕　石鸿雁　王丽娟 ◎ 编著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

概率论与数理统计

·全程学习指导·

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计全程学习指导(人大版) / 王丽燕,石鸿雁,王丽娟编著 .—大连 :大连理工大学出版社, 2004.9
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-2645-X

Ⅰ. 概…　Ⅱ. ①王…　②石…　③王…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学—参考资料　②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 097730 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-84708842　传真:0411-84701466　邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　　印张:11.75　　字数:309 千字
印数:1 ~ 6 000
2004 年 9 月第 1 版　　2004 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:吴孝东　　责任校对:高继巍
封面设计:宋　蕾

定　价:15.00 元

前言

《概率论与数理统计》是大学经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助在校大学生及考研的同学学好《概率论与数理统计》，扩大课堂信息量，提高应试能力，我们根据教育部高等院校教学指导委员会2003年审订的“本科数学基础课程教学基本要求”(教学大纲)，又根据教育部“2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求，融学习指导和考研为一体编写了此书。书中设计了一些必要的版块，使全书的理论体系更臻完善。选取最典型、最权威的4套综合测试试卷并给出参考答案，使本书更适合学习及考研的需要。

本书仍然按照被全国许多院校经济类、管理类专业采用的《概率论与数理统计·修订版》(中国人民大学出版社，袁荫棠编)的章节顺序，分为11章，每章均设计了4个版块，即

知识点考点精要 列出基本概念、重要定理和主要内容，突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容。

典型题真题精解 精选历年研究生入学考试试题中具有代表性的例题进行详尽的分析和解析。这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强，旨在提高同学的分析问题能力，掌握基本概念和理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧。

教材习题同步解析 针对《概率论与数理统计》教材中的习题，几乎给出了全部的解，这样更能方便读者对照和分析。值得提醒的是，解题能力需要亲自动手，通过本身的实践，才能真正得到锻炼，从而不断提高解题能力。

模拟试题自测 自测旨在进一步强化解题训练，反映考试的重点、难点，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果。

本书包含了1987年～2004年研究生入学考试的全部试题。虽然每年的试题都有变化，但是知识的范围和结构基本类同。同时我们还可看出：试题与科学的思维方式，熟练的技巧，涉及知识的使用意识等密切相关。因此深入掌握基本概念、基础理论、常用方法是至关重要的，精读并学会解一定数量的范例不失为应试的有效途径。为增加信息量，考研真题采用“年代/类别/分值”标注方式，如“990406”，说明此题是1999年数学四的考题，分值6分。

本书在编写过程中得到大连海事大学李彩荣教授的指导，大连大学王艳芳副教授、鞍山科技大学李海燕副教授等帮助验算了大部分习题，张金利等作了大量的校对工作，大连海事大学杜祖缔教授审阅了全书，并提出了宝贵意见。本书还使用了中国人民大学出版社出版的袁荫棠主编的《概率论与数理统计》中的部分习题，编者在此向他们一并表示衷心的感谢！

限于编者的水平，错漏不当之处在所难免，诚恳期望同行和读者批评指正。

编著者
2004年8月

目　录

第一章　随机事件及其概率

知识点考点精要

随机事件与样本空间，事件的关系与运算，完全(完备)事件组。概率的概念，概率的基本性质，古典概型，几何概型，条件概率，概率的基本公式。事件的独立性，独立重复试验。

一、随机试验与随机事件

1. 基本概念

(1) 随机试验：如果试验满足下列三个特性：

1° 可以在相同的条件下重复地进行；

2° 每次试验的结果具有多种可能性，试验前可明确知道所有可能结果；

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。则称该试验为随机试验，简称试验，用 E 表示。

(2) 样本空间：试验的所有可能结果构成的集合，称为样本空间。用 Ω 表示。样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点。

(3) 随机事件：在一次试验中可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果，称为随机事件，简称为事件。通常用大写字母 A、B、C 等表示。

每次试验中一定发生的事件称为必然事件，用 Ω 表示。

每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，用 $\varnothing$ 表示。只含有一个样本点的事件，称为基本事件。

2. 事件之间的关系与运算

(1) 事件之间的四种关系

关　系	符　号	概率论	集合论
包含关系	$A \subseteq B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
等价关系	$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互斥关系	$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(或互不相容)	A 与 B 无公共元素

(2) 事件之间的三种运算

运 算	符 号	概率论	集合论
事件的和(并)	$A \cup B$(或 $A + B$)	事件"A 与 B 至少有一个发生"	A 与 B 的并集
	$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$	事件"$A_1,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"	$A_1,\cdots,A_n$ 的并集
事件的积(交)	$A \cap B$(或 AB)	事件"A 与 B 同时发生"	A 与 B 的交集
	$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$	事件"$A_1,\cdots,A_n$ 同时发生"	$A_1,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A - B$	事件"A 发生而 B 不发生"	A 与 B 的差集

(3) 完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容的事件,并且 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$,称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。

二、随机事件的概率及其性质

1. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果它满足下列条件:

