新世纪高职高专基础课教材

概率论与数理统计

经济应用数学基础之三

元如林　总主编
洪永成　主　编
方　勇　副主编

GAILüLUN YU SHULI TONGJI

上海财经大学出版社

前言

QIAN YAN

本套教材是为高职高专经济类和管理类学生编写的，同时也适合各类函授大学、夜大学等成人教育专科学生使用，还可供读者自学使用．

编者参照高职高专《经济数学基础课程教学基本要求》，针对使用对象的特点，结合作者多年的教学实践和教学改革的实际经验，本着“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，对内容的取舍和编排进行了必要的处理．这套教材注意从实际问题引入概念，淡化了某些理论性的证明，充分利用图形等直观表现形式，介绍了一些数学模型，给出了较多的例题．这套教材认真贯彻启发式教学原则，强调对学生基本运算能力、分析和解决实践问题能力的培养，力求使本套教材通俗易懂、深入浅出，便于教师讲授和读者阅读．

全套教材由元如林任总主编，共分三册：第一册《微积分》，第二册《线性代数》，第三册《概率论与数理统计》．

第三册《概率论与数理统计》由洪永成任主编，方勇任副主编，内容包括：第一章随机事件及其概率、第二章随机变量及其分布、第三章二维随机变量、第四章随机变量的数字特征、第五章数理统计的基本概念、第六章参数估计、第七章假设检验、第八章方差分析与回归分析．

参加本册教材编写的有洪永成（第一章、第七章）、解玉成（第二章）、李晓彬（第三章、第四章）、刘煦（第五章）、车荣强（第六章）、方勇（第八章），由元如林和洪永成进行审阅与统稿．

本套教材的编写参考了已出版的相关教材，在此向这些教材的作者表示感谢！

在本套教材的编写过程中，得到上海财经大学出版社的大力支持，得到上海金融学院领导、基础部及有关部门的关心和支持，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，错误缺点在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

2004年6月

目录

MU LU

第一章

随机事件及其概率

本章主要介绍随机事件的概念及事件间的关系和运算、概率的定义及运算法则、条件概率、全概率公式和独立试验概型、n重贝努里试验．

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象和统计规律性

在实际工作和现实生活中，存在着大量的在一定条件下必然会发生或不发生的现象，我们称为**确定性现象**．自然科学的诸多定理反复验证了这些确定性现象的正确性和必然性．

然而，又存在着与确定性现象不同的另一类现象．例如，掷一枚质地均匀的硬币，可能出现正面，也可能出现反面；购买彩票，有可能中奖，也可能不中；生儿育女，谁也无法事前料定．这类在一定条件下有多种可能的结果，且事先无法预知的现象称为**随机现象**．

概率论与数理统计是一门研究随机现象的量的规律性的数学学科，是近代数学的重要组成部分．

对随机现象进行大量重复观察时，随机现象出现的结果会呈现出一定的规律性，我们称这种规律性为**统计规律性**．例如，反复抛掷一枚质地均匀的硬币，记录其结果就会发现，当抛掷次数很大时，出现正面和反面的次数会愈来愈接近各占半数．概率论与数理统计从理论上揭示了这种统计规律性．

1.1.2 随机事件

研究随机现象，就要对各种事物进行观察，观察的过程叫**试验**．概率论里所讨论的试验具有以下特点：

(1)在相同的条件下试验可以重复进行；

(2)每次试验的结果具有多种可能性，但在试验之前可以明确试验的所有可能结果；

(3)每次试验前不能确定该次试验将出现哪种结果．

具有上述性质的试验称为**随机试验**，而随机试验的结果称为**事件**，又称**随机事件**．

随机事件通常用大写字母 A、B、C 等表示．在随机事件中，把不能分解的最简单的随机事件称为**基本事件**．又规定两种特殊的随机事件：

(1)在一定条件下必然要发生的事件，称为**必然事件**，用符号 Ω 表示；

(2)在一定条件下必然不发生的事件，称为**不可能事件**，用符号 Φ 表示．

例如，在掷一颗骰子的试验中，观察其出现的点数，“1 点”，“2 点”，…，“6 点”都是基本事件．“奇数点”或“大于 3 点”等也是随机事件，但不是基本事件，而是由若干基本事件组成．事件“点数小于 7”是必然事件，事件“点数等于 8”是不可能事件．概率论所研究的都是随机事件，为讨论问题方便，将必然事件 Ω 和不可能事件 Φ 也当作随机事件，作为随机事件的两个极端情况．

