21 世纪高等院校教材

概率统计

高玉斌 主 编
潘晋孝 副主编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书介绍概率统计的基本知识及应用，共 9 章，包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、几类重要的概率分布、基本极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析，内容覆盖工科概率统计教学的基本要求．每章末均配有适量习题，书末附有习题答案．

本书内容精炼，语言简洁，条理性强，联系实际，用较短的篇幅介绍了概率统计的基本知识、基本理论和基本方法．

本书可作为高等工科院校概率统计课程的教材，也可供工程技术人员自学参考．

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/高玉斌主编．—北京：科学出版社，2004.8
21 世纪高等院校教材
ISBN 7-03-013635-7

Ⅰ．概… Ⅱ．高… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 065735 号

责任编辑：刘俊来 李鹏奇／责任校对：包志虹
责任印制：安春生／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷 印张：14 1/2
印数：1—12 000 字数：273 000

定价：18.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

概率统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，其应用范围相当广泛，并有其独特的思维方法，在高等工科学校教学计划中是一门重要的基础课.

随着科学技术的飞速发展及计算机的广泛应用，概率统计的内容在工程技术中越来越显示其重要作用，特别是数理统计中很多处理数据的方法在工程技术中得到广泛应用.

本书共分 9 章，分别为随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、几类重要的概率分布、基本极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析. 内容覆盖了国家教委“工科数学课程教学指导委员会”1987 年颁布的《概率统计课程教学基本要求》的内容. 在编写过程中，我们充分考虑了来自各方面的有关工科数学课程体系、课程内容改革的信息，并融多年教学经验于一体，力求在内容编排上体现概率论与数理统计并重的思想，叙述上简明扼要，注重条理性及理论联系实际，便于教学.

本书由高玉斌任主编，潘晋孝任副主编，前五章由高玉斌执笔，后四章由潘晋孝执笔.

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正.

编者

2004 年 3 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

在自然界与人类社会生活中，存在着两类截然不同的现象．一类是确定性现象，例如：在标准大气压下，纯水加热到 100℃ 必然沸腾；异性电荷必相吸．这些都是确定性现象，其特点是：只要条件具备，结果必然出现，即在一定条件下，重复进行试验，其结果只有一个．另一类是随机现象，例如：投掷一枚均匀的硬币，可能出现“正面”，也可能出现“反面”，事先不能做出确定的判断；一门大炮多次射击同一目标，炮弹并不都落在同一点．这些都是随机现象，其特点是：可能结果不止一个，即在相同条件下进行重复试验，试验的结果事先不能唯一确定．

从表面上看，由于随机现象的可能结果不止一个，人们在事先无法判定将会出现哪种结果，似乎是不可捉摸的．其实不然，人们从实践中发现，在相同条件下，对随机现象进行大量重复观察或试验，其结果总是呈现出某种规律性．如投掷一枚均匀硬币，一次投掷不能断定它出现哪一面，但如果进行几百次，几千次的投掷，将会发现出现“正面”与出现“反面”的次数各占一半左右．

由此可见，随机现象具有偶然性和必然性的两重性．由于随机现象具有多个可能结果，因此对其结果的出现是不能预言的，这是偶然性的一面，但当我们对随机现象进行大量重复观察或试验时，所得结果又呈现某种规律性，因此，偶然性又受到随机现象本身内部规律性的支配．这种规律性也称为随机现象的统计规律性，这又是必然性的一面．概率论与数理统计就是从数量的侧面来研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科．

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机事件

在概率论中，把对随机现象的观察或试验称为**随机试验**，也简称为**试验**，记为 E．对于某个随机试验 E，在一次试验中可能发生（出现），也可能不发生的事情，称为这试验的**随机事件**，简称**事件**，通常用大写拉丁字母 $A, B, \cdots$ 或 $A_1, A_2, \cdots$ 表示．

一个随机事件通常由试验的若干个可能结果所构成．如果一个事件是由该试验的一个可能结果构成的，称为**基本事件**，否则称为**复合事件**，换句话说，复合事件是由一些基本事件组合而成的事件．例如，掷一颗骰子，观察其出现的点数是一随机试验，“出现 3 点”是一基本事件，而“点数小于 3”则是一复合事件，它包含试验

的两个可能结果,也可将其看成“出现 1 点”、“出现 2 点”这两个基本事件组合而成的.

