排　列　組　合

◉ 計數原理（題號 1～12）

1. 乘法原理

設有一事件E，可分爲 k 個可同時發生或先後發生之小事件$E_1, E_2, \cdots\cdots, E_k$，其完成方法數各爲 $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k$，則完成事件$E$之方法數共有 $n_1 \times n_2 \cdots\cdots \times n_k$。

2. 加法原理

設有一事件E，可分爲k個不能同時發生且不能先後發生之小事件E_1, E_2, $\cdots\cdots$, E_k，其完成方法數各爲 n_1, n_2, $\cdots\cdots$, n_k，則完成事件E之方法數共有$n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k$。

3. 集合的元素個數

設A, B, C均爲有限集合，亦即A, B, C的元素個數皆爲有限個，若集合A, B, C的元素個數分別以 $n(A), n(B), n(C)$ 表示之，則

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

◉ 排列（題號 13～117）

1. 直線排列

(1) 相異物的直線排列

① 從 n 件相異物中取出m件排成一列之方法數爲

$$P^n_m=\frac{n!}{(n-m)!}$$ 。

② 將 n 件相異物全取排成一列之方法數 $=n!$ 。

③ $P^n_m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

④ $C^n_m\cdot m!=P^n_m$

(2) 限制位置之直線排列

n 個人排成一列，其中

① A_1 不排首，排法有 $n!-(n-1)!$

② A_1 不排首，A_2 不排次，排法有

$C^2_0n!-C^2_1(n-1)!+C^2_2(n-2)!$

③ A_1 不排首，A_2 不排次，A_3 不排第三位，排法有

$C^3_0n!-C^3_1(n-1)!+C^3_2(n-2)!-C^3_3(n-3)!$

……………………………………………………

④ A_1 不排首，A_2 不排次，A_3 不排第三位，……A_n不排第 n 位，排法有

$C^n_0n!-C^n_1(n-1)!+C^n_2(n-2)!-\cdots\cdots+(-1)^n C^n_n(n-n)!$

(3) 不盡相異物之直線排列

① 設有 n 件物品，含有 k 種不同種類，其第一類有 m_1 件，第二類有 m_2 件，……，第 k 類有 m_k件等，則將此 n 件排成一列，共有 $\dfrac{n!}{m_1!m_2!\cdots\cdots m_k!}$ 種不同之排法，其中 $n=m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k$。

② 題型分類

(a) 數字問題。

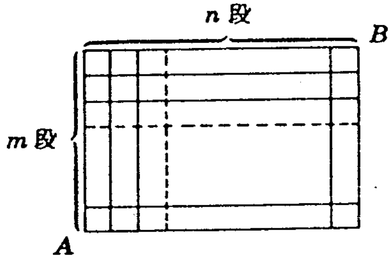
(b) 文字問題。

(c) 走路問題。

(d) 次序問題。

(4) 走捷徑問題

① 如右圖，南北街道有 $n+1$ 條（即有 n 段），東西街道有 $m+1$ 條(即有 m 段)，則從 A 到 B 取路徑最短之走法有 $\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$ 法。



② 棋盤形街道走法，也可利用圖加法來處理。(尤以有障礙物之街道走法，以此法處理比較快)

③ 設棋盤形街道上的斜線區域代表障礙物：

(a) 若此斜線區域只含直街、橫街之一交點，則其走法，可由全部之走法減去必經此一交點之走法，即爲不經此斜線區域之走法。

(b) 若斜線區域包含超過一點以上之直街、橫街之交點時，則先觀察斜線區域所占之最小矩形區域以外與 $\overline{AB}$ 斜交之對角線上之直、橫街之交點，經由此諸點之走法之總和即爲所求。

2. 重複排列

(1) 從 n 種不同物品中，每次選取 m 個而排列之，若各物可以重複使用，是爲重複排列，其排列總數爲 n^m, $n>m$, $n=m$ 或 $n<m$ 皆可。

(2) 設 $m\geq n$，將 m 件不同物品任意分給 n 人的方法中，若規定每人至少得一件，(或自 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_m\}$ 至 $B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$ 的映成函數個數)其方法爲：

$$n^m-C_1^n\cdot(n-1)^m+C_2^n\cdot(n-2)^m-\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^r C_r^n\cdot(n-r)^m+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n\cdot 1^m。$$