对于试验的每一个基本事件，用只包含一个元素的单点集合 $\{\omega\}$ 表示；由若干个基本事件组成的事件，用包含若干个相应元素的集合表示；所有基本事件对应的全部元素组成的集合，称为**样本空间**．由于每次试验的结果必然出现全部基本事件之一，因此样本空间作为一个事件是必然事件，仍以 Ω 表示．样本空间中的每一个元素，即每一个基本事件称为**样本点**．这样，可以把随机事件定义为样本点的某个集合．所谓某事件发生，就是当且仅当该集合所包含的某一样本点在试验中出现．不可能事件就是空集 Φ.

例如，一副扑克牌以 52 张牌计算，共有 52 个样本点，所有样本点的集合是样本空间．随机事件 A“任取 1 张为黑桃”包含有 13 张牌，即 13 个样本点；随机事件 B“任取 1 张为 Q”包含 4 个样本点．$A=\{$黑桃 2，黑桃 3，…，黑桃 $A\}$；$B=\{$黑桃 Q，红桃 Q，草花 Q，方块 $Q\}$.

1.1.3 事件间的关系和运算

概率论中的事件是赋予了具体含义的集合，因此，集合论的知识可以完全用来解释事件间的关系和运算．

为了直观，我们经常用图形表示事件．一般地，用平面上的一矩形表示必然事件，该区域内的一个小区域表示事件．

事件间的关系和运算有以下几点：

1. 事件的包含和相等

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 被事件 B 包含，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 如果 $A\supset B$ 同时又有 $B\supset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$. 显然，任一事件 A，有 $\Phi\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的和（又称事件的并）

两个事件 A、B 中至少有一个发生，可看做"A 或 B"这一事件，称为事件 A 与 B 的**和（并）**，它是由事件 A 和 B 所有的样本点组成的集合，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

3. 事件的积（又称事件的交）

两个事件 A 与 B 同时发生，可看做"A 且 B"这一事件，称为事件的**积（交）**，它是由事件 A 和 B 的所有公共样本点构成的集合，记作 AB 或 $A\cap B$.

4. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，可看做"A 和 B 的差"这一事件，称为事件的**差**，它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合，记作 $A-B$. 显然，如果 $AB=\Phi$，就有 $A-B=A$；如果 $A\supset B$，就有 $B-A=\Phi$.

5. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，称事件 A 与事件 B **互不相容**（又称**互斥**）. 互不相容事件 A 和 B 没有公共的样本点．显然，基本事件之间是互不相容的．

6. 对立事件

事件"非 A"称为 A 的**对立事件**（或**逆事件**），它是由样本空间中所有不属于 A 的那些样本点组成的集合，记作 $\overline{A}$. 显然，对立事件一定互斥，互斥事件不一定对立．

$$A\overline{A}=\Phi \quad A+\overline{A}=\Omega \quad \overline{A}=\Omega-A \quad \overline{\overline{A}}=A$$

7. 完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互斥，即 $A_iA_j=\Phi(1\leqslant i<j\leqslant n)$，而且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个**完备事件组**．显然，A 和 $\overline{A}$ 是一个完备事件组．

事件的运算和集合的运算一样，满足下列运算规律：

(1)交换律　$A+B=B+A$

$AB=BA$

(2)结合律　$A+(B+C)=(A+B)+C$

$(AB)C=A(BC)$

(3)分配律　$(A+B)C=AC+BC$

$(AB)+C=(A+C)(B+C)$

(4)对偶律 $\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$

$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

事件间的关系和运算可用下列图形表示,见图 1—1.

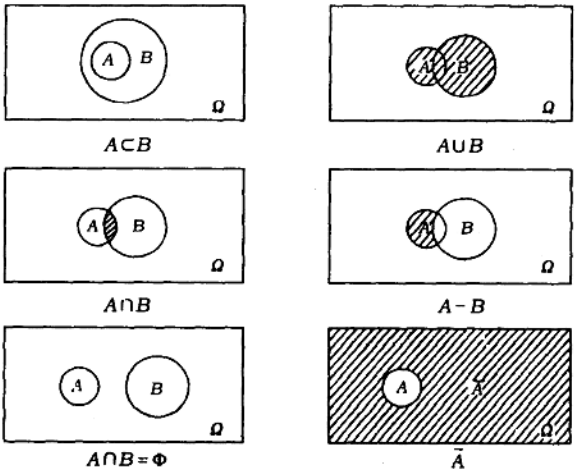

图 1—1

例 1 掷一颗骰子的试验,观察出现的点数. 事件 A 表示"奇数点",B 表示"点数小于 5",C 表示"小于 5 的偶数点". 用集合的列举法表示下列事件:$\Omega,A,B,C,A+B,A-B,AB,AC,C-A,\overline{B}+A$.