在试验 E 中必然会发生的事情称为**必然事件**,不可能发生的事情称为**不可能事件**,分别记为 Ω,$\varnothing$. 例如在上述掷骰子试验中,“点数不大于 6”是必然事件,“点数大于 6”是不可能事件. 必然事件和不可能事件本来没有不确定性,也就是说它们不是随机事件,但为了今后讨论方便,我们把它们当作一种特殊的随机事件.

例1.1.1 下列随机试验,各有哪些基本事件:

(1) E_1:把一枚均匀硬币连续投掷两次,观察其出现的正、反面;

(2) E_2:掷一颗骰子,观察其出现的点数.

解 (1) 用(正,反)表示事件“第一次出现正面,第二次出现反面”,则 E_1 的基本事件有:

(正,正),(正,反),(反,正),(反,反).

(2) E_2 的基本事件有:

“出现 1 点”,“出现 2 点”,“出现 3 点”,“出现 4 点”,“出现 5 点”,“出现 6 点”.

1.1.2 样本空间

由试验 E 的所有基本事件组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 Ω. 样本空间 Ω 中的元素称为**样本点**,记为 ω.

例1.1.2 E:掷一颗骰子,观察其出现的点数. 设 ω_i 表示“出现 i 点”的事件 $(i=1,2,\cdots,6)$,则 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

例1.1.3 E:考虑某电话交换台在单位时间内接到的呼唤次数,用 ω_i 表示基本事件“接到 i 次呼唤”,于是样本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$.

由于一个样本点即是一个基本事件,因而试验 E 的任一事件可看成其样本空间的一个子集,一个事件发生当且仅当表示该事件的子集中的一个样本点发生. 如例 1.1.2 中,设事件 $A=\{$出现偶数点$\}$,它是由基本事件“出现 2 点”、“出现 4 点”、“出现 6 点”组成,即 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$,它是 Ω 的一个子集. 特别,必然事件就是样本空间 Ω,不可能事件就是空集 $\varnothing$.

有了上述规定,事件之间的关系与运算就和集合之间的关系与运算统一起来,从而可用集合的一些术语、符号去描述事件之间的关系与运算.

1.1.3 事件之间的关系与运算

(1) 事件的包含及相等. 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 中的每一样本点都包含在 B 中,则称**事件 B 包含事件 A**,或**事件 A 包含于事件 B**,记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

若事件 B 包含事件 A,事件 A 包含事件 B,即 A 与 B 所含的样本点完全相

同,则称事件 A 与事件 B **相等**.记为 $A=B$.

(2) 事件的和(并). 两个事件 A,B 中至少有一个发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**和**(或**并**).它是由事件 A 与 B 的所有样本点构成的集合,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

类似地,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件,称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $A_1+A_2+\cdots+A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$; 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生的事件,称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 或 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3) 事件的积(交). 两个事件 A 与 B 同时发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**积**(或**交**).它是由事件 A 与 B 的所有公共样本点构成的集合,记为 $A\cap B$ 或 AB.

类似地,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件,称为这 n 个事件的积,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$;而可列(可数)无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生的事件,称为这可列无穷多个事件的积,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$.

(4) 事件的差. 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**差**.它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合,记为 $A-B$.

(5) 互不相容事件. 若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,称事件 A 与事件 B **互不相容**(或称**互斥**).互不相容事件 A 与 B 没有公共的样本点.

