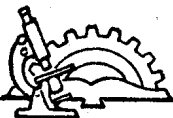


高等学校試用教科書



电工理論基础


DIANGONG LILUN JICHU

第三册

上海交通大学电工原理教研組編

人民教育出版社

高等学校試用教科書



電 工 理 論 基 礎

DIANGONG LILUN JICHU

第 三 冊

· 電 磁 場 理 論

上海交通大學電工原理教研組編

人 民 教 育 出 版 社



本书是上海交通大学电工原理教研组编写的，于1961年3月間經上海交通大学、西安交通大学、南京工学院、清华大学、华中工学院、哈尔滨工业大学、北京邮电学院、西北工业大学等校电工原理教研组的代表略加增删和修改并补写附录后出版。本书编写时曾参考苏联出版的有关教材，特别是 J. P. 聶孟与 II. J. 卡兰塔罗夫合著的“电工学的理論基础”一书。

全书共分三册。第一册为电磁现象的基本規律、直流电路与磁路。包括：靜电場，稳定电流，綫性直流电路，非綫性直流电路，稳定磁場，鉄磁质磁性能，磁路，电现象与磁现象的联系及其统一等内容。

第二册为交流电路理論。包括：正弦电流的基本概念，正弦电流电路，三相正弦电流电路，非正弦周期电流电路，具有集中参数的綫性电路的过渡过程，非綫性交流电路，非綫性电路的过渡过程，具有分布参数的电路的稳态分析，具有分布参数电路的过渡过程及附录（耦合迴路中的諧振现象，传递函数，微分电路和积分电路，反饋，网络綜合的概念，过渡过程在相平面上的映像）。

第三册为电磁場理論。包括：电磁場一般特性，靜电場，稳定电流的电場，稳定磁場，交变电場等內容。

本书可作高等工业学校电机、电力、电訊等专业“电工基础”課程的“湯一路一湯”体系的試用教科书，也可供有关技术人員参考。

簡裝本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少，本书暫以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定价相应減少 20%。希鑒諒。

电 工 理 論 基 础

第 三 册

上海交通大学电工原理教研组編

北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

上海洪兴印刷厂印裝
新华书店上海发行所发行
各地新华书店經售

統一書号 K15010·1046 开本 787×1092 1/32 印張 6 11/16
字数 161,000 印数 14,501—24,500 定价(7) ¥ 0.64
1961年8月第1版 1962年4月上海第3次印刷

目 录

第十七章 电磁場的一般特性	699
17-1 电磁場	699
17-2 梯度、散度和旋度	702
17-3 电磁場基本方程組的微分形式	714
17-4 电磁場的边界条件	716
17-5 电磁場問題解答的唯一性	717
第十八章 靜电場	719
18-1 靜电場的特性	719
18-2 泊松方程的格林解式	721
18-3 靜电場的基本問題	726
18-4 兩維場	729
18-5 兩維場的福里哀解法	750
18-6 三維場	757
18-7 源象法	765
18-8 場的图解計算法	772
18-9 电容的計算	776
第十九章 穩定电流的电場	789
19-1 穩定电流的电磁場的特性	789
19-2 穩定电流的电場	790
19-3 导电物质中电場与靜电場的比拟	793
19-4 接地电阻	795
第二十章 穩定磁場	801
20-1 穩定磁場的特性	801
20-2 磁場的标量位	801
20-3 磁場的矢量位	802
20-4 穩定磁場的基本問題	806
20-5 兩維場	807
20-6 三維場	816
20-7 源象法	822

20-8	磁場的图解計算法.....	827
20-9	电感的計算.....	829
第二十一章 交变电磁場		845
21-1	交变电磁場的特性.....	845
21-2	能量的傳播和烏莫夫—波印廷定理.....	847
21-3	复数形式的电磁場方程組和烏莫夫—波印廷定理.....	852
21-4	唯一性定理.....	855
21-5	电介质中的平面电磁波.....	857
21-6	导电媒质中的平面电磁波.....	863
21-7	圓截面导体的趋肤效应和內阻抗的計算.....	874
21-8	波导和空腔諧振器.....	886
21-9	动态位.....	896
21-10	輻射.....	901

