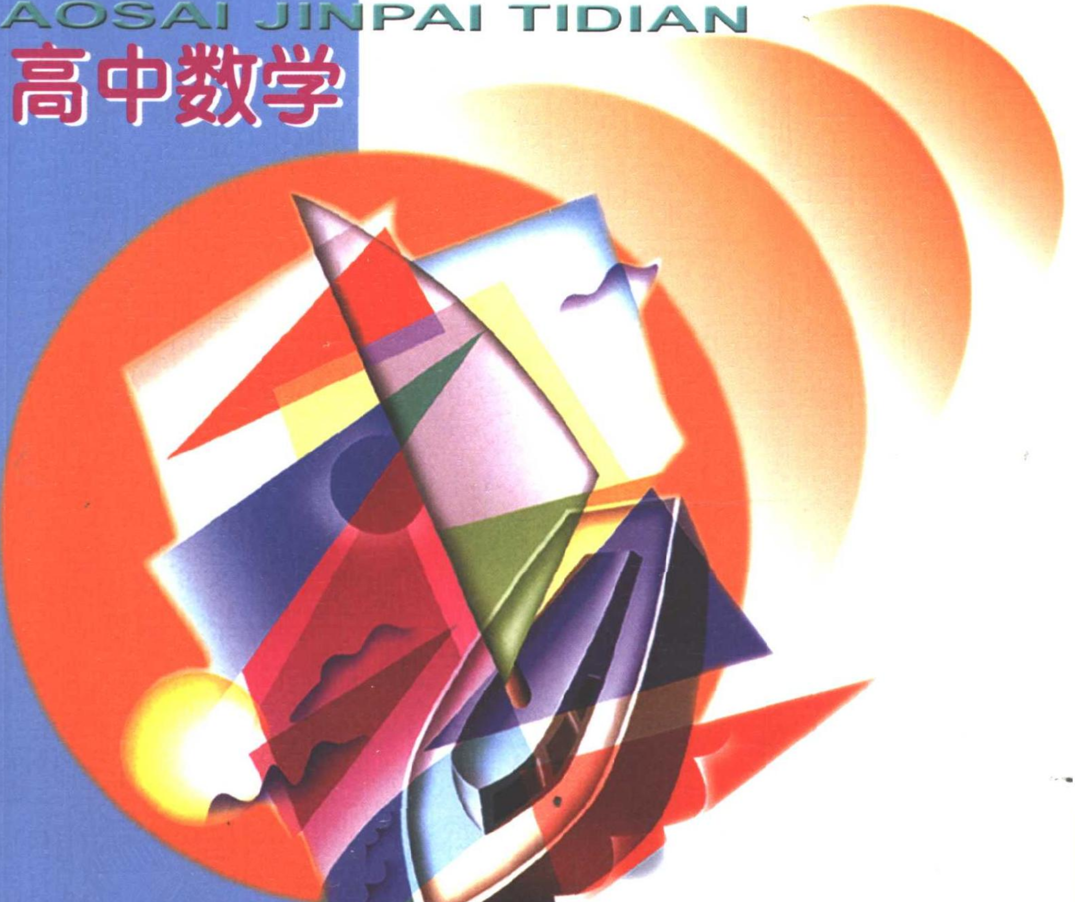
彩虹策划

⊙丛书总主编 吴 康
⊙本册主编 吴 康

# 奥赛金牌题典

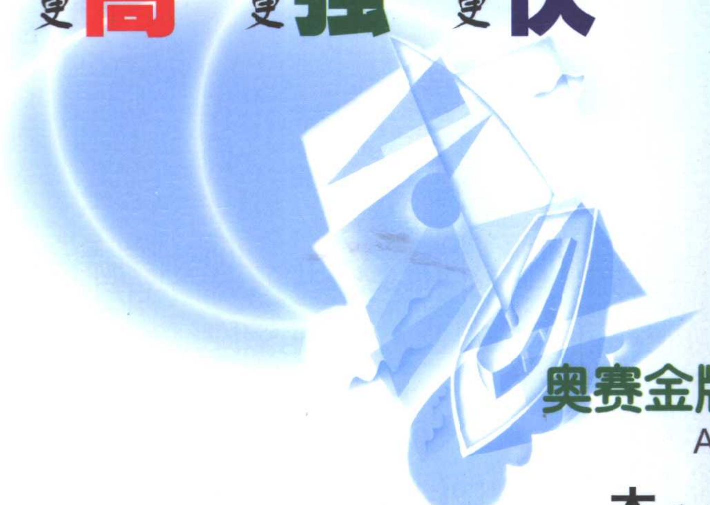
AOSAI JINPAI TIDIAN

## 高中数学



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

更**高** 更**强** 更**快**



奥赛金牌题典

AOSAIJINPAITIDIAN

**本**丛书的总主编和多名分册主编都是曾多次指导中学生在国际国内奥赛中夺取金、银、铜牌奖的全国著名教练。


责任编辑　吴佃华

封面设计　杨　琳

版式设计　林　园

ISBN 7-5633-3586-2

9 787563 335862 >

ISBN 7-5633-3586-2/G · 2313

定价：16.80 元

奥赛金牌之路丛书

本册主编　吴　康

Aosai Jinpai Tidian

# 奥赛金牌题典

## 高中数学

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

**奥赛金牌题典　高中数学**

主　编　吴　康

副主编　王向东

责任编辑：吴佃华　　装帧设计：杨　琳

广西师范大学出版社出版发行

（广西桂林市育才路15号　邮政编码：541004
网址：http://www.bbtpress.cn）

广西师范大学印刷厂印刷

*

开本：890×1 240　1/32　　印张：16.25　　字数：620千字

2004年6月第1版　　2004年6月第1次印刷

ISBN 7-5633-3586-2/G・2313

