21世纪高等医药院校教材

周永治
周　喆　主编

医药高等数学

科学出版社

21世纪高等医药院校教材

医药高等数学

周永治　周　喆　主编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本教材是根据卫生部1982年以来颁布的有关数学教学计划的要求、1998年10月教育部高等教育司举办的“数学教育在大学教育中作用研讨会”的会议精神、以及目前教学改革的新情况，由全国18所中医药院校长期从事数学教学工作的教师编写的数学系列教材（医药高等数学、医药数理统计、医药数学实验和线性代数）之一。全书分9章，包括一元函数微积分、多元函数微积分、微分方程与矩阵的基本知识。编写中既注意了数学学科本身的科学性与系统性，同时又注意了它在中医药学科里的应用。全书文字简洁、内容精炼、由浅入深，章后有小结和习题，书后附有答案。

本书可供医药院校各专业各层次的学生使用，也可作为医药工作者学习高等数学的参考书籍。

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学/周永治等主编 .-北京:科学出版社,2001.6

21世纪高等医药院校教材

ISBN 7-03-009228-7

Ⅰ.医… Ⅱ.周… Ⅲ.医用数学:高等数学-医药院校-教材

Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第07043号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年6月第 一 版 开本:850×1168 1/16

2001年6月第一次印刷 印张:18

印数:1—14 000 字数:368 000

定 价:22.50元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《医药高等数学》编写人员

主　编　周永治　周　喆

副主编　于鹤丹　别雪君　汪旭升　赵文峰　王建生
周介南　王淑媛　曹　慧

主　审　张春华

编　委　(按姓氏笔画为序)
马光菊　马志庆　王世钦　邓　超　刘明芝
闫雪隐　李秀昌　李和伟　严云良　苏　越
陈　勇　何　雁　范　颖　金善玉　封　峰
高敏艳　钱微微　崔红新　崔相学　黄　浩

编写说明

数学是以客观世界中数与形为研究对象的、具有高度抽象性与广泛应用性的学科。它是学生掌握数学工具的主要课程，它的开设能使学生掌握必要的数学知识和计算方法，为相关课程的学习打下必要的基础；它是学生培养理性思维的重要载体，它的开设使学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力得以加强，有益于学生全面素质的提高、分析能力的强化、创新意识的激发；它是学生接受美感熏陶的一种途径(数学是美学四大中心建构——史诗、音乐、造型和数学——之一)，它的开设可训练学生将杂乱整理为有序，使经验升华为规律，变复杂现象为简洁数学形式的能力。数学是一切学科(含人体生命学科)之基础，是培养新世纪高精尖人才(含高级中医药师)的重要的基础理论课程。

本教材是根据卫生部1982年以来颁布的有关数学教学计划的要求、根据1998年10月教育部高等教育司举办的“数学教育在大学教育中作用研讨会”的会议精神以及目前教学改革的新情况，由全国18所中医药院校长期从事数学教学工作的教师编写的数学系列教材(医药高等数学、医药数理统计、医药数学实验和线性代数)之一。编写中我们既注意了数学学科本身的科学性与系统性，同时又注意了它在中医药学科里的应用，使二者较好地结合起来。我们还力求文字简洁，内容精炼，阐述问题尽量以实例开始，由浅入深、逐步深化，每章后有简要的“本章小结”与深广度适宜的习题，书后附有答案，供师生参考之用，以期成为具有中医院校特色的数学系列教材。

全书共9章，包括一元函数微积分、多元函数微积分、微分方程与矩阵的基本知识(空间解析几何的有关部分以预备知识的形式编入相应的章节中)，本书可供医药院校各专业、各层次的学生使用，也可作为医药工作者学习高等数学的参考书籍。

参加本教材编写的有：黑龙江中医药大学、长春中医学院、辽宁中医学院、甘肃中医学院、天津中医学院、北京中医药大学、河南中医学院、山东中医药大学、上海中医药大学、南京中医药大学、浙江中医学院、江西中医学院、福建中医学院、湖北中医学院、湖南中医学院、成都中医药大学、广西中医学院、贵阳中医学院。

由于我们水平有限，编写时间仓促，不当与错误之处肯定不少，恳请读者与同行批评指正，以便我们改正。

编　者

2001年

目 录

第四章 不定积分

第五章 定积分及其应用

第六章 多元函数微分学

第七章 多元函数积分学

第八章 微分方程

第九章 矩 阵

习题答案 …………………………………………………… (264)