第十七章 电磁場的一般特性

17-1 电磁場

1. 在本課程的第一部分，我們从电現象和磁現象的几个基本实验出发闡明了电磁場的基本理論，并总结出电磁場的完整方程組，就是所謂电磁場的基本方程組或麦克斯韦方程組(1860)，为了以后討論便利起見，将麦克斯韦方程組重行写出如下：

$$(1) \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i,$$

$$\text{式中 } i = \int_s \delta_i ds = \int_s \left(\gamma \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ds。$$

$$(2) \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\text{式中 } \Phi = \int_s \mathbf{B} ds。$$

$$(3) \oint \mathbf{B} ds = 0。$$

$$(4) \oint \mathbf{D} ds = q,$$

$$\text{式中 } q = \int_V \rho dV。$$

(17-1)

还有必要，将麦克斯韦方程組中各方程的物理意义，再来叙述一次。方程(1)是說磁場不仅由带电粒子的运动(包括傳导电流、徙动电流及因极化所引起束縛电荷运动的一部分位移电流)伴生，而且也由电場随時間变动(真空中的位移电流)而伴生。方程(2)是說电場不仅由带电粒子伴生，而且也由磁場随時間变动而伴生。

由此看出,一个变动的电場总是伴着一个磁場,一个变动的磁場总是伴着一个电場,这表明了电磁場中电現象和磁現象之間存在着紧密的連系而这种連系就确定了統一的电磁場。方程(3)和方程(4)是說 B 綫是无源的而 D 綫是有源的。这四个方程是各自独立的。

电磁場基本方程組中矢量的值是由媒质的性能方程連系起来:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad D = \varepsilon E, \\ 2) \quad B = \mu H, \\ 3) \quad \delta = \begin{cases} \gamma E \\ \rho v \end{cases} \end{array} \right\} \quad (17-2)$$

方程組(17-2)叫做电磁場的輔助方程組。

應該注意:上述的表征統一电磁場內容的方程組是在下面几个假定条件之下确立起来的。这些假定条件是:第一,它們所表达的电磁現象是宏觀的而不是微觀的;第二,处在場內的物体都是靜止的;第三,在場內每一点上表征媒质特性的参数 ε , μ 和 γ 都是不随時間变动并且和場的强度无关的恒定值,但可能在空間两种不同媒质的交界面上发生突变;第四,在場內沒有鉄电物质、鉄磁物质以及各向异性的媒质存在。两个方程組中各量,一般地說,都是空間坐标和時間的函数,也就是說,它們所表达的都是即時关系。靜电場和恒定电流的电磁場都是一般电磁場的特殊情况。

2. 电磁場是一定能量的携帶者。任何时刻在电磁場里某一固定曲面所包圍的空間 V 內儲存的电能量和磁能量为

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \mathbf{H} dV. \quad (17-3)$$

在空間 V 內热損失(功率)

$$p = \int_V \frac{\delta^2}{\gamma} dV. \quad (17-4)$$

在空間 V 内外来电源供給的功率

$$p_t = \int_V \delta E_t dV. \quad (17-5)$$

我們將在第二十一章里根据能量守恒定律来研究交变电磁場内能量的平衡問題，那时将看到电磁場能把能量傳播到很远的地方去。

3. 在闡述电磁場的基本理論的第一部分中，虽然曾經就某些問題进行了电磁現象的分析，但都是很初步的。現在將在已有的基础上深入研究电磁場的理論和它的計算方法，这不仅对于近代电工装置中电磁現象的全面了解是必要的，而且对于电工技术的改进和在电工方面进行科学研究都具有极其重大的意义。

某些电磁場問題在特定的条件下，虽然可以略去一些比較不重要的現象而把它們看成电路或磁路問題应用路的理論来計算，但是这些問題中电阻、电感、电容、磁阻等电路参数的計算以及对于所进行着的物理过程的全面了解；特别是在那些与路的条件不符的时候，仍須研究表征电磁現象的电磁場。