(6) 对立事件. 若在一次试验中,事件 A 与事件 B 中必然有一个发生,且仅有一个发生,亦即事件 A 与事件 B 满足条件

$$A\cup B=\Omega,\quad A\cap B=\varnothing$$

则称事件 B 为 A 的**对立事件**(逆事件),或称 A 是 B 的对立事件. A 的对立事件是由样本空间中所有不属于 A 的那些样本点组成的集合. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

用图形表示事件间的关系和运算见图 1-1.

对于事件的运算,还有下面的关系式:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)C=AC\cup BC$;

(4) 对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(5) $A-B=A\overline{B}$.

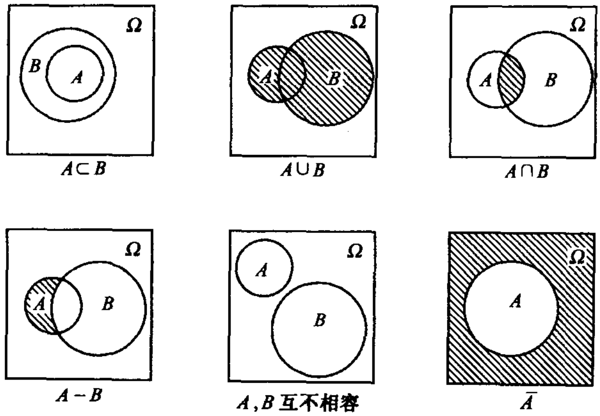

图 1-1

(6) $\bar{A}=\Omega-A$.

(7) $\bar{\bar{A}}=A$.

例1.1.4　设事件 A_k 表示第 k 次取到了合格品($k=1,2,3$),试用符号表示下列事件:三次都取到了合格品;三次中至少有一次取到合格品;三次中恰有两次取到合格品;三次中至多有一次取到合格品.

解　三次都取到合格品:　$A_1A_2A_3$.

三次中至少有一次取到合格品:$A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

三次中恰有两次取到合格品:$A_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3$.

三次中至多有一次取到合格品:$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

例1.1.5　简化下列各式:

(1) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})$;

(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)$.

解　(1) 因为

$$(A\cup B)(A\cup\bar{B})=AA\cup A\bar{B}\cup BA\cup B\bar{B}$$

而

$$AA=A,B\bar{B}=\varnothing \text{且 } A\bar{B}\cup BA=A(\bar{B}\cup B)=A\Omega=A$$

故

$$(A\cup B)(A\cup\bar{B})=A\cup A\cup\varnothing=A$$

(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)=A(\bar{A}\cup B)=A\bar{A}\cup AB=\varnothing\cup AB=AB$.

1.2 随机事件的概率

随机事件在一次试验中,可能发生,也可能不发生,具有偶然性.但是,人们从实践中认识到,在相同的条件下,进行大量的重复试验时,试验的结果具有某种内在的规律性,即随机事件发生的可能性大小是可以比较的,是可以用一个数字进行度量的.例如,掷一颗骰子,当骰子是均匀时,六面中任一面出现的可能性是相同的,“出现奇数点”这一事件的发生比“出现1点”的可能性大.用以度量随机事件发生的可能性大小的数,就是随机事件的概率.但是,用以度量随机事件发生的可能性大小的数,即事件的概率如何进行定义呢?在概率论发展的历史上,人们针对不同情况,从不同的角度对事件的概率作了规定.

1.2.1 概率的统计定义

定义 1.2.1 设事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次,则称比值$\frac{n_A}{n}$为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**,记为 $f_n(A)$.

显然 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

人们通过实践发现,当试验次数 n 逐渐增大时,事件 A 发生的频率总会在某个确定的数值附近摆动,并且当 n 越大时,A 发生的频率就越接近这个数值.历史上有不少人作过多次投掷硬币的试验,设 A 表示“出现正面”的事件,下面记录了几个人的试验结果(见表1-1).

表 1-1

实 验 者	n	n_A	$f_n(A)$
德摩根	2048	1061	0.518
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔孙	12000	6019	0.5016
皮尔孙	24000	12012	0.5005

由此表可以看出,投掷次数越多时,频率越接近于0.5,且逐渐稳定于0.5.这样,0.5这个数反映了事件 A 发生的可能性大小.这种特性就称为随机事件发生的频率的稳定性.

