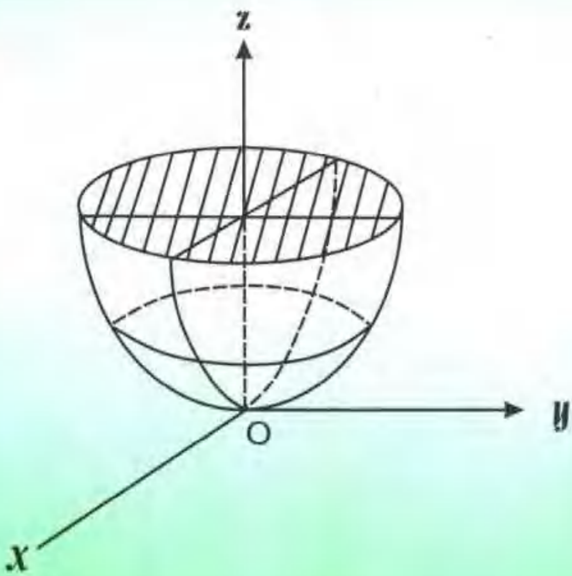
高等学校教材

经济数学



陕西人民出版社

高等学校教材

经 济 数 学

蔺小林　马菊侠　编

陕西人民出版社

(陕)新登字 001 号

书　　名：经 济 数 学
作　　者：蔺小林　马菊侠　编
出版发行：陕西人民出版社(西安北大街 131 号 邮编：710003)
印　　刷：陕西科技大学印刷厂
开　　本：850×1168 毫米　32 开　13.125 印张
字　　数：329 千字
版　　次：1994 年 8 月第 1 版　2002 年 5 月第 2 次印刷
印　　数：3000—4000
书　　号：ISBN 7-224-00735-8/F・442
定　　价：20.00 元

前　言

本书是为高等学校财经类专业《经济数学》课程而编写的教材。全书共十章，包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理和导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元微积分简介、微分方程、差分方程等部分。内容比较全面，最低限要求的内容具有独立性和完整性(其它内容删削也不影响)，因而适应性强，高低学时都可选用，不仅可作为高等学校财经类专业的教材，也可作为夜大、函大、职大以及高等成人教育自学考试《经济数学》课程的教材。

我们在编写此书的过程中，力求突出重点，特别注重基本概念的阐释以及各种数学知识与经济的内在联系和经济上的应用；在语言风格上，力争浅显和流畅；例题具有典型性，每章习题之后附有习题答案和部分习题选解，因而还适宜作为自学参考书。

参加本书编写的有蔺小林、马菊侠，最后由蔺小林同志统改全稿。

本书由陕西省大学数学教学委员会主任、西北工业大学数学与信息科学系博士导师叶正麟教授主审，他对本书提出的建设性建议和中肯的修改意见使我们获益匪浅，在此特对他表示衷心感谢。

由于我们经验不足，水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者和教师批评指正。

编者　2002 年 7 月

目　　录

第一章 函 数

自然界总是处在永恒地运动变化之中，反映到数学上便产生了变量的概念，而研究变量之间的相互依赖、相互制约关系，就出现了函数的概念。

高等数学是变量的数学，函数是它的研究对象。

第一节 区间和邻域

在考察实际问题的过程中，我们会遇到不同的量。在过程中保持不变的量称为常量，在过程中起着变化的量称为变量。

变量在变化过程中能取到的值的全体称为变量的变域。最常见的变域是区间。

设 a 与 b 为两个实数，且 $a<b$，称介于 a 与 b 之间且包括 a、b 在内的一切实数所组成的数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为以 a、b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

注意，这里 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$。

数集 $$\{x \mid a<x<b\}$$

称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

注意，这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$。

类似的还有半开区间 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$、$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$，以上区间都是有限区间，这些区间在数轴上的表示如图 1－1 所示。

点 a 与点 b 之间的距离 $b-a$ 称为区间的长度。

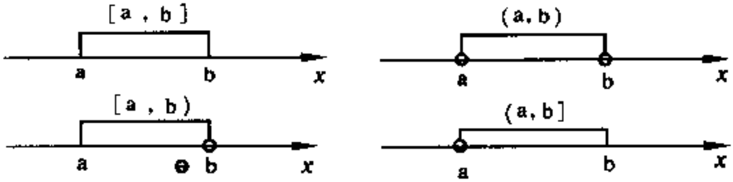


图 1－1

此外还有所谓无限区间，引进记号 $-\infty$（读作负无穷大）及 $+\infty$（读作正无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}$$

$$(-\infty, b)=\{x \mid-\infty<x<b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid-\infty<x<+\infty\}$$