(1) 对于每一事件 A,$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2)$P(\Omega)=1$;

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j$,$A_iA_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots,n$,则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$(有限可加性)。

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$(可列可加性)。

2. 概率的性质

(1) 不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$。必然事件的概率为 1,即 $P(\Omega)=1$。

(2) 如果 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$,$P(B)\geqslant P(A)$。

(3) 对于任一事件 A,$P(\overline{A})=1-P(A)$。

(4) 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

一般地,对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

3. 概率的古典定义

若随机试验 E 的样本空间 Ω 由 n 个基本事件构成(即 Ω 只含有有限多个基本事件),每个基本事件是否发生具有相同的可能性(等可能性),事件 A 由其中 m 个基本事件组成,则

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

4. 几何概率

将古典概型中的有限推广到无限,保留等可能性,就得到几何概型。

设区域G的长度(面积或体积)为D,质点可以等可能地落在G中的任何一点,g是G的一部分,其长度(面积或体积)为d,定义事件A"质点落在g内"的概率为

$$P(A)=d/D$$

5. 条件概率

在事件B发生的条件下,事件A发生的概率,称为事件A在事件B已发生的条件下的条件概率。记做$P(A|B)$。公式为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

三、计算公式

1. 加法公式

如果事件A与B是互不相容的,则事件A与B的和的概率等于它们的概率之和。即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

对于有限和可列的情形仍然成立。

2. 乘法公式

两个事件的积的概率等于其中一个事件的概率乘以在此事件出现的条件下另一事件的条件概率,即

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad (P(A)>0)$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad (P(B)>0)$$

一般地

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})\quad (P(A_1\cdots A_{n-1})>0)$$

3. 全概率公式

如果事件组$B_1,B_2,\cdots,B_n$满足$B_1,B_2,\cdots,B_n$互不相容,$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$(即$B_1,B_2,\cdots,B_n$为完备事件组),且$P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,$

n,则对任一事件 A 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

4. 贝叶斯公式

在全概率公式的条件下,如果 $P(A) > 0$,则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

四、事件的独立性

设 A,B 是试验 E 的两个事件,若 $P(B|A) = P(B)$ 或 $P(A|B) = P(A)$,称事件 A 与 B 是相互独立的。此时 $P(AB) = P(A)P(B)$。

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n > 2)$ 个事件,如果对于任意 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个事件积事件的概率等于各个事件概率的积,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的。

若 A,B 独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都独立。

五、独立试验序列概型

如果一个试验 E 只有两个对立的可能结果,事件 A 发生或事件 $\overline{A}$ 发生,且各次试验结果互不影响,即每次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果,设 $P(A) = p$,$P(\overline{A}) = 1 - p = q(0 < p < 1)$。将 E 独立地重复进行 n 次,则称这一串重复的独立试验为 n 重贝努利试验,简称为贝努利概型或独立试验序列概型。

在 n 重贝努利试验中,事件 A 恰好发生 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,2,\cdots,n$$

此公式也称为二项概率公式。

典型题真题精解

【例 1】（事件的运算）设 A,B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=$ ______。

解 根据事件的运算及其性质，可得

$$(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=\varnothing$$

从而 $$P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=0$$

【例 2】（920103）（概率的性质）已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，则事件 A,B,C 全不发生的概率为多少？

解 $$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$
$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]$$

因 $ABC\subset AB$，所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，故

$$P(ABC)=0$$

从而 $$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{16}\right)=\frac{3}{8}$$

【例 3】（900405）（古典概型）从 $0,1,2,\cdots,9$ 等十个数字中任选出三个不同的数字，试求下列事件的概率。

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；

$A_2=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$；

$A_3=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$。

解 随机试验是从十个数字中任取三个数字，样本空间 Ω 的样本点总数为 C_{10}^3。

如果取得的三个数字不含 0 和 5，则这三个数字必须在其余八个数字中取得，故事件 A_1 所包含的样本点总数为 C_8^3，从而

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

如果取得的三个数字中含 0，则需取到 0，再在其余 9 个数字中取两个数字，这样有可能取到 5，所以再将取到 5 的 $C_2^2C_8^1$ 种情况去掉，得事件 A_2 所包含的样本点数为 $C_1^1C_9^2-C_2^2C_8^1$，从而

$$P(A_2)=\frac{C_1^1C_9^2-C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}$$

或者先取到 0，再在不含 5 的 8 个数字中任取两个数字，则 A_2 所包含的样本点总数为 $C_1^1C_8^2$，从而

$$P(A_2)=\frac{C_1^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}$$

如果记 B 为事件"取得三个数字中不含 0"，C 为事件"取得三个数字中不含 5"，则 $A_3=B\cup C$，从而

$$P(A_3)=P(B)+P(C)-P(BC)$$
$$=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+\frac{C_9^3}{C_{10}^3}-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$$