第一章

函数与极限

高等数学是研究变量的一门科学，它的主要研究对象是函数．极限方法是高等数学的基础，它从方法论上突出地表现了高等数学不同于初等数学的特点，本章将介绍函数和极限的基本概念，建立极限的运算法则，给出函数连续性的定义及性质．

§1－1　函　数

1－1.1　函数的概念

一、常量与变量

在观察和研究某一变化过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做**常量**；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做**变量**．

例如，生物学中，在一定容积的培养基中成批培养细胞，在培养细胞的过程中，固定的容积是常量，细胞的数量及培养基中的营养物质是变量．

常量与变量的划分是相对的，它依赖于研究问题的场合，同一个量在某种场合下是常量，在另一种场合下则可能为变量，例如重力加速度，在地球表面一个不大的范围内是常量，在一个广大的范围内就是变量．

也有这种情况，某些量在整个过程中是变化的，但在过程的某一阶段变化很小，可以忽略不计把它看做常量，例如，一个人从小孩长到成人的整个过程中，身高是变量，但在某一天身高的变化很微小，这一天中身高就可以看做常量．

二、函数的概念

在自然现象和现实生活中，往往在某一变化过程中同时牵涉到几个变量，它

们通常不是孤立的，而是遵循一定的规律相互依赖又相互制约地变化的，为了叙述简明，我们先就两个变量的情况加以探讨.

例 1 温度一定时，一定质量的气体的容积 V 与压强 P 成反比(玻意耳定律)：

$$V=\frac{C}{P}\quad (\text{其中 } C \text{ 是比例常数})$$

例 2 在板蓝根注射液含量稳定性的研究中测得 pH = 6.28，温度 78℃ 下，保温时间与含量被破坏的百分比的数据见表 1 - 1.

表 1 - 1 板蓝根注射液含量被破坏百分比与保温时间的关系

保温时间 x(h)	32	64	96	128
含量被破坏百分比 y	4.55	12.27	15.45	18.18

例 3 静脉注射与肌肉注射青霉素钠盐 10 万 U 后，血清中药浓度与时间的关系如图 1 - 1 中的两条曲线，其中横坐标是注射后的时间 t(小时)，纵坐标是血清药平均浓度(U/ml)，分析图 1 - 1 可得出如下结论：

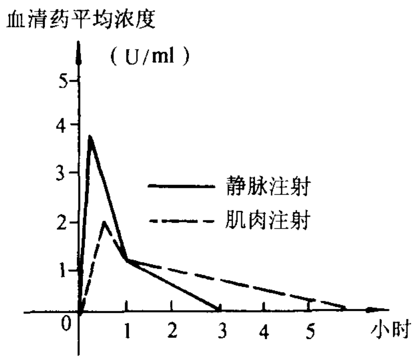


图 1 - 1

(1) 静脉注射后，血液中青霉素钠盐含量迅速提高，在 1/4 小时血清中的药浓度可达到高峰，但很快下降，3 小时后就很难测到.

(2) 肌肉注射后，血清中的药浓度半小时左右可达到高峰(比静脉注射慢，且高峰低)，存留时间比静脉注射长，但数小时后也测不到了.

上面的几个例子，虽然实际意义各有不同，变量间的对应关系也用不同方式表达的，但它们都表达了两个变量之间的相依关系.当其中一个变量在某范围内每取一个数值时，按照一定的规律(对应的法则)，另一变量就有确定的值与之对应，两个变量之间的这种对应关系，我们称它为函数关系，它也是函数概念的实质.为了对函数作一般的讨论，我们抛开不同例题的具体内容，抽象出函数概念的数学定义.

定义 1 设在某一过程中有两个变量 x 和 y，变量 x 的取值范围是数集 D，如果对于 D 中 x 的每一个值，按照一定的对应法则 f，变量 $y \in M$ 都有一个确定的值与之对应，则称 f 是确定在数集 D 上的**函数**.记作

$$f: D \to M \quad x \to y \tag{1-1}$$

数集 D 称为函数 f 的**定义域**，D 中每一个 x 根据法则所对应的数 y，称为 f 在 x 的**函数值**，记作 $f(x)$，全体函数值的集合

$$f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}\subset M$$

称为函数 f 的**值域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

如例 1 中，函数 $V=\frac{C}{P}$ 的定义域是 $P>0$，对应关系是 $\frac{C}{(\ )}$. 例 2 中的定义域是 $\{32,64,96,128\}$，对应规则为列出的表格. 例 3 实际上含有两个函数，读者自己讨论它们的定义域及对应规则.