这些区间在数轴上如图 1－2 所示。

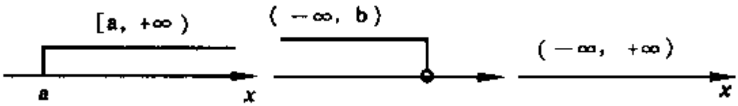


图 1－2

邻域是一种特殊的区间，设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$。以点 a 为中心而长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$（见图 1－3(a)）称为以点 a 为中心 δ 为半径的邻域，简称为"a 的 δ 邻域"，记为 $U(a, \delta)$ 即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

因为不等式 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，所以又有

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

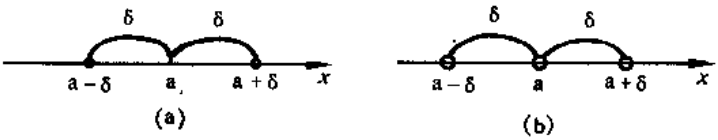


图 1－3

特别，对于不包括 a 点在内的点 a 的 δ 邻域(图 1—3(b)) 称为点 a 的空心邻域，记作 $\overline{\mathrm{U}}(\hat{a},\delta)$ 即

$$\overline{\mathrm{U}}(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$。

第二节　函数概念

在实际问题中，往往有几个变量在同时变化着，这些变量之间往往又是相互联系，相互依赖着的，下面先讨论只有两个变量的简单情形。

一、函数定义

例 1　圆面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给出。当半径在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积的相应数值。

例 2　某厂生产某种电子产品，其固定成本为 C_0(元)，每生产一件产品，成本增加 a(元)，则生产 x 件产品的总成本 y(元) 与产品件数 x 之间的相依关系为

$$y=C_0+ax$$

当产品件数(正整数) 确定之后，由上式便可以确定其总成本。

抽去上面两例中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系；当一个变量在某数集内取定一个值时，按照一定的规则，另一个变量有确定的数值与之对应，根据这一事实，在数学上概括出了函数的概念。

定义　设 x，y 是两个变量，x 的变化范围为 D，如果对于 D 中的每一个值 x，变量 y 按照一定的规则 f，总有确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为

$$y=f(x) \qquad x \in D$$

其中变量 x 又叫自变量，变量 y 又叫因变量，自变量 x 的变化范围

D 又叫做函数的定义域。

定义中的“f”表示自变量与因变量之间存在的“一定的规则”，又称“对应法则”。如在函数 $A = \pi r^2$ 中，自变量 r 与因变量 A 之间的对应法则是“将自变量 r 平方，再将平方的结果乘以 π”。又如在函数 $y - C_0 + ax$ 中，自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则是“将自变量 x 与常数 a 相乘，然后将其乘积加上常数 C_0”。

在同时出现几个不同的函数时，为避免混淆，还可以用其它字母如“g”、“φ”、“F”等作为对应法则的记号。

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值 y_0 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$，记号 $f(x_0)$ 中的括号“(　)”不含通常的注释意义，在这里，括号“(　)”应理解为“施之于”，“加之于”的意思。整个记号 $f(x_0)$ 表示将对应法则“f”(通常是一些数学运算程序)施之于 x_0 上，得出的就是函数值 y_0，即 $f(x_0) = y_0$。例如设 $f(x) = x+1$，这里的对应法则是“对任何自变量 x，都加上 1”，这样，$f(0)$ 就表示将以上对应法则施之于自变量所取的值 0 之上，则 $f(0) = 0 + 1 = 1$。同理有 $f(1) = 1 + 1 = 2$，$f(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$ 等等。

二、关于函数的表示法

函数定义中对函数的表示方式未作任何限制，我们可以用公式表示函数，除此之外，还可以用表格、图象等方法表示函数。有时，一个函数也可以同时用以上三种表示法(公式法、表格法、图象法)表示：根据公式算出因变量与自变量的对应值，将其列成表格，即是表格表示的函数；利用表格中的数据在直角坐标系中描点、连线、即得函数的图象。

用公式法表示的函数，也不一定只用一个式子来表示，根据实际问题，变量间的对应关系有时需用几个式子来表示，如函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{当} \quad -\infty < x < 0 \\ 0 & \text{当} \quad x = 0 \\ x + 1 & \text{当} \quad 0 < x < +\infty \end{cases}$$

当 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任意取定一个值时，变量 y 根据以上公式，总有唯一确定的值与之对应，y 与 x 之间的对应关系完全满足函数的定义，这种函数称为分段函数。

应当注意，不要将分段函数误解为几个函数。它是一个函数，只不过在定义域内它的对应关系要用不同的数学公式分段表示而已。因而在求函数值时，要根据自变量所属不同的范围，分别用不同的表达式来计算；在作图时，也要分段描绘。如对于上面的分段函数，有 $f(-2)=-2-1=-3$，$f(0)=0$，$f(1)=1+1=2$ 等等。