定义 1.2.2 在相同的条件下进行 n 次重复试验,事件 A 发生的频率总是在 $[0,1]$ 上的一个确定的常数 p 附近摆动,并且稳定于 p,则称 p 为事件A 的**概率**,记为 $P(A)=p$.

这就是概率的统计定义.由频率出发定义事件 A 的概率,一方面肯定了任一事件 A 的概率 $P(A)$ 是存在的,另一方面又给出了一个近似计算概率的方法.但不足之处是,需要进行大量重复试验.

1.2.2　古典概率

一个随机试验 E,如果具有下列两个特征,则称 E 是**古典概型的随机试验**:

(1) 有限性:只有有限多个基本事件;

(2) 等可能性:每一基本事件发生的可能性相同.

古典概型的随机试验是一种既简单又常见的随机试验,是概率论发展史上研究最早的问题,它在概率论中占有很重要的地位.古典概型事件的概率可根据其特点直接计算,而不必进行多次重复试验.下面引进古典概型事件的概率定义.

定义 1.2.3　在古典概型中,若基本事件总数为 n,事件 A 所包含的基本事件个数为 $r(r\leqslant n)$,则定义**事件 A 的概率** $P(A)$ 为 $\dfrac{r}{n}$,即

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{ 中所含基本事件个数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.2.1}$$

例 1.2.1　将一枚均匀硬币投掷三次,求下列事件的概率:

(1) $A=\{$恰有一次出现正面$\}$;

(2) $B=\{$至少有一次出现正面$\}$.

解　用 H 表示出现正面,则其样本空间为

$$\Omega=\{HHH,\overline{H}HH,H\overline{H}H,HH\overline{H},\overline{H}\,\overline{H}H,\overline{H}H\overline{H},H\overline{H}\,\overline{H},\overline{H}\,\overline{H}\,\overline{H}\}$$

基本事件总数 $n=8$.

(1) $A=\{\overline{H}\,\overline{H}H,\overline{H}H\overline{H},H\overline{H}\,\overline{H}\}$,$A$ 中所含基本事件个数 $r_A=3$,故 $P(A)=\dfrac{3}{8}$.

(2) $B=\{HHH,\overline{H}HH,H\overline{H}H,HH\overline{H},\overline{H}\,\overline{H}H,\overline{H}H\overline{H},H\overline{H}\,\overline{H}\}$,$B$ 中所含基本事件个数 $r_B=7$,故 $P(B)=\dfrac{7}{8}$.

例 1.2.2　在 10 件表面完全一样的产品中,有 8 件正品,2 件次品,从中任取 3 件,求以下事件的概率:

(1) $A=\{$恰有两件次品$\}$;

(2) $B=\{$没有次品$\}$.

解　从 10 件产品中任意抽取 3 件产品,共有 C_{10}^3 种抽取方法,即基本事件总数 $n=C_{10}^3$.

(1) 事件 $A=\{$恰有两件次品$\}$ 相当于取出的 3 件产品中$\{$有 2 件次品,1 件正品$\}$这一事件,2 件次品从 2 件次品中取得,共有 C_2^2 种取法,1 件正品从 8 件正品中

取得,共有 C_8^1 种取法,故事件 A 包含的基本事件个数 $r_A=C_2^2\times C_8^1$,从而 A 的概率

$$P(A)=\frac{C_2^2\times C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

(2) 事件 $B=\{$没有次品$\}$相当于取出的 3 件产品$\{$全是正品$\}$这一事件,故 B 包含的基本事件个数 $r_B=C_8^3$,从而 B 的概率

$$P(B)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$$

例 1.2.3 一批产品共 100 件,其中次品有 4 件,今从这批产品中接连抽取两次,每次抽取 1 件,考虑两种情形:(a)第一次取 1 件,检验其是否为次品后放回,第二次从剩余的产品中再取 1 件,这种情况称为有放回抽取;(b)第一次取 1 件不放回,第二次从剩余的产品中再取 1 件,这种情况称为无放回抽取. 试分别就上述两种情况求事件 $A=\{$第一次取得的是正品,第二次取得的是次品$\}$的概率.