定价：16.80元

# 前 言

数学是古老而又年轻、庞大而又单一的科学，应用极为广泛，几乎所有的科学都因应用了数学得到极大的发展．数学是21世纪中小学生面前的一座高山．山上云雾缭绕，山上风景万千．爬山是艰苦的，但登山是一件乐事．

数学竞赛源远流长，可以追溯到16世纪三次方程的求解“擂台赛”．现代数学竞赛，可以追踪到1894年匈牙利中学数学竞赛．中国现代数学竞赛活动源于1956年京、津、沪、汉四城市的高中数学竞赛，复兴于1978年的全国和京、沪、津、陕、皖、川、辽、粤八省市中学数学竞赛．1959年起举办的历届国际数学奥林匹克(IMO)，规模宏大，影响深远．

数学竞赛帮助广大学生激发学习兴趣，启迪思维，培养能力，提高知识水平．竞赛试题和解答展现出一幅比数学教科书更绚丽多姿的画卷，其璀璨鲜艳的花朵，琳琅满目的果实，其气象万千的景致，峰回路转的情调，使人目不暇接，流连忘返．

本卷的题解、分析、讨论和点评，给出对问题的深入思考和细致评述，让我们理解问题的实质和变化、源由和关系．A、B两类问题，适合各种需要．内容既依据新教学大纲、数学竞赛大纲，又适当超前、综合和提高；既按照代数、几何、初等数论、组合数学和图论等数学分支分开专题，又别出心裁从数学问题求解方法入手，精选若干专题，混合编排，照顾不同的需求——“源于课本，高于课本”，使多数参加课外活动的学生可用、合用、易用、乐用．

本卷由华南师范大学数学系硕士生导师、《中学数学研究》月刊副主编吴康副教授任主编，佛山科技学院教务处处长王向东教授任副主编．参加编写的有吴康，王向东，广西科学院副院长、广西计算机学会理事长罗海鹏研究员，广西大学梧州分校科研处处长、2001年广西壮族自治区科学技术进步奖一等奖荣获者苏文龙研究员，桂林中学高级教师、