解 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A=\{1,3,5\}$ $B=\{1,2,3,4\}$

$C=\{2,4\}$ $A+B=\{1,2,3,4,5\}$ $A-B=\{5\}$

$AB=\{1,3\}$ $AC=\Phi$ $C-A=\{2,4\}$

$\overline{B}+A=\{1,3,5,6\}$

例 2 从一批产品中每次取出一个产品进行检验,作 3 次不放回抽样,A_i 表示第 i 次取得合格品($i=1,2,3$). 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件:

(1)3 次全是合格品;

(2)3 次中至少有 1 次是合格品;

(3)3 次中恰有 2 次取到合格品;

(4)3 次中最多有 1 次取到合格品.

解 (1)A_1,A_2,A_3 同时发生,可表示为 $A_1A_2A_3$

(2)A_1,A_2,A_3 中至少有一个发生,可表示为 $A_1+A_2+A_3$ 或者

$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1A_2A_3$$

(3)A_1,A_2,A_3 中有两个发生,另一个不发生,可表示为

$$\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$$

或者

$$A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3-A_1A_2A_3$$

(4)A_1,A_2,A_3 中至少有两个不发生,可表示为$\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2$ 或者

$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

例 3 如果 x 表示一个在数轴上随机运动的质点,试说明下列各事件的关系:

$$A=\{x:x\leqslant 20\}\quad B=\{x:x>3\}\quad C=\{x:x<9\}$$

$$D=\{x:x<-5\}\quad E=\{x:x\geqslant 9\}$$

解 在数轴上画出各个事件的示意,如图 1—2 所示。

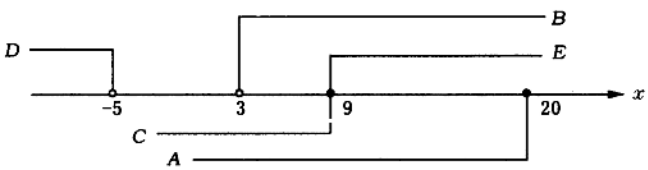

图 1—2

由图 1—2 可知,$A\supset C\supset D,B\supset E$

D 与 B,D 与 E 互不相容

C 与 E 为对立事件

B 与 C,B 与 A,E 与 A 相容

1.2 随机事件的概率

概率论研究的是随机现象的量的规律性,我们必须对事件发生的可能性的大小进行量的描述,这个量称为事件的概率. 随机事件 A 的概率记为 $P(A)$.

1.2.1 概率的统计定义

随机事件在一次试验中是否发生是不确定的,但在大量重复试验中,它的发生具有统计规律性. 我们可以从大量试验出发来研究某一随机事件发生的可能性,即确定事件 A 的概率 $P(A)$.

以简单的掷硬币试验为例,出现正面为事件 A,如果掷 n 次,出现 m 次正面,则$\frac{m}{n}$称为事件 A 发生的频率. 频率并不等于事件 A 的概率. 例如某次试验掷了 10 次,出现 3 次正面,频率为$\frac{3}{10}$,我们并不能以此确定 $P(A)=0.3$. 但是,如果继续重复抛掷,次数越来

越多，记录出现正面的次数，人们发现，频率$\frac{m}{n}$的数值徘徊在某个确定的常数 0.5 附近．前人作了大量的试验，均证实了这一结论．抛掷一万次以上，频率$\frac{m}{n}$和 0.5 的差均小于 1‰.

经验告诉我们，多次重复同一试验时，随机现象呈现一定的量的规律．具体地说，就是试验次数 n 很大时，事件 A 的频率具有一种稳定性，其数值徘徊在某确定的常数附近，而且一般来说，试验次数越多，事件 A 的频率就越接近那个确定的常数．这种在多次重复试验中事件频率稳定性的统计规律，便是概率这一概念的试验基础，而所谓某事件发生的可能性大小，就是这个“频率的稳定性”.