关于函数概念提请注意：

(1) 由函数定义知，定义域与对应关系确定了函数也就完全确定了. 因此，把定义域、对应法则 f 称为函数的两个要素. 例如 $y=f(x)=\sin^2x+\cos^2x+x^2$ 与 $y=g(x)=1+x^2$，两要素都相同，所以是同一函数，而 $y=f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=g(x)=x+1$ 不是同一函数.

(2) 定义 1 中，对应法则 f 称为函数，$f(x)$ 称为函数值，严格说来，对应法则不是数而是某种规则，而函数值是数，二者是不同的. 例如，$y=\sin x$，无论 y 或 $\sin x$ 都不能说是 x 的函数而是函数值，sin 或 sin(　)才是函数. 但为了叙述方便，习惯上把函数与函数值不加区别，函数可以用 f，也可用 $f(x)$ 或 $y=f(x)$ 来表示，函数值用 $f(x)$ 表示.

例 4　有人根据在一项生理学研究中测得的血液中胰岛素浓度 $C(t)$（单位/毫升）随时间 t（分钟）变化的数据，建立了如下经验公式：

$$C(t)=\begin{cases} t(10-t) & 0\leqslant t\leqslant 5 \\ 25e^{-k(t-5)} & t>5 \end{cases}$$

其中 k 为常数.

这里浓度 $C(t)$ 是时间 t 的函数，但其函数关系是用两个解析式表示的. 像这种在定义域的不同部分内用不同的解析式表示的函数，称为分段函数. 计算分段函数的函数值时，特别要注意自变量所取的值在哪个范围？如例 4 中，当 $t=2$ 时对应的浓度 $C(2)=2(10-2)=16$，当 $t=10$ 时对应的浓度 $C(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$.

三、函数的表示法

由前面的几个例子可以看到，变量间的函数关系——从已给自变量值求出其对应函数值的对应法则，可以用各种方式表达出来，最常用的表示法有下列三种：

1. 解析法

用包含着变量的方程，也就是用数学公式表示变量间的函数关系. 如例 1、例 4 都是用解析法表示的函数. 用解析法表示函数便于计算和理论分析，在高等数学中讨论的函数，大都用这种方法表示.

2. 列表法

列表法即把一系列自变量的值及其对应的函数值列成一个表格来表示函数关系. 如例 2，用实验得到的观察数据表 1-1 来表示函数；又如对数表、三角函数表、平方表、立方根表等等，也都是用列表法表示的函数. 列表法应用方便——可以不

用计算直接从表上读出函数值，而且可以表示解析表达式未知的函数，这在工程技术上是常用的.

3. 图象法

图象法即借助坐标系用图形(一般是曲线)表示变量间的函数关系. 如例 3 中的函数关系，又如心电图、自动记录的气温曲线. 图象法的优点是直观、形象，函数特征一目了然，对研究有一定的启发性.

在实际问题中，上述三种方法常结合应用.

四、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，若存在某一常数 k，对一切 $x\in I$，恒有

$$f(x)\leqslant k \qquad (f(x)\geqslant k)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上有**上(下)界**，数 k 为它的一个上(下)界.

若函数 $f(x)$ 在 I 上既有上界，又有下界，则称 $f(x)$ 为 I 上的**有界函数**.

例如，对任意 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的. $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界，$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有下界而无上界.

2. 函数的奇偶性

设 x 和 $-x$ 是函数 $y=f(x)$ 的定义域内的任意两点，若总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点. 例如，函数 $y=x^2$ 及 $y=\cos x$ 都是偶函数；$y=x^3$ 及 $y=\sin x$ 都是奇函数；$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

3. 函数的单调增减性

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上随着 x 的增加而增加，即对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递增(单调递减)**. 单调递增或单调递减函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是递增的；$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是递减的，在 $(0,+\infty)$ 上是递增的，但在整个定义域上不是单调的.

4. 函数的周期性

设 x 是函数 $y=f(x)$ 定义域内任一点，若存在一个不等于零的数 k，使得当 $x+k$ 也属于定义域时，有 $f(x+k)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是以 k 为周期的**周期函数**，k 为它的一个**周期**. 显然，若 k 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $-k$，$\pm 2k$，$\pm 3k\cdots$ 也都是它的周期，故周期函数一定有无限多个周期. 如果周期函数 $f(x)$ 的所有周期中有一个正的最小周期，如 k，则称 k 为 $f(x)$ 的基本周期，简称周期. 例如，函数 $y=\sin\omega x\ (\omega\neq 0)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是以 $k=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的函数.