原数学科组长黄文斐，汕头大学理学院原副院长、原国家教委考试中心命题组成员、曾17次参加全国高考命题和研究生入学考试命题的钱昌本副教授，澳门培正中学校长李祥立硕士，全国初等数学研究工作协调组成员、《不等式研究通讯》主编、福州二十四中副校长杨学枝高级教师，广州执信中学高级教师、原数学科组长凌锦华副教授，茂名一中特级教师、原数学科组长黎建明，湛江教育学院数学系主任林观尚讲师，深圳高级中学特级教师、深圳市中学学科带头人冯跃峰，上海二中特级教师杨德胜，广东阳春一中校长、高级教师梁晓硕士，阳春市广播电视大学校长彭山高级讲师，广州市二中高级教师、数学科组长曹亮敏，华南师大附中高级教师、广东奥林匹克学校高中数学教练组组长李兴怀，广州市教研室教研员许世红硕士，广东连州中学副校长李科明，佛山市石湾区教研室教研员郑俊盛高级教师，湛江一中高级教师陈光捷，广东吴川一中数学科组长林观有，河源职业技术学院讲师邱建霞，华南师大课程与教学论专业竞赛数学方向硕士研究生杨萍．其中，吴康、王向东、黄文斐、钱昌本、冯跃峰、李兴怀是中国数学奥林匹克高级教练员，吴康、李兴怀曾出任中国数学奥林匹克集训队教练，李祥立曾出任31～35届IMO裁判团成员和澳门队领队，吴康曾出任澳门队教练，他们指导过1986～2002历年国际数学奥林匹克中国金牌选手中的滕峻、刘雄、何宏宇、陈晞、汪建华、袁汉辉、刘炀、彭建波、韩嘉睿、李鑫、朱琪慧等11名，以及银牌、铜牌选手荆秦、潘子刚、林强、韦国恒、王健梅、查宇涵、邹钢、颜华菲、何建勋等十多名．

本书编写得到单墫博士、周春荔教授、曹汝成副教授、杨光特级教师等的热情关怀和精神上的鼓舞，作者谨向他们致以衷心的感谢，也谨向编写过程中使用的众多参考文献的作者致谢，限于水平，疏漏之处敬请读者批评指正．

编　者

# 目　录

## 第Ⅰ部分　数学竞赛例题精析及训练

## 第Ⅱ部分 数学竞赛套题

# 第Ⅰ部分　数学竞赛例题精析及训练

## 第一章　代数

### §1. 对称多项式与对称函数

### A类题

**A1.** 试证：由 $0<a<1,0<b<1,0<c<1$ 所组成的三个乘积 $(1-a)b$，$(1-b)c,(1-c)a$ 不能同时大于 $\frac{1}{4}$.

**分析：**题设中对 $a$、$b$、$c$ 的规定是对称的，但结论中每个式子各自对 $a$、$b$、$c$ 并不对称，因此我们可以将三个式子联合对称化．另外，题中 $a$、$b$、$c$ 是对称的，我们可以任意规定 $a$、$b$、$c$ 的一个大小次序．由上述两种思想，可以得到两种不同的证法．

**证法 1：**欲证命题，只需证

$$(1-a)b\cdot(1-b)c\cdot(1-c)a\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{3},$$

即证

$$(1-a)a\cdot(1-b)b\cdot(1-c)c\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{3}. \qquad ①$$

但$((1-a)a\leqslant\frac{1}{4},(1-b)b\leqslant\frac{1}{4},(1-c)c\leqslant\frac{1}{4}$,故①显然成立.

**证法 2:** 由 $a$、$b$、$c$ 的对称性,不妨假定 $a$ 是 $a$、$b$、$c$ 三数中最小的一个,则

$$1-c\leqslant 1-a,$$

从而

$$(1-c)a\leqslant(1-a)a\leqslant\frac{1}{4},$$

于是命题获证.