解 (a) 有放回抽取.

从 100 件产品中接连抽取 2 件产品,要考虑 2 件产品取出的顺序,且有放回抽取,每次抽取方式都有 100 种,故共有 100^2 种抽取方式,即 $n=100^2$. 第一次取得正品是从 96 件正品中取出,共有 96 种抽取方式;第二次取得次品是从 4 件次品中取出,共有 4 种抽取方式,这样,A 所含基本事件数 $r=96\times 4$. 故所求概率为

$$P(A)=\frac{96\times 4}{100^2}=0.0384$$

(b) 无放回抽取.

采用无放回抽取,由于也要考虑 2 件产品取出的顺序,故接连两次抽取共有 P_{100}^2 种抽取方式,即 $n=P_{100}^2$. 在这种情况下 r 仍为 96×4,因此所求概率为

$$P(A)=\frac{96\times 4}{P_{100}^2}\approx 0.0388$$

例 1.2.4 在波尔兹曼统计学中,要考虑这样的问题:

设有 n 个质点落在 N 个格子中($N>n$),每个质点都以概率 $\frac{1}{N}$ 落在 N 个格子的每个之中. 假设每个格子中可以落进任意个质点,而且把每个质点看成是不同的,可以区分的. 试求:

(1) $\{$指定 n 个格子中各有 1 个质点$\}$的概率;

(2) $\{$任意 n 个格子中各有 1 个质点$\}$的概率.

解 因为每个质点都可以落入 N 个格子中的任何一个,所以每一个质点都有 N 种不同的分布法,n 个质点应有 N^n 种不同的分布法,故基本事件总数为 N^n.

(1) "指定 n 个格子中各有 1 个质点"这样一种分布实质上就是"n 个可以区分的质点在指定的 n 个格子中进行全排列",显然全排列数为 $n!$,故所求概率为

$$p_1=\frac{n!}{N^n}$$

(2) 对于“任意 n 个格子中各有 1 个质点”这样一种分布来说，n 个质点可以落在这 n 个格子中，也可以落在那 n 个格子中，而这 n 个格子可以从 N 个格子中任意选出，共有 C_N^n 种情形，又每一种情况有 $n!$ 种质点的分布法. 因此，“任意 n 个格子中各有 1 个质点”共有 $C_N^n\cdot n!$ 种分布法，故所求概率为

$$p_2=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

1.2.3　几何概率

在古典概型中，所研究的问题都有两个特征，即结果个数的有限性和出现每个结果的等可能性. 如果等可能性仍然成立，但试验结果个数为无限个，则古典概率的定义就不适用了，必须再进一步进行研究. 我们通过下面的例子来引入另一种概率计算方法.

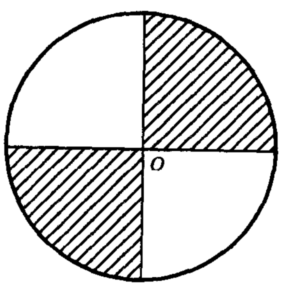

图 1-2

例 1.2.5　某选手向一圆形靶射击，击中靶上每一点的可能性是相同的，并且肯定击中靶上某点(图 1-2)，问击中点落在阴影部分的概率多大?

解　由于可能击中的点为无数个，而击中每一点可能性一样，我们考虑用阴影部分面积占整个圆面积的比例来计算所求概率，即击中阴影部分的概率为

$$p=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{圆面积}}=\frac{1}{2}$$

这类利用平面或空间图形的几何特性来计算的概率我们称之为**几何概率**.

例 1.2.6　甲、乙两人相约在 0 到 T 这段时间内在预定地点会面，先到的人等候另一个人，经过时间 $t(t<T)$离去. 设每人在 0 到 T 这段时间内各时刻到达该地是等可能的，且两个人到达的时刻互不相连. 试求甲、乙两人能会面的概率多大?