五、反函数

在研究两个变量的函数关系时，可以根据问题的需要选定其中一个为自变量，

则另一个就是因变量. 例如, 函数 $y=ax+b$ 中, x 是自变量, y 是因变量. 如果从这个函数中把 x 解出, 得 $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$, 则称 $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$ 是 $y=ax+b$ 的反函数. 一般地说, 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 X, 值域是 Y, 如果对于 y 在 Y 中的每一个值, 都可通过关系式 $y=f(x)$ 确定 x 在 X 中的一个值, 就得到了定义在 Y 上以 y 为自变量, x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$, 称它是函数 $y=f(x)$ 的**反函数**, 也可记作 $x=f^{-1}(y)$, $y=f(x)$ 叫做**原函数**. 事实上 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 互为反函数.

习惯上, 用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 所以, 函数 $y=f(x)$ 的反函数可改写为 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$.

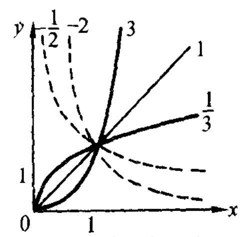
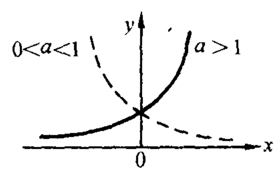
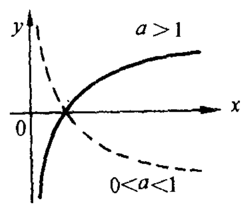
例如, $y=\sin x$, $y=a^x$ 的反函数分别为 $y=\arcsin x$, $y=\log_a x$. 当函数与其反函数均以 x 为自变量时, 反函数的图象与原函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

1-1.2　初等函数

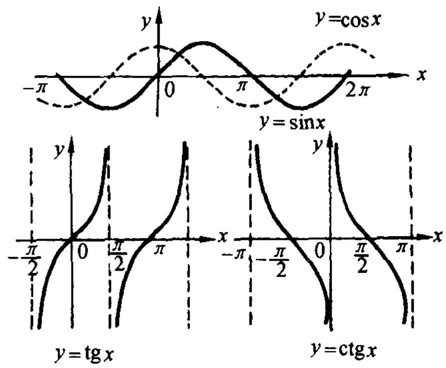
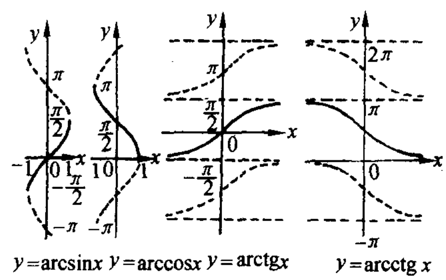
一、基本初等函数

在中学已学过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数, 这些函数统称为初等函数. 为复习和应用的方便, 将其归纳成表 1-2.

表 1-2

类别及解析式		定义域	值　域	图　形
幂函数 $y=x^{\mu}$	$\mu>0$ μ 次抛物线	因 μ 而异, 但 $[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 μ 而异, 但 $[0,+\infty)$ 是公共值域	 (在第一象限内)
	$\mu<0$ 令 $\mu=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$, m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	

续表

类别及解析式	定义域	值域	图形
三角函数			
正弦函数 $y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
余弦函数 $y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
正切函数 $y=\mathrm{tg}x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	
余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$	$x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$	
反三角函数			
反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	
反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	
反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	

二、复合函数

在实际问题中,经常遇到两个变量之间的联系不是直接的,即因变量不直接依赖于自变量,而是通过另一个变量联系起来.

例如,有质量为 m 的物体,以初速度 v_0 竖直上抛,由物理学知其动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

而速度 v 在不计空气阻力时又为 $v=v_0-gt$, g 是重力加速度,因此 E 通过 v 成为 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$$

它是由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的复合函数,一般地我们有

定义 2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,如果 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分上取值时,对应的 u 值使 $y=f(u)$ 有定义,则 y 通过 u 和 x 建立了函数关系

$$y=f(u)=f[\varphi(x)]$$

称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,并把 u 叫做**中间变量**,$f(u)$ 叫**外层函数**,$\varphi(x)$ 叫**内层函数**.