**讨论:** 1. 此问题的一般形式是:由 $0<a_i<1(i=1,2,\cdots,n)$所组成的 $n$ 个乘积

$$(1-a_1)a_2,(1-a_2)a_3,\cdots,(1-a_n)a_1$$

不能同时大于$\frac{1}{4}$,或者证明 $a_1a_2\cdots a_n(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

2. 若注意到 $a$、$b$、$c$ 的值域,此题也可转化为三角函数来证.此时宜设 $a=\sin^2 x$等.

**点评:** 对称问题的解法一般是运用已知的对称公式或不等式.对于那些多条件的对称问题,如果每个条件自身不是对称的,可以联合所有条件,转化为一个对称的条件,上述解法 1 就是这样做的.我们称这种方法为“联合一体对称化”.

对于问题中对称要素间无大小规定的,也可以将它们规定适当的大小次序(有序化),而并不影响问题的本质,这种方法称为“对称元素有序化”,其中证法 2 就是这样做的.

另外,解决对称问题,用得最多的对称化公式有

(1) 乘法公式.例如

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

(2) 韦达定理.即 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的 $n$ 个根的充分必要条件是

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1\\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=a_2\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^na_n\end{cases}$$

(3) 三角公式.特别是

① $a^2+b^2=1$ 成立的充要条件是存在 $x$,使 $\sin x=a,\cos x=b$;

② $x+y+z=xyz$ 成立的充要条件是存在 $A$、$B$、$C$,使

$A+B+C=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,且 $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$.

(4) 对称不等式.如

$$ab+cd\leqslant\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$$

等.

**A2.** (第 19 届奥地利数学奥林匹克试题) 在区域$\{(x,y)\mid x,y>0,xy=1\}$中,求函数

$$f(x,y)=\frac{x+y}{[x][y]+[x]+[y]+1}$$

的值域,其中$[\alpha]$表示 $\alpha$ 的整数部分.

**分析:**函数 $f(x,y)$是关于 $x$、$y$ 的对称函数.由对称性,不妨设 $x\geqslant1$.当 $x=y=1$ 时,显然有 $f(1,1)=\frac{1+1}{[1][1]+[1]+[1]+1}=\frac{1}{2}$,故只需讨论 $x>1$ 的情形.这时可令

$$x=n+\alpha(n\geqslant1,n\in\mathbf{N},0<\alpha<1),$$

由已知条件 $xy=1$,得 $y=\frac{1}{n+\alpha}$,$[y]=0$,$[x]=n$.从而原函数变成

$$f(x,y)=\frac{n+\alpha+1/(n+\alpha)}{n+1},$$

这时再利用对称元素有序化方法,即可求出 $f(x,y)$的值域.

**解:**由上述分析,不妨设 $x\geqslant1$.

(1) 当 $x=y=1$ 时,$f(1,1)=\frac{1}{2}$;

(2) 当 $x>1$ 时,令 $x=n+\alpha(n\geqslant1,n\in\mathbf{N},0<\alpha<1)$,则 $y=\frac{1}{n+\alpha}$,$[y]=0$,$[x]=n$,从而

$$f(x,y)=\frac{n+\alpha+\frac{1}{n+\alpha}}{n+1}.$$

由于 $x+\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$内是增函数,故

$$f(x,y)\in\left[\frac{n+\frac{1}{n}}{n+1},\frac{n+1+\frac{1}{n+1}}{n+1}\right].$$

记

$$a_n=\frac{n+\frac{1}{n}}{n+1},b_n=\frac{n+1+\frac{1}{n+1}}{n+1},$$

则

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)} < 0,$$

$$b_n - b_{n+1} = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} > 0.$$

因此,当 $n \geqslant 1$ 时,

$$a_1 > a_2 = a_3 < a_4 < \cdots, b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > \cdots$$

于是当 $x>1$ 时,$f(x,y)$的值域为$[a_2,b_1)$,即为$\left[\frac{5}{6},\frac{5}{4}\right)$.

综合(1)、(2)知,$f(x,y)$的值域为$\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{5}{6},\frac{5}{4}\right)$.