定义 1 在不变条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率$\frac{m}{n}$稳定地在某一常数 p 附近摆动，且一般来说，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

数值 p(即 $P(A)$)就是在一次试验中对事件 A 发生的可能性大小的数量描述．例如，用 0.5 来描述掷一枚匀称的硬币“正面”出现的可能性，用 0.1 来描述抽奖号码中末尾数中奖的可能性．

如上所述，频率的稳定性是概率的经验基础，但并不是说概率决定于试验．一个事件发生的概率完全决定于事件本身的结构，是先于试验而客观存在的．

概率的统计定义只是一种描述，它指出了事件的概率是客观存在的，但并不能用这个定义计算 $P(A)$. 实际上，我们只能用大量试验的频率或一系列频率的平均值作为 $P(A)$ 的近似值．

1.2.2 概率的古典定义

直接计算某一事件的概率有时是非常困难的，甚至是不可能的，但是，对于称为古典概型的随机试验，可以直接计算事件的概率．

如果随机试验具有如下两个特征：

(1)有限性：随机试验只有有限个基本事件，即样本空间可以写成如下形式：

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

(2)等可能性：每次试验中各个基本事件$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$发生的可能性相同．

则称该试验为**古典概型试验**，它的数学模型称为**古典概型**．

例如，掷硬币、掷骰子或抽取一副扑克牌中的一张牌，都符合古典概型的特征．

定义 2 若试验结果一共由 n 个基本事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 组成，这些事件的出现具有相等的可能性，而事件 A 由其中某 m 个基本事件所组成，则事件 A 的概率是：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

这里 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个等概完备事件组.

例 1　从 1～30 这 30 个自然数中任取一数，事件 A 为“任取一数是偶数”，事件 B 为“任取一数是 3 的倍数”，事件 C 为“任取一数是 5 的倍数”. 试求 $P(A),P(B),P(C)$.

解　30 个自然数是有限个，任取一数是某个数的可能性相同而且是一个基本事件. 偶数共有 15 个，故 $P(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$；3 的倍数共有 10 个，故 $P(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$；5 的倍数共有 6 个，故 $P(C)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

例 2　袋中装有大小一样、同质的 5 个白球、4 个黑球，从中任取 2 球.

(1)设事件 A 为“取到的都是黑球”，求 $P(A)$；

(2)设事件 B 为“取到至少 1 个是白球”，求 $P(B)$.

解　根据排列和组合的有关知识，可以知道，9 个球中取 2，共有 $C_9^2=\frac{9\times 8}{2\times 1}=36$ 种取法，也即共有 36 个基本事件.

(1)事件 A 发生，相当于取到 4 个黑球中的 2 个，5 个白球中的 0 个，即

$$P(A)=\frac{C_4^2C_5^0}{C_9^2}=\frac{\frac{4\times 3}{2\times 1}\times 1}{36}=\frac{1}{6}$$

(2)事件 B 发生，包含两种情况，一是 2 个全是白球，二是一白一黑，它们所包含的基本事件数共有 $C_5^2C_4^0+C_5^1C_4^1=10+20=30$，即 $P(B)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

我们发现，事件 A 和 B 正好是对立事件，$P(A)+P(B)=1$.

例 3　已知 10 件产品中有 3 件次品，每次随机地取出 1 件，共取 3 次.

(1)作放回的抽样；

(2)作不放回的抽样.

分别求取出的 3 件都是正品的概率.

解　有放回和不放回的抽样，是两种不同的随机抽样方式.

(1)有放回，每次 10 种取法，正品取到的次数为 7，连续取 3 次，共有 10^3 种取法，正品取到的次数为 7^3，所以，设事件 A 为“取到的 3 件都是正品”，

$$P(A)=\frac{7^3}{10^3}=0.343$$

(2)无放回，第一次有 10 种取法，正品取到的次数为 7，第二次有 9 种取法，正品取到的次数为 6，第三次有 8 种取法，正品取到的次数为 5，所以有

$$P(A)=\frac{7\times 6\times 5}{10\times 9\times 8}=\frac{7}{24}=0.291\,7$$

事实上，无放回抽样可以看做一次取 3 件，这样，$P(A)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$.