麦克斯韦方程組，有着比較丰富的內容，它不仅概括了电磁現象方面已經发现的一些定律，而且还可以通过一系列的邏輯推論来导出为实践所証实的新的結果，譬如說麦克斯韦在研究这組方程以后便推出以光速傳播的电磁波 (1864)，这个理論上的預測后来果然被赫芝用实验証实了 (1888)。再后，波波夫将这电磁波应用到实用方面 (1895)，就是大家所熟知的无线电报，这一发明奠定了无线电技术的基础。

由此可見，麦克斯韦方程組是經典电动力学的公理正如牛頓定律是經典力学的公理相似。在力学中如果知道一个质点在某一时刻的位置和速度及作用于它的力，便可根据牛頓定律預言这质点的未来的路徑。在电动力学中如果知道电磁場在某一时刻的情

况,便可根据麦克斯韦方程組,推理整个电磁場在空間和时间中的运动。所以我們今后研究电磁場是由麦克斯韦方程組出发,而把它应用到个别問題上去,从而揭示它所蘊藏的内容,这和本課程第一部分中的研究方向相反,在那里是把研究个别問題所得的結果归結到一个簡單而完整的表征电磁場特性的麦克斯韦方程組。麦克斯韦方程組,确有它的丰富和深奥的内容,但是随着社会生产的发展和人类文明的进步,麦克斯韦方程組逐漸显示了它的局限性,所以,它的内容只有用辯証唯物主义的观点和方法来仔細研究,并加以批判的继承,才可能正确地揭示出来。

17-2 梯度、散度和旋度

1. 我們研究电磁場是要在場内每一点上决定出表征这电磁場特性的各量。在决定这些量的时候,除非在特殊的情况下,应用积分形式的麦克斯韦方程組(17-1)来研究电磁場問題可能較为便利,但是一般說来,應該从它的微分形式着手。积分形式的麦克斯韦方程組应用定积分的变换便写成微分形式。因此,讓我們先行扼要地把这种变换,特别是梯度、散度和旋度的意义,先来作一个一般的說明。

随空間一点的位置而改变的函数叫做点函数。点函数有标量点函数和矢量点函数之分,例如电位是标量点函数,电場强度是矢量点函数。点函数無論是标量的或是矢量的,它的量和計算时所用的坐标制无关,只是它的表达形式随坐标制不同而异。

在 § 1-2 中我們已經知道怎样求出标量点函数的梯度及以梯度的意义,在直角坐标之下,标量点函数 $U(x, y, z)$ 的梯度

$$\text{grad } U \text{ 或 } \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (17-6)$$

它的量值

$$|\nabla U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2},$$

而它的方向是和 $U(x, y, z) = \text{定值}$ 的等位面垂直并指向 U 值增加的方向。标量点函数 U 的梯度 ∇U 是一个矢量点函数。

矢量点函数 ∇U , 就是 U 的梯度, 在它所存在的区域内, A 和 B 两点間沿任何路徑的綫积分

$$\int_A^B \nabla U \cdot d\mathbf{l} = U(B) - U(A), \quad (17-7)$$

就是說, 由函数 U 在积分路徑的界点 (A 和 B) 上的值来决定。

2. 我們已經知道物体的密度 ρ_M 和质量 M 的概念:

$$\rho_M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}$$

和
$$M = \int_V \rho_M dV,$$

在这里我們應該注意到当质量这一概念过渡到物体內一点上, 就得换用密度这一概念来代替, 因为这时 ΔM 和 ΔV 都趋近于零, 可是它們的比率却趋于一有限值 ρ_M (讀者对梯度試作相似的說明)。現在用相似的方法來說明矢量点函数 \mathbf{A} 的散度和旋度。

在矢量 \mathbf{A} 所存在的空間內或简单地說在矢量 \mathbf{A} 的場內通过閉合面 s 的通量。

$$\Psi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

如果在場內一点上要研究与这通量相关的特性时, 显然要把包圍这一点的閉合面尽量取小, 因而通过它的通量将趋近于零。同时閉合面所包圍的体积也趋近于零, 可是通量和体积的比率却趋于一有限值。因此矢量 \mathbf{A} 沿閉合面的通量这一特性就可以过渡到一点上用上述比率的极限来表征, 此极限为矢量 \mathbf{A} 的散度。用式表示: 矢量 \mathbf{A} 的散度