**点评:**由上两题的解法可见,分析对称性,是采用有序化方法的基础,也是求解各种数学竞赛题的重要手段之一.

**A3.**(第25届IMO(国际数学奥林匹克)试题) 证明不等式

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27},$$

其中 $x$、$y$、$z$ 为非负实数,且满足 $x+y+z=1$.

**分析:**欲证不等式 $0 \leqslant xy+yz+zx-2xyz \leqslant \frac{7}{27}$,即证明对称函数

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx - 2xyz$$

的最小值为0,最大值为$\frac{7}{27}$.显然可以利用"对称有序化"和局部调整法求解.

**证明:**由于 $x$、$y$、$z$ 的对称性,不妨设

$$x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0, x+y+z=1.$$

令

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx - 2xyz = (x+z)y + (1-2y)xz.$$

因为

$$1-2y = (x+y+z) - 2y = (x-y) + z \geqslant 0,$$

所以,$f(x,y,z) \geqslant 0$.下面证明:若 $x>z$,则

$$f(x,y,z) < \max_{x+y+z=1} f(x,y,z). \qquad ①$$

对 $x$、$z$ 以较小变动 $\varepsilon$,且保持 $x+y+z=1$.则

$$\begin{aligned}
&f(x-\varepsilon,y,z+\varepsilon) = (x+z)y + (1-2y)(x-\varepsilon)(z+\varepsilon)\\
&= (x+z)y + (1-2y)xz + (1-2y)x\varepsilon - (1-2y)z\varepsilon - (1-2y)\varepsilon^2\\
&= (x+z)y + (1-2y)xz + (1-2y)(x-z-\varepsilon)\varepsilon
\end{aligned}$$

$=f(x,y,z)+(1-2y)(x-z-\varepsilon)\cdot\varepsilon.$ ②

当 $x>y$ 或 $z>0$ 时，$1-2y=(x-y)+z>0$. 在②中取 $\varepsilon>0$ 足够小 $\left(\text{如取 } \varepsilon\leqslant\frac{x-z}{2}\right)$，则有 $f(x-\varepsilon,y,z+\varepsilon)>f(x,y,z)$.

当 $x=y$，且 $z=0$ 时，$1-2y=0$，故此时有

$f(x,y,z)=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)=f\left(\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2},\varepsilon\right)=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\varepsilon,\varepsilon\right)<f\left(\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon,2\varepsilon\right)$.

因此，$f(x,y,z)<\max\limits_{x+y+z=1}f(x,y,z)$.

由①式易知

$$\max_{x+y+z=1}f(x,y,z)=f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}\text{(可用反证法予以证明)}.$$

综上所述，$0\leqslant xy+yz+zx\leqslant\frac{7}{27}$.

**讨论：**本题可以推广成如下更为一般的情形：

1. 若 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$ 满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$，且均为非负实数，则 $0\leqslant x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-\frac{3}{2}(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)\leqslant\frac{9}{32}$.

2. 若非负数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 设

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n-\frac{n-1}{n-2}\\&[(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_1x_2x_n)+(x_1x_3x_4+\cdots+x_1x_3x_n)+\cdots\\&+(x_1x_{n-1}x_n)+(x_2x_3x_4+\cdots+x_2x_3x_n)+\cdots+x_2x_{n-1}x_n+\cdots+\\&(x_{n-2}x_{n-1}x_n)],\end{aligned}$$

则

$$0\leqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

**点评：**本题是通过对两个变量在保持条件 $x+y+z=1$ 的情况下进行调整（称为局部调整），并且在用局部调整思想证明

$$f(x,y,z)<\max_{x+y+z=1}f(x,y,z)$$

的过程中，对 $x$、$y$、$z$ 的情况采取了分类讨论，即局部调整与分类相结合，这种方法对于所讨论的最值函数（目标函数）及表达约束条件的函数（约束函数）都是关于变量的对称函数时最为有效，且最值往往在各变量相等时达到.