三、函数定义域的确定

函数的定义域 D 是自变量 x 所取的值的全体。对于用公式法表示的函数，确定其定义域要注意以下几点：

(1) 若在公式给出的同时，又限定了自变量的取值范围，则此范围就是该函数的定义域；

(2) 若只给出公式，而未人为限定自变量的取值范围，则这种函数的定义域就是使函数表达式有意义的一切实数，这又叫"自然定义域"。一般求定义域，就是指求这种自然定义域；

(3) 若函数表达的是某个实际问题，则求定义域时就不能只考虑自然定义域，还要考虑到自变量的实际意义。如本节例 1 中的函数 $A=\pi r^2$，因 r 表示圆半径，只能取正值，所以其定义域为 $(0,+\infty)$，又如例 2 中的函数 $y=C_0+ax$，因 x 表示电子产品件数，只能取 1，2，3……，所以其定义为自然数集 N。

例 3　求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$　　(2) $y=\lg(x-x^2)$

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$

解　(1) 当 $\dfrac{1}{1-x}$ 与 $\sqrt{4-x^2}$ 同时有意义时，函数才有意义，于是由

$$\begin{cases}1-x\neq 0\\4-x^2\geqslant 0\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x\neq 1\\-2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

故所求定义域为$[-2,1)$或$(1,2]$。

(2) 当$x-x^2>0$时，对数函数才有意义，解此不等式得

$$0<x<1$$

故所求定义域为$(0,1)$。

(3) 当$-1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant 1$时，反正弦函数才有意义，解此不等式得

$$-3\leqslant x-2\leqslant 3\qquad 即\qquad -1\leqslant x\leqslant 5$$

故所求定义域为$[-1,5]$。

从例 3 可以看出，对于用公式给出的函数，求定义域时要注意某些运算的限制。这主要可归结为以下几个方面：

1° 在公式中，分母不能为零；

2° 在根式中，负数不能开偶次方；

3° 在对数中，真数不能为负数和零；

4° 一些反三角函数和一些三角函数也不是处处有定义的，要注意它们的自变量取值时的限制；

5° 如果同时出现上述诸种情况，且函数的表达式是一个式子时，则定义域就是其公共部分即交集部分。

6° 如果函数是分段函数，则定义域是每段的并集部分。

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & |x|<1\\2 & 1\leqslant x\leqslant 3\\0 & 3\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$，求其定义域。

解 根据函数的定义可知$f(x)$的定义域为$(-1,6]$，此时取了每段区间的并集。

四、函数关系的两大要素

一个函数的定义域，对应法则和值域这三方面确定了，这个函数也就确定了。而当前两者自变量和对应法则确定时，各个自变量

所对应的函数值是确定的，因而值域也就随之确定了。所以定义域和对应法则是函数关系的两大要素。所谓两个函数相同，就是指这两个函数的定义域和对应法则都相同，否则便不能说是相同的函数。

例5 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，　　$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，　　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1$，　　$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(4) $f(y)=\dfrac{y^2-1}{2}$，　　$g(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$。

解 (1) 不相同，因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，它们定义域不同所以不是相同的函数。

(2) 不相同，虽然 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域相同(都是一切实数)，但 $g(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 其对应法则用两个式子分段表出。当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)$ 对应法则与 $f(x)$ 不一样，所以是不同的函数。

(3) 相同，因为这两个函数定义域相同，都是一切实数；而对应法则也仅是形式上不同，实际都是相同的，因为我们有恒等式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，所以这是两个相同的函数。

(4) 相同，因为这两个函数的定义域和对应法则都完全一样，只是表示自变量的字母不一样，而这是无关紧要的，所以它们是相同的函数。

五、单值函数和多值函数

函数定义中，"…… 对于 D 中的每一个值 x，变量 y…… 总有确定的数值与之对应 ……"是指 y 有一个或多个确定的数值与之对应。对于仅有一个 y 值与 x 对应的情形，我们称之为单值函数，对于有多个确定的 y 值与 x 对应的情形，我们称之为多值函数。今后若无特别声明，所说的函数都是指单值函数。

六、反函数

在函数 $y=f(x)$ 中，x 是自变量，y 是因变量，自变量和因变量的地位是不同的，但这种地位又不是绝对的，只要符合函数定义，哪个变量都可以充当自变量或因变量。

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $\overline{W}$，因为 $\overline{W}$ 是函数值组成的数集，所以对于任一 $y_0\in\overline{W}$，必定有 $x_0\in D$，使 $f(x_0)=y_0$。这样的 x_0 可能不只一个，但不论是一个或多个 x_0 与 y_0 对应，若将 y 视为自变量，x 视为因变量，则 x 与 y 之间的关系完全满足函数定义，这样就得到一个新函数，把这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=\varphi(y)$（或 $x=f^{-1}(y)$），它的定义域为 $\overline{W}$，值域为 D。而原来的函数 $y=f(x)$ 则称为直接函数，也可以称 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，因此 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 是互为反函数的。