(3) 題型分類

①配給問題。

②渡河問題。

③數字問題。

3. 環狀排列

(1) 環狀排列

①由 n 個相異物中，取 r 個(或全部)圍成一圓周之排列稱爲環狀排列，其排列數爲 $\dfrac{P(n, r)}{r}$。

②由 n 個相異物中全取的環狀排列數爲 $(n-1)!$。

③ n 個相異物的環狀排列中：

(a) 正面與反面有區別時 $\Rightarrow$ $(n-1)!$種方法。

(b) 正面與反面無區別時 $\Rightarrow$ $\dfrac{(n-1)!}{2}$種方法。

(環狀排列或珠狀排列)

(2) 方桌排列

要點：方桌排列與拼圖問題

①正 k 邊形之桌形排列：正 k 邊形桌子，每邊坐相同人數，則 n 人之排列數爲 $\dfrac{1}{k}$(直線排列數) $=\dfrac{P_n^n}{k}$ $=\dfrac{n!}{k}$。

②長方形之桌形排列：長方形桌，兩個長邊所坐人數相同，另兩個短邊所坐人數亦相同，故其排列數爲 $\dfrac{1}{2}$(直線排列數) $=\dfrac{n!}{2}$(n 表人數)。

◉ 組合(題號 118～177)

1. 組合的定義

(1) 由n個不同的物件中每次取 m 個爲一組，而不論其先後次序，其組合數記爲C_m^n 或$C(n, m)$ 或 ${}_nC_m$。

(2) 就集合之觀點而論，$C(n,\ m)$ 乃是指一含n個元素的集合，其一切含m個元素之子集合的個數。

2. 組合數

$$C_m^n=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$(0\leq m\leq n)$

3. 適用題型

(1) 將$m\times n$個相異物，平分給n個人，每人m件之分法為

$$C_m^{m\times n}\cdot C_m^{m(n-1)}\cdot\cdots\cdots C_m^m=\frac{(m\cdot n)!}{(m!)^n}\ 。$$

(2) 將$m\times n$個相異物，平分成n組，每組m件的分法為

$$\frac{(m\cdot n)!}{(m!)^n\cdot n!}\ 。$$

(3) 設$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n\in N$，則$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=m$ 之解集合有C_{n-1}^{m-1}個元素。

(4) $S=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_m)\mid 1\leq x_1<x_2<\cdots\cdots<x_m\leq n\}$，則$n(S)=C_m^n$。

(5) $n(A)=m,\ n(B)=n$，則由A映至B之嚴格遞增(或遞減)函數有C_m^n個。

(6) 巴斯卡定理：$C_m^n=C_m^{n-1}+C_{m-1}^{n-1}$，其中$1\leq m\leq n-1$。

4. 重複組合

(1) 定義

設n類不同物品中，每類至少m件，若從其中每次取m個為一組，且每組之m件中可不盡相異，此種組合為重複組合，常以H_m^n表之(或以S_m^n表之)。

(2) 組合數：$H_m^n=C_m^{m+n-1}\left(H\begin{matrix}\text{類}\\\text{件}\end{matrix}\right)$。

(3) 重複組合之原則

① n個不同的類，每類皆多於或等於m個。

② 取m件可不盡相異，且此m件可全歸於其中之一類。

③ n類在前，m 件在後 $\Rightarrow$ 即 $H(n, m)$。

(4) 重複組合的類型：

① m件相同物，隨意分給n個人，每人可兼得，其法有 $H(n, m)$。

② m個相同球，投入n個相異箱子，每箱可容納m個以上之球，其法有 $H(n, m)$。

③ $x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = m$ $(m \in N)$ 之非負整數解為 $H(n, m)$。

④ $(x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n)^m$ 之展開式中不同類項數目為 $H(n, m)$。

(5) 重複排列與重複組合之區別

① m個相同水果分給 n 個兒童，每人可兼得之分法為 $H(n, m)$(不同$\leftrightarrow$相同為組合)。

② m個相異水果分給 n 個兒童，每人可兼得之分法為 n^m。

(6) 整數解：$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = m,\ m \in N$。

① 非負數解有H^n_m組。

② 正整數解有H^n_{m-n}組。

③ 非負之偶數解：(*a*) $H^n_{\frac{m}{2}}$ 組$(2 \mid m)$ (*b*) 0組$(2 \nmid m)$

④ 正奇數解：(*a*) $H^n_{\frac{m-n}{2}}$ 組$(2 \mid m-n)$ (*b*) 0組$(2 \nmid m-n)$

⑤ 正偶數解：(*a*) $H^n_{\frac{m-2n}{2}}$ 組$(2 \mid m-2n)$

(*b*) 0組$(2 \nmid m-2n)$

(7) 有大小關係之整數解：

① $1 \le x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n \le m,\ x_i \in N$之整數解有$C^m_n$組。