**A4.** 设 $x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 是 $n$ 个互不相等的数，$t_1,t_2,\cdots,t_m$ 是任意 $m$ 个数，$r_1,r_2,\cdots,r_m$ 为非负整数，且

$$r_1+r_2+\cdots+r_m=r(r\geqslant m),$$

则

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant m}(x_j-t_k)^{r_k}}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\k\neq j}}(x_j-x_k)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<n-1,\\1, & r=n-1,\\\sum\limits_{k=1}^{n}r_kx_k-\sum\limits_{k=1}^{m}r_kt_k, & r=n=m.\end{cases}\qquad①$$

**分析：** 利用 Lagrange 恒等式，并比较 $x^{n-1}$ 的系数即可得证.

**证明：** 当 $0\leqslant r\leqslant n-1$ 时，令

$$f(x)=(x-t_1)^{r_1}(x-t_2)^{r_2}\cdots(x-t_m)^{r_m}.$$

由 Lagrange 恒等式，得

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}f(x_j)\\&=\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\cdot\prod_{1\leqslant i\leqslant m}(x_j-t_i)^{r_i}\\&=(x-t_1)^{r_1}(x-t_2)^{r_2}\cdots(x-t_m)^{r_m}\end{aligned}\qquad②$$

比较 $x^{n-1}$ 的系数，得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(x_j-t_i)^{r_i}}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\k\neq j}}(x_j-x_k)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<n-1\\1, & r=n-1.\end{cases}$$

当 $r=n=m$ 时，令

$$f(x)=(x-t_1)^{r_1}(x-t_2)^{r_2}\cdots(x-t_m)^{r_m}-(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_n)^{r_n},$$

同样地，

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right)\cdot\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(x_j-t_i)^{r_i}\equiv\prod_{1\leqslant i\leqslant m}(x-t_i)^{r_i}-\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(x-x_i)^{r_i}\qquad③$$

比较 $x^{n-1}$ 的系数得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_j-t_k)^{r_k}}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\k\neq j}}(x_j-x_k)}=\sum_{k=1}^{n}r_kx_k-\sum_{k=1}^{m}r_kt_k.$$

**讨论：** 1. 由本题的证明立得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^{-1}\prod\limits_{1\le k\le n}(x_j-k_k)^{r_k}}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}}(x_j-x_k)}=\begin{cases}(-1)^{n-r+1}\dfrac{t_1^{r_1}t_2^{r_2}\cdots t_m^{r_m}}{x_1x_2\cdots x_n}, & 0\leqslant r\leqslant n-1,\\ \dfrac{\prod\limits_{1\le k\le n}x_k^{r_k}-\prod\limits_{1\le k\le n}t_k^{r_k}}{x_1x_2\cdots x_n}, & r=n=m.\end{cases}$$

2. 本题是下述 Matrix 恒等式的推广:

$$\frac{a^r}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^r}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^r}{(c-a)(c-b)}=\begin{cases}0, & r=0,1,\\ 1, & r=2,\\ a+b+c, & r=3.\end{cases}$$

Matrix 恒等式是关于 $a$、$b$、$c$ 的轮换对称式.中学数学中许多恒等式的化简、求值、变形等,经常使用 Matrix 恒等式,许多数学竞赛题均是它的推广或变形.

**点评**:本题证明中运用了著名的 Lagrange 插值恒等式:

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}\cdot f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}\cdot$$
$$f(x_1)+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\cdot f(x_n), \qquad ④$$

其中 $f(x)$是一个次数不超过 $n$ 的多项式,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 两两不同.许多与对称式、轮换对称式有关的问题均可考虑由它解决.

**A5.**(第 26 届 IMO 备选题) 定义多项式 $P_m(x,y,z)$如下:$P_0(x,y,z)=1$,当 $m\geqslant1$ 时,

$$P_m(x,y,z)=(x+z)(y+z)P_{m-1}(x,y,z+1)-z^2P_{m-1}(x,y,z). \qquad ①$$

证明:对每个 $m$,多项式 $P_m(x,y,z)$是对称的.