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} ds}{\Delta V}, \quad (17-8)$$

式中 $\oint \mathbf{A} ds$ 是通过包围体积 ΔV 的闭合面的通量。这样, 通过包围体积 dV 的闭合面的通量将是 $\operatorname{div} \mathbf{A} dV$, 通过闭合面 s 而体积是 V 的通量

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_s \mathbf{A} ds, \quad (17-9)$$

因为两个相邻的体积元的分界面上的通量对一个体积元是正值而对另一个体积元是负值, 因此计算时抵消了。变换公式(17-9)叫做奥斯特洛格拉茨基—高斯定理(简称奥高定理), 这定理表明: 在矢量场 \mathbf{A} 内, 散度的体积分等于通过体积界面的通量。这和交换公式(17-7)相对应(体积和积分路径对应, 界面和界点对应)。

注意, $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 是一标量点函

数。

由给定的矢量点函数 \mathbf{A} 可以根据散度定义[公式(17-8)]来求 \mathbf{A} 的散度。在直角坐标制, 计算散度的一般公式可以导出如下: 图 17-1 示出 \mathbf{A} 场内中心在 p 点的一个很小的平行六面体, 它的边是 Δx , Δy 和 Δz , 各和坐标轴

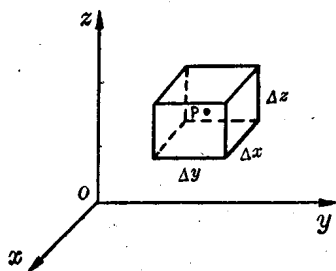


图 17-1. 散度的计算。

平行。 p 点的坐标是 (x, y, z) , 这一点上的散度是我们要求来决定的。

根据数学上中值定理, 穿出前边一面的通量

$$\int \mathbf{A} ds = \int A_x ds = A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, \xi, \eta \right) \Delta y \Delta z,$$

式中 $\left(x + \frac{\Delta x}{2}, \xi, \eta \right)$ 是这矩形面内某点。相似地, 穿出后边一面的

通量

$$\int \mathbf{A} ds = \int -A_x ds = -A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, \xi', \eta' \right) \Delta y \Delta z.$$

穿出左右两面及上下两面的通量可以用同样方法写出。平行六面体的体积 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ 。

根据散度的定义,或(17-8)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{A} ds}{\Delta V} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\left\{ A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, \xi, \eta \right) - A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, \xi', \eta' \right) \right\} \Delta y \Delta z + \\ &\quad + \{ \dots \} \Delta z \Delta x + \{ \dots \} \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z}, \end{aligned}$$

式中第一项

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, \xi, \eta \right) - A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, \xi', \eta' \right)}{\Delta x} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} A_x(x, y, z), \end{aligned}$$

第二项和第三项很容易看出是 $\frac{\partial}{\partial y} A_y(x, y, z)$ 和 $\frac{\partial}{\partial z} A_z(x, y, z)$ 。

这样一来,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (17-10)$$

我們知道在直角坐标下那不拉(nabla)算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

于是

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (17-11)$$

由此可见,取矢量点函数 A 的散度等于用算子 ∇ 对 A 运算,这一运算具有检源的作用。就是说,如果在某点上 $\text{div } A = 0$,则在这一点上 A 线是连续的;如果 $\text{div } A \neq 0$ 则在这一点上有 A 线的源存在。当 $\text{div } A > 0$ 时表示有正源存在,而当 $\text{div } A < 0$ 时则表示有负源存在(这时负的散度实际已是聚度)将在 § 17-3 中看到电场具有这样的特性,如果一个矢量场,它的散度到处等于零,这种场叫做无源场,也将看到磁感应 B 场就具有这样的特性。