1.3 概率的基本性质

随机事件的概率具有如下三个基本性质：

(1)非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)有限可加性：若随机事件 A 和 B 互不相容，即 $AB=\Phi$，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-1}$$

这三个基本性质，规定为概率的公理系统．

根据上述性质，可以推断下列性质：

(1)不可能事件的概率为零，即 $P(\Phi)=0$.

(2)对任何事件 A，有 $P(\bar{A})=1-P(A)$，即对立事件概率的和为 1. (1—2)

(3)如果 $B\supset A$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$. (1—3)

(4)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-4}$$

更进一步，如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组，即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则 $\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$．

下面，给出概率的加法公式．

定理 对于任意两个随机事件 A,B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-5}$$

这个定理可以推广到两个以上随机事件，例如

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1-6}$$

我们举例说明．

例 1 某种产品的生产需经过甲、乙两道工序，若某道工序出故障，则产品停止生产．已知甲、乙工序的故障率分别为 0.25 和 0.20，两道工序同时发生故障的概率为 0.10，求产品停产的概率．

解 设事件 A 为“甲工序出故障”，事件 B 为“乙工序出故障”，则 $A+B$ 表示事件“产品停止生产”.

已知 $P(A)=0.25,P(B)=0.2,P(AB)=0.10$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=0.25+0.20-0.10=0.35$$

即产品停产的概率为 0.35.

例 2　某城市有 50%住户订日报，有 65%住户订晚报，有 85%住户至少订这两种报纸中的一种，求同时订这两种报纸的住户的百分比．

解　设事件 A 为“住户订有日报”，事件 B 为“住户订有晚报”，则 $A+B$ 表示事件“住户至少订有日报和晚报中的一种”，AB 表示事件“住户既订日报又订晚报”．

已知 $P(A)=0.50, P(B)=0.65, P(A+B)=0.85$

所以
$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)$$
$$=0.50+0.65-0.85=0.30$$

即同时订两种报纸的住户的百分比是 30%.

1.4　条件概率和乘法法则

1.4.1　条件概率

我们先来看这样一个例子．

某班有 30 名学生，其中 20 名男生，10 名女生．身高 1.70 米以上的有 15 名，其中 12 名男生，3 名女生．(1)任选 1 名学生，问该学生的身高在 1.70 米以上的概率是多少？(2)任选 1 名学生，选出来后发现是个男生，问该学生的身高在 1.70 米以上的概率是多少？

答案是很容易给出的：(1)的答案是$\frac{15}{30}=0.5$.

(2)的答案是$\frac{12}{20}=0.6$.

但是，这两个问题的提法是有区别的，第二个问题是一种新的提法．“是男生”是一个随机事件，记作 B；随机事件“身高 1.70 米以上”记为 A，于是第二个问题可叙述为：在事件 B 发生(即发现是男生)的条件下，事件 A(即身高为 1.70 米以上)发生的概率是多少？我们把这种概率称为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率，记为 $P(A|B)$，它不同于 $P(A)$，也不同于 $P(AB)$.

注意到 $P(B)=\frac{20}{30}, P(AB)=\frac{12}{30}$，从而有

$$P(A|B)=\frac{12}{20}=\frac{\frac{12}{30}}{\frac{20}{30}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

定义 3 设 A、B 是两个随机事件，$P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1-7}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

例 1 在市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂的合格率是 80%. 若用事件 A、$\overline{A}$ 表示甲、乙两厂的产品，B 表示产品为合格品，试写出题中有关事件的概率.

解 依题意

$$P(A)=70\% \quad P(\overline{A})=30\%$$
$$P(B|A)=95\% \quad P(B|\overline{A})=80\%$$

进一步可得：

$$P(\overline{B}|A)=5\% \quad P(\overline{B}|\overline{A})=20\%$$

例 2 全年级 100 名学生中，有男生(以事件 A 表示)80 人，女生 20 人. 来自北京的(以事件 B 表示)有 40 人，其中女生 8 人，男生 32 人，免修英语的(用事件 C 表示)20 人中有 8 名女生，12 名男生. 试写出 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，$P(A|B)$，$P(C|A)$，$P(AB)$，$P(AC)$，$P(\overline{A}|\overline{B})$.