**分析**:为证明多项式 $P_m(x,y,z)$是对称的,必须证明

$$P_m(x,y,z)=P_m(x,z,y)=P_m(z,x,y)=\cdots$$

由题设①知

$$P_m(x,y,z)=(x+y)(y+z)P_{m-1}(x,z,y+1)-y^2P_{m-1}(x,z,y). \qquad ②$$

由① - ②,得

$$y^2P_{m-1}(x,z,y)-z^2P_{m-1}(x,y,z)+(y+z)\cdot[(x+z)P_{m-1}(x,y,z+1)$$
$$-(x+y)P_{m-1}(x,z,y+1)]=0. \qquad ③$$

如果已证明 $P_{m-1}(x,y,z)$对称,则

$$P_{m-1}(x,z,y)=P_{m-1}(x,y,z).$$

于是③式化为

$$(y-z)P_{m-1}(x,y,z)=(x+y)P_{m-1}(x,z,y+1)-(x+z)P_{m-1}(x,y,z+1).$$

上述分析告诉我们，应当用数学归纳法证明如下命题 $P(m)$：多项式 $P_m(x,y,z)$ 对称，并且

$$(y-z)P_{m-1}(x,y,z)=(x+y)P_m(x,z,y+1)-(x+z)P_m(x,y,z+1). \quad ④$$

**证明**：用数学归纳法证明命题 $P(m)$. 当 $m=0$ 时，$P_0(x,y,z)=1$ 是对称的，并且

$$(y-z)P_0(x,y,z)=y-z,$$

$$(x+y)P_0(x,z,y+1)-(x+z)P_0(x,y,z+1)=x+y-x-z=y-z,$$

即④式对 $m=0$ 成立. 因此命题对 $m=0$ 成立.

假设命题 $P(m)$ 对 $m=k$ 成立，下面证明命题对 $m=k+1$ 成立. 由题设①式知

$$P_{k+1}(x,y,z)=(x+z)(y+z)P_k(x,y,z+1)-z^2P_k(x,y,z),$$

$$P_{k+1}(x,z,y)=(x+y)(y+z)P_k(x,z,y+1)-y^2P_k(x,z,y).$$

由归纳假设，$P_k(x,y,z)$ 对称，因此 $P_k(x,z,y)=P_k(x,y,z)$. 于是，由上两式相减，得

$$P_{k+1}(x,y,z)-P_{k+1}(x,z,y)=(x+y)[(x+z)P_k(x,y,z+1)-(x+y)P_k(x,z,y+1)+(y-z)P_k(x,y,z)].$$

由归纳假设④可知

$$P_{k+1}(x,z,y)=P_{k+1}(x,y,z) \quad ⑤$$

再由题设①及归纳假设 $P_k(x,y,z)$ 对称，得到

$$\begin{aligned}P_{k+1}(y,x,z)&=(y+z)(x+z)P_k(y,x,z+1)-z^2P_k(y,x,z)\\&=(x+z)(y+z)P_k(x,y,z+1)-z^2P_k(x,y,z)=P_{k+1}(x,y,z).\end{aligned} \quad ⑥$$

反复利用⑤式与⑥式，得到

$$P_{k+1}(x,y,z)=P_{k+1}(x,z,y)=P_{k+1}(z,x,y)=P_{k+1}(z,y,x)=P_{k+1}(y,z,x)=P_{k+1}(y,x,z).$$

因此，$P_{k+1}(x,y,z)$ 是对称的.

现在证明④对 $m=k+1$ 成立. 因为 $P_{k+1}(x,y,z)$ 是对称的，因此④式的右端为

$$\begin{aligned}&(x+y)P_{k+1}(x,z,y+1)-(x+z)P_{k+1}(x,y,z+1)\\=&(x+y)P_{k+1}(y+1,z,x)-(x+z)P_{k+1}(z+1,y,x)\\=&(x+y)[(y+1-x)(x+z)P_k(y+1,z,x+1)-x^2P_k(y+1,z,x)]\\&-(x+z)[(z+1+x)(x+y)P_k(z+1,y,z+1)-x^2P_k(z+1,y,x)]\end{aligned}$$