同类型的问题还有产品的随机抽样问题，摸球问题，鞋子配对问题等。

【例 4】（920303）（古典概型）将 C,C,E,E,I,N,S 等七个字母随机地排成一行，那么恰好排成英文单词 $SCIENCE$ 的概率为多少？

解　将七个字母随机地排成一行，共有 P_7^7 种排法，这就是随机试验的样本空间所含的样本点总数。而排成英文单词 $SCIENCE$ 共有 $1\times2\times1\times2\times1\times1\times1=4$ 种排法，故所求的概率为

$$p=\frac{4}{P_7^7}=\frac{1}{1260}$$

同类型的问题还有书、报及电话号码等的排列问题。

【例 5】 (古典概型)掷 5 次骰子,试求(1) 恰好有 3 次点数相同的概率;(2) 至少有两次 6 点的概率。

解 (1)随机试验的样本空间所含的基本事件总数为 6^5,5 次中恰好有 3 次是 1 点的基本事件数是 $C_5^3 5^2$,恰好有 3 次是 2,3,…,6 点的基本事件数也分别是 $C_5^3 5^2$,故

$$p=\frac{6\cdot C_5^3\cdot 5^2}{6^5}=\frac{125}{648}=0.193$$

(2) 不出现 6 点的基本事件数是 5^5,只出现一次 6 点的基本事件数是 $C_5^1 5^4$,故至少出现两次 6 点的概率是

$$p=1-\frac{5^5}{6^5}-\frac{C_5^1\cdot 5^4}{6^5}=\frac{1526}{7776}=0.196$$

同类型的问题还有盒子装球,分房问题,邮信及生日问题等。

【例 6】 (会面问题,几何概型)甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间在某处会面,并约定先到者应等候另一个人一刻钟,过时即可离去。求两人能会面的概率。

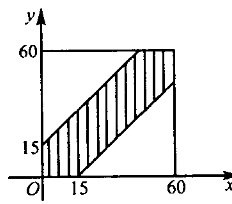

图 1-1

解 以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间,则两人能会面的充要条件为

$$|x-y|\leqslant 15$$

如图 1-1 建立坐标系,则 (x,y) 的所有可能结果是边长为 60 的正方形,而可能的会面时间是图中阴影部分所示。这是一个几何概率

问题，由等可能性，

$$p = d/D = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45}{60^2} = \frac{7}{16}$$

【例 7】 （条件概率）掷两枚骰子，在第一枚骰子出现的点数被 3 整除的条件下，求两枚骰子出现的点数之和大于 8 的概率。

解法 1 （利用条件概率的定义）同时掷两枚骰子，共有 $n = 6 \times 6 = 36$ 种可能结果，这就是样本空间所包含的样本点总数。若记事件 A 为“第一枚骰子出现的点数能被 3 整除”，则第一枚骰子出现 3 点或 6 点，此时事件 A 所包含的样本点总数为 $m = 2 \times 6 = 12$。记事件 B 为“两枚骰子出现的点数之和大于 8”，则 $AB = \{(3,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，从而

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{5}{36}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{5/36}{1/3} = \frac{5}{12}$$

解法 2 （利用缩减样本空间）已知第一枚骰子出现的点数能被 3 整除，此时的缩减样本空间为 $\Omega_A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，共有 12 个样本点，其中“两枚骰子出现的点数之和大于 8”的共有 5 个样本点，于是

$$P(B|A) = \frac{5}{12}$$

【例 8】 （930103）（全概率公式）一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不放回，则第二次抽出的是次品的概率为多少？

解　记 A 为第一次抽出的是次品,B 为第二次抽取的是次品,则 $B = AB + \overline{A}B$,从而

$$p = P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} + \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{6}$$

同类型的还有抽签等问题。这类问题都是将一个复杂的事件分解成若干个简单事件的和,再利用加法公式进行计算。

【例 9】（独立性）甲、乙两人同时向一敌机炮击,已知甲击中的概率为 0.6,乙击中的概率为 0.5,求敌机被击中的概率。

解法 1　记 A 为事件“甲击中敌机”,B 为事件“乙击中敌机”,C 为事件“敌机被击中”,则 $C = A \cup B$,于是

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.6 + 0.5 - 0.6 \times 0.5 = 0.8$$

解法 2　$P(\overline{C}) = P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}\ \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

$$= (1 - 0.6) \times (1 - 0.5) = 0.2$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0.2 = 0.8$$

【例 10】（独立性）假设一口袋中装有 4 个球,其中白球一个,红球一个,黄球一个,另一个球涂有白、红、黄三种颜色。记事件 A 为“从袋中任取一个球,该球涂有白色”,B 为“从袋中任取一球,该球涂有红色”,C 为“从袋中任取一球,该球涂有黄色”,求 $P(A)$,$P(B)$,$P(C)$,$P(AB)$,$P(BC)$,$P(AC)$,$P(ABC)$。

解　从袋中任取一球,共有 4 种取法,从而样本空间的样本点总数为 $n = 4$,而事件 A、B、C 中分别包含 2 个样本点,事件 AB、BC、AC、ABC 分别包含 1 个样本点,从而

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$