解 依题意，有

$$P(A)=\frac{80}{100}=0.8 \quad P(B)=\frac{40}{100}=0.4 \quad P(C)=\frac{20}{100}=0.2$$

$$P(A|B)=\frac{32}{40}=0.8 \quad P(C|A)=\frac{12}{80}=0.15 \quad P(AB)=\frac{32}{100}=0.32$$

$$P(AC)=\frac{12}{100}=0.12 \quad P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{12}{60}=0.2$$

1.4.2 乘法法则

定理 对任意两个随机事件 A，B，若 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{1-8}$$

若 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1-9}$$

这两个公式都称为**乘法公式**，相应地可推广为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的乘法公式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1-10}$$

例 3 设 20 件产品中有 3 件次品，从中任意抽取 2 件，求在已抽取到的 2 件中至少有 1 件次品的条件下，2 件都是次品的概率.

解 设事件 A 为“取到 2 件都是次品”，事件 B 为“至少取到 1 件次品”，则 $A\subset B$

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_{20}^2}=\frac{3}{190}\quad P(A)=P(AB)$$

$$P(B)=\frac{C_3^2+C_3^1C_{17}^1}{C_{20}^2}=\frac{24}{190}=\frac{12}{95}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

例 4　市场上供应的同种产品中，甲厂产品占 80%，乙厂产品占 20%，甲、乙两厂产品的合格率分别是 90%和 80%. 求从市场上任购一件，是甲厂生产的合格品的概率．

解　用 A 和 B 表示甲厂生产和乙厂生产的产品，用 C 表示合格，则

$$P(A)=80\%\quad P(C|A)=90\%$$
$$P(B)=20\%\quad P(C|B)=80\%$$

本题所求是

$$P(AC)=P(A)P(C|A)=0.8\times0.9=0.72$$

例 5　一箱产品有 100 件，次品率为 10%，出厂时作不放回抽样，开箱连续地抽验 3 件．若 3 件产品都合格，则准予该箱产品出厂．求一箱产品准予出厂的概率．

解　设事件 A_i 为“抽到第 i 件为正品”$(i=1,2,3)$，则事件“一箱产品准予出厂”可表示为 $A_1A_2A_3$.

因为

$$P(A_1)=\frac{90}{100}=0.9\quad P(A_2|A_1)=\frac{89}{99}\approx0.898\ 99$$

$$P(A_3|A_1A_2)=\frac{88}{98}\approx0.897\ 96$$

由乘法公式得

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\approx0.726\ 5$$

1.5　全概率公式与贝叶斯公式

1.5.1　全概率公式

当计算比较复杂的事件的概率时，经常把一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件之和，然后利用概率的有限可加性得到最终结果．

如果 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成一个完备事件组，即 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互斥且 $B_1+B_2+\cdots+B_n=\Omega$，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意事件 A，可有：

$$P(A)=P(A\Omega)$$
$$=P[A(B_1+B_2+\cdots+B_n)]$$

$$=P(AB_1+AB_2+\cdots+AB_n)$$
$$=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$
$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i) \qquad (1-11)$$

这就是**全概率公式**.

例 1 以 1.4 节例 4 为题,求 $P(C)$.

解 显然 A 和 B 构成完备事件组.

$$P(C)=P(C\Omega)=P(CA+CB)$$
$$=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$
$$=0.8\times0.9+0.2\times0.8=0.88$$

例 2 6 张彩票,其中 3 张有奖,三人依次摸奖.试求各人得奖的概率.

解 设 A_1,A_2,A_3 分别为三人得奖,我们假设第二、第三人摸奖时,不知道前者是否中奖,则

$$P(A_1)=\frac{3}{6}=0.5$$
$$P(A_2)=P(A_2A_1+A_2\overline{A}_1)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$$
$$=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{15}{30}=0.5$$
$$P(A_3)=P(A_3A_1A_2+A_3\overline{A}_1A_2+A_3A_1\overline{A}_2+A_3\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)+P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1)P(A_3|A_1\overline{A}_2)$$
$$+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=0.5$$

显然,三人摸奖的先后与获奖概率无关,机会均等.

1.5.2 贝叶斯公式

如果事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成一个完备事件组,即 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互斥且 $B_1+B_2+\cdots+B_n=\Omega$, $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任意事件 A,如果 $P(A)>0$,可有:

$$P(AB_i)=P(B_i)P(A|B_i)=P(A)P(B_i|A)(i=1,2,\cdots,n)$$

得
$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}(i=1,2,\cdots,n)$$

再把全概率公式代入上式,即有