② $1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots\cdots \le x_n \le m,\ \ x_i \in N$之整數解有 H^m_n 組。

③ $1 \le x_1 < x_2 \le x_3 < x_4 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n \le m$之整數解有 $C^m_n + C^m_{n-1}$ 組。

④ $1 \le x_1 < x_2 \le x_3 \le x_4 < x_5 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n \le m$之整數解有 $C^m_n + 2C^m_{n-1} + C^m_{n-2}$ 組。

5. 組合總數

(1) 由n個相異物中，每次取1個，2個，……n個之組合總數爲$C^n_1 + C^n_2 + \cdots\cdots + C^n_m = 2^n - 1$。

※ 集合A有n個元素，則A之冪集合有2^n個元素。

(2) 設n個事物分成k類，第i類有m_i個 $(i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$, $m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_k = n$，則由此$n$個事物，每次取1個，2個，……，$n$個之組合總數爲$(m_1 + 1)(m_2 + 1)\cdots\cdots\cdots(m_k + 1) - 1$。

※ 自然數$a = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots\cdots P_m^{\alpha_m}$, P_1, P_2, ……P_m爲相異質數，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m \in N$，則$a$之正因數個數有$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots\cdots(\alpha_m + 1)$個。

(3) 分組、分堆問題

將n物(相同或相異)任意放入m個箱子(相同或相異)，每箱均可放入n個物。

① 物同箱同。

② 物同箱異：重複組合 $\Rightarrow$ H^m_n。

③ 物異箱同：將件數相同的箱子視爲相異，再除以箱數的階乘。

④ 物異箱異：重複排列 $\Rightarrow$ m^n。

◉ 二項式定理及多項式定理(題號 178～209)

1. $(x+y)^n = C^n_0 x^n + C^n_1 x^{n-1} y + C^n_2 x^{n-2} y^2 + \cdots\cdots + C^n_n y^n$

$$= \sum_{i=0}^{n} C^n_i x^{n-i} y^i$$

2. $(x+y)^n$ 展開式中第$r+1$項爲$C^n_r x^{n-r} y^r$。

3. $(x+y)^n$ 展開式中共有$(n+1)$項。

4. $(x+y)^n$ 展開式中

(1) n是偶數，則是以第$\frac{n}{2}+1$項係數最大，其值為$C^n_{\frac{n}{2}}$ 。

(2) n是奇數，則是以第$\frac{n-1}{2}+1$, $\frac{n+1}{2}+1$項係數最大，其值為$C^n_{\frac{n-1}{2}}$，$C^n_{\frac{n+1}{2}}$ 。

5. $(1+x)^n=C^n_0+C^n_1x+C^n_2x^2+\cdots\cdots+C^n_{n-1}x^{n-1}+C^n_nx^n$

6. 公式整理

(1) $C^n_0+C^n_1+C^n_2+\cdots\cdots+C^n_n=2^n$ (即組合總數公式)

(2) $C^n_0+C^n_2+C^n_4+\cdots\cdots=C^n_1+C^n_3+C^n_5+\cdots\cdots=2^{n-1}$

(3) $(C^n_0)^2+(C^n_1)^2+\cdots\cdots+(C^n_n)^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(4) $C^n_1+2C^n_2+3C^n_3+\cdots\cdots+nC^n_n=n\cdot2^{n-1}\ (n\geq1)$

7. 多項式定理

$(x+y+z+\cdots\cdots)^n=\Sigma\ \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots\cdots}x^\alpha y^\beta z^\gamma\cdots\cdots$，其中

$\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots\in N\cup\{0\}$，且$\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=n$。

1 Ⅳ 一 ★

設A, B, C分別為下列整數的集合：

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B=\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$

$C=\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16\}$

請列舉下列集合的元素。

(1) $(A\cup B)\cap C$

(2) $A\cap B'$

【詳解】 (1) $\because\ A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 19\}$

$\therefore\ (A\cup B)\cap C=\{5, 6, 7, 8, 13, 16\}$

(2) $\because\ B'=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, \cdots\}$

$\therefore\ A\cap B'=\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

2 Ⅳ 一 ★

以並列的方式寫出以下各集合的元素：

(1) 24的正因數且非偶數的集合。

(2) 整數全體的集合。

(3) 集合$=\{x\mid x^2-2x<8, x$為整數$\}$。

(4) 集合$=\{x\mid (x-1)(x-2)(x-3)=0\}$。

【詳解】 (1) 24的正因數為 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24，其中非偶數的數僅有1 及 3，因此所求的集合為 $\{1, 3\}$