解　以 x,y 分别表示甲、乙两人到达的时刻，则

$$0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T$$

若以 x,y 来表示平面上点的坐标，而所有可能到达时刻组成的点可以用平面上边长为 T 的正方形 $0\leqslant x\leqslant T$, $0\leqslant y\leqslant T$

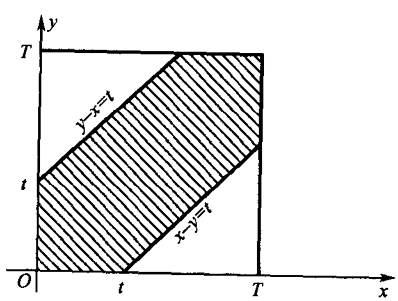

图 1-3

内所有点表示出来(图 1-3)，两人能会面的充分必要条件是

$$|x-y|\leqslant t$$

即图中的阴影部分,则所求概率为

$$p=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

1.2.4 概率的性质

概率有下列基本性质:

性质 1 设 A 为任一事件,则

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1.2.2}$$

性质 2

$$P(\Omega)=1,\quad P(\varnothing)=0 \tag{1.2.3}$$

性质 3 若 $AB=\varnothing$,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \tag{1.2.4}$$

推论 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为互不相容的事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.2.5}$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots \tag{1.2.6}$$

式(1.2.5)、(1.2.6)分别称为概率的有限可加性及可列可加性.

以上三条是概率的基本性质.概率的其他性质均可用这三条基本性质证明.

性质 4 $P(\bar{A})=1-P(A)$

证 因 $A\cup\bar{A}=\Omega, A\bar{A}=\varnothing$,由性质 3 有

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$$

从而有

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

性质 5 若 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

证 当 $A\supset B$ 时,$B(A-B)=\varnothing$,且

$$A=B+(A-B)$$

由性质 3 有

$$P(A)=P(B)+P(A-B)$$

移项得

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论 若 $A\supset B$,则 $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 6 设 A,B 为任意两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证 因 $A(B-AB)=\varnothing$,且

$$A \cup B = A \cup (B - AB)$$

由性质 3 有

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - AB)) = P(A) + P(B - AB)$$

又因为 $AB \subset B$，由性质 5 有

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB)$$

从而

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

推论　设 A, B, C 为三个事件，则

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

例 1.2.7　箱中装有 100 件产品，其中有 3 件次品. 为检查产品质量，从这箱产品中任意抽取 5 件，求至少有 1 件次品的概率.

解法一　从 100 件产品中任意抽取 5 件，共有 C_{100}^5 种抽取方法，即基本事件总数 $n = C_{100}^5$.

{至少有 1 件次品}包含"恰有 1 件次品"、"恰有 2 件次品"、"恰有 3 件次品"这三种情况，故{至少有 1 件次品}包含的基本事件数 $r = C_3^1C_{97}^4 + C_3^2C_{97}^3 + C_3^3C_{97}^2$. 于是所求概率

$$p = \frac{C_3^1C_{97}^4 + C_3^2C_{97}^3 + C_3^3C_{97}^2}{C_{100}^5} \approx 0.144$$

解法二　令 A = {至少有 1 件次品}，A_i = {恰有 i 件次品}$(i = 1,2,3)$，则

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

且 A_1, A_2, A_3 互不相容，由概率的有限可加性，有

$$\begin{aligned} p &= P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \frac{C_3^1C_{97}^4}{C_{100}^5} + \frac{C_3^2C_{97}^3}{C_{100}^5} + \frac{C_3^3C_{97}^2}{C_{100}^5} \approx 0.144 \end{aligned}$$

解法三　令 A = {至少有 1 件次品}，考虑 A 的对立事件 $\bar{A}$ = {没有次品}，因为

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{97}^5}{C_{100}^5} \approx 0.856$$

从而

$$p = P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0.144$$

在本节的最后，简要介绍一下概率的公理化体系. 前面已经提到，概率的前三条性质是概率的基本性质，而其他各条性质均可从这三条基本性质推导出来. 基于这一事实，我们引出概率的公理化体系. 这是一组关于随机事件概率的公理，是得出有关推理的依据.