例如,$y=\lg u$,$u=x^3$,则 $y=\lg x^3$ 就是复合函数,$\lg u$ 是外层函数,x^3 是内层函数.

形成复合函数的中间变量可以是两个或更多个.例如,由 $y=\lg u$,$u=\mathrm{tg}v$,$v=x^2+5$,经二次复合构成 x 的复合函数 $y=\lg\mathrm{tg}(x^2+5)$.

但需注意,并不是任何两个函数都可复合成一个复合函数.例如 $y=\arccos u$,$u=2+x^2$ 就不能复合成 $y=\arccos(2+x^2)$,因为 u 总是大于 1,使 $y=\arccos u$ 没有意义.

我们不仅要学会把若干简单的函数"复合"成一个复合函数,而且要善于把一个复合函数"分解"为若干个简单的函数.这种分解技术在后面的微积分运算中经常要用到,应该重视.

例如 $y=e^{\sqrt{1+x^2}}$ 可以看成是由 $y=e^u$,$u=v^{\frac{1}{2}}$,$v=1+x^2$ 复合而成的.

复合函数的复合过程是由里到外,而"分解"复合层次的过程是由外到里,如

$$\xrightarrow{\quad y=e^{\sqrt{1+x^2}}\ \text{的复合过程}\quad}$$

$$\xleftarrow[\text{分　解　过　程}]{\quad v=1+x^2\quad u=v^{\frac{1}{2}}\quad y=e^u\quad}$$

三、初等函数

定义 3　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算所构成的能用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

例如,$y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}+5$, $y=\mathrm{tg}t-\sqrt{t}\,\sin t^2$ 都是初等函数.

今后讨论的函数绝大多数是初等函数,但须注意,分段函数一般不是初等函数.

§1-2　函数的极限

高等数学研究的对象是函数,研究的方法之一是求极限,在高等数学中几乎所有的概念都离不开极限,因此极限概念是高等数学中最基本的一个概念,极限方法是研究函数和解决许多问题的基本思想方法和主要工具.

1-2.1　函数的极限

一、数列的极限

数列就是按一定顺序排列起来的一列数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

第 n 项 x_n 称为数列的通项.这个数列可简记为 $\{x_n\}$.例如

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots \tag{1-2}$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n} \cdots \tag{1-3}$$

$$0.3, 0.33, 0.333, \cdots, 0.\overbrace{33\cdots3}^{n个}, \cdots \tag{1-4}$$

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots \tag{1-5}$$

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots \tag{1-6}$$

都是数列的例子,它们的通项分别为

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \frac{n+(-1)^n}{n},\ 0.\overbrace{33\cdots3}^{n个},\ (-1)^{n+1},\ 2^n$$

考察数列当 n 变化时,x_n 的变化情况,容易看出,当 n 无限增大(记作 $n\to\infty$)时,不同数列的变化情况是有所不同的,其中有的数列当 $n\to\infty$ 时,x_n 能与某一个常数 a 无限接近,如(1-2),当 $n\to\infty$ 时,x_n 和 0 无限接近;同样,对于数列(1-3),当 $n\to\infty$ 时,$\frac{n+(-1)^n}{n}$ 无限接近于 1;还有数列(1-4),当 $n\to\infty$ 时,$0.\overbrace{33\cdots3}^{n个}$ 无限接近于 $\frac{1}{3}$.而数列(1-5)当 n 增大时,x_n 在 1 和 -1 间无限次跳动,既不趋向于 1,也不趋向于 -1.数列(1-6),随 n 增大,x_n 也不断增大,但不和任何一个常数接近.(1-2)、(1-3)、(1-4)反映了一类数列的某种公共特性,即对于数列 $\{x_n\}$,存在一个常数 a,随着 n 的无限增大,x_n 无限地接近 a.这也就是说要使得 x_n 与 a 的差的绝对值任意地小,只要 n 充分地大便可.因此,给出数列极限的定义如下:

定义 1 若对于预先给定的任意小的正数 ε,总存在一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (a 是一个确定常数)$$

成立.则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ 或 } x_n \to a, (n\to\infty)$$

这时我们说数列是**收敛**的.否则数列是**发散**的.也就是说没有有限极限的数列是发散的.

定义中的正整数 N 是与预先给定的正数 ε 有关的.当 ε 减小时,一般地说,N 将会相应地增大.

例 1 证明数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的极限是 1.

证 $|x_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$