我们知道，函数关系的两大要素是定义域和对应法则，只要定义域和对应法则不变，自变量和因变量用什么字母来表示是无关紧要的。习惯上，自变量用 x 表示，因变量用 y 来表示，这样将 $x=\varphi(y)$ 中的 y 换成 x，x 换成 y，得到 $y=\varphi(x)$，这与 $x=\varphi(y)$ 是同一个函数，所以 $y=f(x)$ 的反函数又可以表为 $y=\varphi(x)$。例如，求 $y=2x-1$ 的反函数，解出 $x=\dfrac{y+1}{2}$，再按习惯写成 $y=\dfrac{x+1}{2}$，这就是 $y=2x-1$ 的反函数。

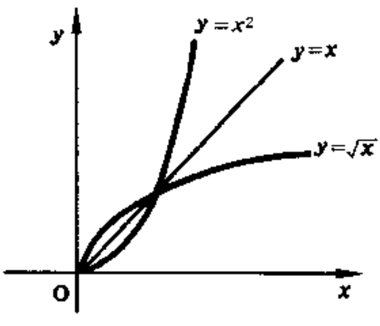


图 1-4

函数 $y=f(x)$ 与它们的反函数 $x=\varphi(y)$ 是关于 x、y 的两个同解方程，所以它们的图象是同一条曲线。只不过对反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，y 轴是它自变量的轴，x 轴是它因变量的轴。若按照 $x=\varphi(y)$ 中的 x、y 互换，得 $y=\varphi(x)$，再在通常的坐标系（横轴 x 轴

为自变量轴，向右方向为正，纵轴 y 轴为因变量轴，向上方向为正）中画出其图形，则反函数 $y=\varphi(x)$ 与直接函数的图形关于直线 $y=x$ 对称。例如，考查函数 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 和它的反函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象，它们的图象是关于直线 $y=x$ 对称的（图 1－4）。

第三节　函数的几种特性

一、函数的有界性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义（(a,b) 可以是函数的整个定义域，也可以是定义域的一部分），若存在一个正数 M，对于任一 $x\in(a,b)$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界，若这样的 M 不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内无界。

例如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对 $(-\infty,+\infty)$ 内任一点 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$；又如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立。

有界函数的图形介于两条直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间。

二、函数的单调性

定义 2　设 (a,b) 是函数 $y=f(x)$ 定义域内的某区间（可以是整个定义域），如果对于任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的。

单调增函数的图形是沿 x 轴正向上升的（图 1－5），单调减函数的图形是沿 x 轴正向下降的（图 1－6）。

三、函数的奇偶性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任一

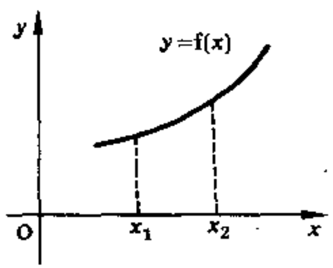


图 1-5

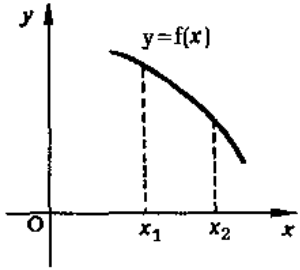


图 1-6

$x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数，如果对任一 $x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$ 成立，则称此函数为奇函数。

例如，$y = x^2$ 及 $y = \cos x$ 都是偶函数，$y = x^3$ 及 $y = \sin x$ 都是奇函数，$y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数，也非偶函数。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的（图 1-7）；奇函数的图形是关于原点对称的（图 1-8）。

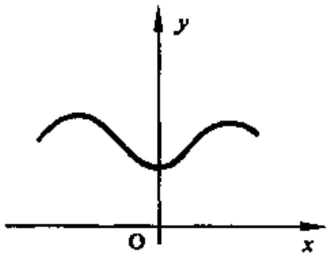


图 1-7

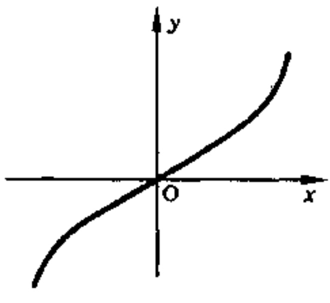


图 1-8

四、函数的周期性

定义 4　对于函数 $f(x)$，若存在非零常数 l，使

$$f(x+l) = f(x)$$

对定义域中的任意 x 均成立，则称 $f(x)$ 为周期函数。满足上述等式的常数 l 中的最小正数称为周期函数的最小正周期，简称周期。