公理 1　对于任一随机事件 A,有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

公理 2　$P(\Omega)=1,P(\varnothing)=0.$

公理 3　对于两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

定义 1.2.4　设随机试验 E 的样本空间为Ω,对于 Ω 的任一子集A,赋予一实数,记为 $P(A)$.若 $P(A)$满足上述三条公理,则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

这一定义称为概率的公理化定义.概率的公理化定义体现了概率作为事件发生可能性大小的度量的本质属性.

1.3　条件概率和事件的相互独立性

1.3.1　条件概率和乘法公式

在实际问题中,除了要知道事件 A 的概率$P(A)$外,有时还需要知道"在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的概率",这个概率记作 $P(A|B)$.由于增加了新的条件"事件 B 已经发生",所以一般说来,$P(A|B)$与 $P(A)$不同,称$P(A|B)$为条件概率.下面先看一个例子.

例 1.3.1　设箱中有 100 件同型产品,其中 70 件(50 件正品,20 件次品)来自甲厂,30 件(25 件正品,5 件次品)来自乙厂,现从中任取 1 件产品:

(1) 求取得次品的概率;

(2) 求取得甲厂产品的概率;

(3) 已知取得的是甲厂产品,求取得的是次品的概率.

解　记 $A=\{$取得次品$\}$,$B=\{$取得甲厂产品$\}$,$AB=\{$取得次品,且是甲厂的产品$\}$,$A|B=\{$已知取得的是甲厂产品的条件下,取得的是次品$\}$. 对于问题(1),(2),由古典概率计算法显然有

$$P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

$$P(AB) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

而对于问题(3),由于增加了一个条件"已知取得的是甲厂产品",所以该问题实质上就是从甲厂 70 件产品(50 件正品,20 件次品)中任取 1 件,求取得的是次品的概率,从而

$$P(A|B)=\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$$

由此看到

$$P(A) \neq P(A|B)$$

但是,有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

这个公式很重要,虽然是从特殊的例子得到的,但可以证明,这个公式对一般情形也是正确的.因此,可把这个公式作为条件概率的一般定义.

定义 1.3.1 设 A,B 是两个随机事件,且 $P(B)>0$,称

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.3.1}$$

为在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的**条件概率**.

显然,条件概率有如下性质:

(1) $0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$;

(2) $P(A|B)+P(\bar{A}|B)=1$.

条件概率公式揭示了条件概率 $P(A|B)$ 与概率 $P(B)$,$P(AB)$ 三者之间的关系.下面两种情形可用条件概率公式:一种情形是,已知 $P(B)$ 和 $P(AB)$,求 $P(A|B)$;另一种情形是,已知 $P(B)$ 和 $P(A|B)$,求 $P(AB)$.对于后一种情形,为了方便也常将条件概率公式改写为如下形式:

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B) \quad (P(B) > 0) \tag{1.3.2}$$

类似地还可有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) \quad (P(A) > 0) \tag{1.3.3}$$

式(1.3.2),(1.3.3)称为**乘法公式**.

乘法公式还可以推广到 n 个事件的情形:

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB) \qquad (P(AB) > 0) \tag{1.3.4}$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0) \tag{1.3.5}$$

例 1.3.2 一个盒子中有 4 只坏晶体管和 6 只好晶体管,在其中任取两次,每次取一只,第一次取出的不放回,若已经发现第一只是好的,求第二只也是好的概率.

解 设 $A_i=\{第\ i\ 只是好的\}(i=1,2)$,由题意知要求的是 $P(A_2|A_1)$.因为

$$P(A_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P(A_1A_2)=\frac{6\times 5}{10\times 9}=\frac{1}{3}$$

所以