(2) 整數為……, $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$ ……因此所求集合為 $\{\cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

(3) 因$x^2-2x<8$，則$x^2-2x-8<0$

$\therefore\quad (x-4)(x+2)<0$

$\therefore\quad -2<x<4$

$\because\quad x$為整數

$\therefore\quad x=-1, 0, 1, 2, 3$

故所求集合為$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

(4) $\because\quad (x-1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore\quad x=1, 2, 3$

故所求集合為$\{1, 2, 3\}$

3 Ⅳ 一 ★

從1到15的自然數中，若質數的集合為A, 2的倍數的集合為B, 3的倍數的集合為C。

(1) 設上述情形的全體集合為U時，U為何？

(2) 將U, A, B, C以圖表示之。

(3) 求A', B', C'及U'

(4) 求$A'\cap B'\cap C'$

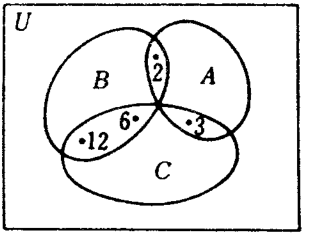
【詳解】 (1) $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

(2) $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$C=\{3, 6, 9, 12, 15\}$

A, B, C, U四集合之圖形如右。



(3) $A'=\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$

$B'=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

$C'=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

$U'=\phi$

(4) $A'\cap B'\cap C'=\{1\}$

4 $\boxed{\text{IV}}$ $\boxed{一}$ $\boxed{\quad\bigstar\quad}$

有以下六個集合：

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 4\}$

$C=\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $D=\{4, 5, 6\}$

$E=\{1, 2\}$, $F=\{3, 4\}$

(1) 上述六個集合中，那些爲A的部分集合？那些爲B的部分集合？

(2) $A\cap B$, $C\cap D$, $B\cup D$, $D\cup F$。

(3) $D\cup E\cup F$, $B\cap D\cap E$。

(4) $(A\cap D)\cup F$, $E\cap(D\cup F)$。

【詳解】 (1) A的部分集合爲B, E, F

B的部分集合爲F

(2) $A\cap B=\{2, 3, 4\}(=B)$

$C\cap D=\{4, 5, 6\}(=D)$

$B\cup D=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$D\cup F=\{3, 4, 5, 6\}$

(3) $D\cup E\cup F=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B\cap D\cap E=\{\quad\}=\phi$

(4) $(A\cap D)\cup F=\{4, 5\}\cup\{3, 4\}=\{3, 4, 5\}$

$E\cap(D\cup F)=\{1, 2\}\cap\{3, 4, 5, 6\}=\phi$

5 Ⅳ 一 ★

設自25以下自然數的全體集合元素中，

2的倍數的集合爲 A

3的倍數的集合爲 B

5的倍數的集合爲 C

求以下各集合：

(1) A, B, C

(2) $A\cap B,\ A\cap C,\ B\cap C$

(3) $(A\cup B)',\ \left[(A\cup B)\cup C\right]',\ (A\cap B)\cap C$

(4) $(A\cap B)\cup C,\ \left[A\cup(B\cap C)\right]'$

【詳解】 $\because\ U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$

(1) $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$

$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$

$C=\{5, 10, 15, 20, 25\}$

(2) $A\cap B=\{6, 12, 18, 24\}$

$A\cap C=\{10, 20\}$

$B\cap C=\{15\}$

(3) $\because\ A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24\}$

$\therefore\ (A\cup B)'=\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25\}$

$\because\ (A\cup B)\cup C=\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25\}$

$\therefore\ \left[(A\cup B)\cup C\right]'=\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

$\therefore\ (A\cap B)\cap C=\{\quad\}=\phi$

(4) 由(1), (2)得

$(A\cap B)\cup C=\{5, 6, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25\}$

$A\cup(B\cap C)=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24\}$

$\therefore\ \left[A\cup(B\cap C)\right]'=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25\}$

參考 $(A\cup B)'=A'\cap B',\ (A\cap B)'=A'\cup B'$

$\left[(A\cup B)\cup C\right]'=(A\cup B)'\cap C'=(A'\cap B')\cap C'$

$\left[A\cup(B\cap C)\right]'=A'\cap(B\cap C)'=A'\cap(B'\cup C')$

6 Ⅳ 一 ★

由1, 2, 3三個數所組成的集合$\{1, 2, 3\}$的部分集合有ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$等8個

(1) 請將$\{1, 2, 3, 4\}$所有之部分集合，按照上述的方法全部列舉出來。

(2) 由1開始到n爲止，由n個數所組成的集合$\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$，其部分集合共有多少個，並請說明理由。

【詳解】 (1) $\{1, 2, 3, 4\}$的部分集合有

ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$等共16個

(2) $\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$的部分集合，若不含空集合時，可分爲不含元素1及包含元素1的兩大類。接下來可分爲包含元素2及不包含元素2的兩大類，依此類推至n爲止，亦可分爲包含n及不包含n的兩種，因此部分集合的總個數爲 $2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2=2^n$ 個

參考 (2) 之2^n個部分集合爲 ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots\cdots$, $\{n\}$, $\{1, 2\}$, $\cdots\cdots$, $\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$。

7 Ⅳ 一 ★

設集合A, B, C均爲有限集合(元素之個數爲有限個的集合)，各集合的元素個數分別以$n(A)$, $n(B)$, $n(C)$來表示，請證明下列各等式成立。

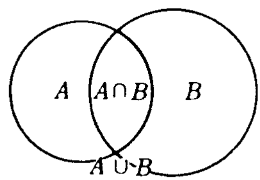
(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

【證明】 (1) 因$A\cup B$是由A集合的元素但非$A\cap B$的元素(其個數爲$n(A)-n(A\cap B)$)，以及B集合的元素但非$A\cap B$的元素(其個數爲$n(B)-n(A\cap B)$)，與$A\cap B$的元素(其個數爲$n(A\cap B)$)共同組合而成。因此

$$n(A\cup B)=\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}+n(A\cap B)$$

$$\therefore\quad n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$



(2) 由(1)得

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n((A\cup B)\cup C)\\&=n(A\cup B)+n(C)-n((A\cup B)\cap C)\\&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n((A\cap C)\cup(B\cap C))\\&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-\{n(A\cap C)\\&\quad+n(B\cap C)-n((A\cap C)\cap(B\cap C))\}\\&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)\\&\quad-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

研 究　若$A\cap B=\phi$，則

$n(A\cap B)=n(\phi)=0$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

8 Ⅳ 一 ★

某一班級就A, B兩本書進行閱讀調查。讀過A書的人占全班總人數的$\frac{1}{2}$，讀過B書的人爲$\frac{3}{5}$，兩書都讀過的人爲$\frac{3}{10}$，兩書都沒讀過的共有8人。求：

(1) 只讀過A書的人所占的比率。

(2) 這個班級共有多少人？

【詳解】 設讀過A, B兩種書的人分別爲A集合與B集合，各集合的人數分別爲$n(A)$及$n(B)$，全班總人數爲N

由題意得知

$$n(A)=\frac{1}{2}N,\ n(B)=\frac{3}{5}N,\ n(A\cap B)=\frac{3}{10}N$$

$$\because\quad n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\therefore\quad n(A\cup B)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}\right)N=\frac{4}{5}N$$

$$\therefore\quad n(A'\cap B')=n\left((A\cup B)'\right)=N-n(A\cup B)=\frac{1}{5}N$$

(1) 只讀過A書的人爲

$$n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)N=\frac{1}{5}N$$

占全班的$\frac{1}{5}$

(2) 由於$n\ (A'\cap B')=\frac{1}{5}N$

而人數爲8個人，亦即$\frac{1}{5}N=8$

$\therefore\quad N=40$

故全班共有40人

9 Ⅳ 一 ★

有a, b兩個整數，當a, b兩者的最大公因數爲1時，則稱a與b互質。求100以下的正整數中與30互質的個數。

【詳解】 因$30 = 2 \times 3 \times 5$，故與30互質的數，其因數中必不包含2, 3, 5

設從1到100的正整數中，2的倍數的集合爲A, 3的倍數的集合爲B, 5的倍數的集合爲C。若A集合的個數以$n(A)$來表示時，則

$n(A) = 50, n(B) = 33, n(C) = 20$

$A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$, $A \cap B \cap C$分別爲6, 15, 10, 30的倍數之集合

$$\therefore \quad n(A \cap B) = 16, n(B \cap C) = 6, n(C \cap A) = 10, n(A \cap B \cap C) = 3$$

所有包含2, 3, 5之因數的個數爲

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 50 + 33 + 20 - 16 - 6 - 10 + 3 = 74 \end{aligned}$$

因此所求的個數爲$100 - 74 = 26$個