3. 在矢量 A 的场内沿闭合路径 l 的环量

$$W = \oint A dl,$$

一般地说,随闭合路径不同而不同。如果在场内含着 p 点的一个面元 Δs (平面面元)上沿它的周界取环量,这环量随着 Δs 趋于零而趋于零,但是这环量和 Δs 的比率却趋于一有限值,并且这极限随 Δs 的方向不同而有不同的值,将要证明,有一个 Δs 的方向,上述比率的极限值最大,并且在面元取其他方向时,相应的比率极限值等于最大极限值乘以这时面元法线和最大值时面元法线所成夹角的余弦。

因此矢量 A 沿闭合路径且随路径而异的环量这一特性就可以过渡到一点上用—个叫做旋度的矢量来表征。矢量的旋度,用 $\text{rot } A$ 表示,它的量值就是上述比率极限值中最大值,它的方向就是相应的面元方向,和路径上循行方向构成右手螺旋关系。

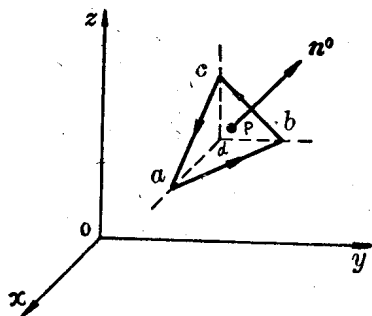


图 17-2. 旋度的矢量特性的表明。

图 17-2 中示出 A 场内经过 P 点的任一面元 Δs (三角形面 abc), 它的周界是 l , 用 R_l 表示

沿閉合路徑 l 的環量和面元的面积 Δs 的比率的極限值就是

$$R_l = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} dl}{\Delta s}. \quad (17-12)$$

从图中可以看出

$$\oint_l \mathbf{A} dl = \oint_{l_1} \mathbf{A} dl + \oint_{l_2} \mathbf{A} dl + \oint_{l_3} \mathbf{A} dl, \quad (17-13)$$

式中 l_1 , l_2 和 l_3 分别是面 Δs_x (面 bcd), Δs_y (面 adc) 和 Δs_z (面 abd) 的周界, 这是因为它们的公共边界上 (ad , bd 和 cd) 的綫积分都抵消掉的緣故, 令面元 Δs 的方向由单位矢量 \mathbf{n}° 来表示, 单位矢量 \mathbf{n}° 的方向角是 α , β 和 γ , 这样, 就有

$$\mathbf{n}^\circ = (\cos \alpha) \mathbf{i} + (\cos \beta) \mathbf{j} + (\cos \gamma) \mathbf{k}, \quad (17-14)$$

$$\Delta s = \frac{\Delta s_x}{\cos \alpha} = \frac{\Delta s_y}{\cos \beta} = \frac{\Delta s_z}{\cos \gamma}. \quad (17-15)$$

由式(17-12), (17-13), (17-14)和(17-15)便可写出:

$$\begin{aligned} R_l &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} dl}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_1} \mathbf{A} dl}{\Delta s_x} \cos \alpha + \lim_{\Delta s_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_2} \mathbf{A} dl}{\Delta s_y} \cos \beta + \lim_{\Delta s_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_3} \mathbf{A} dl}{\Delta s_z} \cos \gamma = \\ &= R_{l_1} \cos \alpha + R_{l_2} \cos \beta + R_{l_3} \cos \gamma = \\ &= (R_{l_1} \mathbf{i} + R_{l_2} \mathbf{j} + R_{l_3} \mathbf{k}) [(\cos \alpha) \mathbf{i} + (\cos \beta) \mathbf{j} + (\cos \gamma) \mathbf{k}] = \\ &= (R_{l_1} \mathbf{i} + R_{l_2} \mathbf{j} + R_{l_3} \mathbf{k}) \mathbf{n}^\circ, \end{aligned} \quad (17-16)$$

就是 R_l 是矢量 $R_{l_1} \mathbf{i} + R_{l_2} \mathbf{j} + R_{l_3} \mathbf{k}$ 在单位矢量 \mathbf{n}° 所示的方向上的射影, 这也就是我們所要証明的。这矢量就是 \mathbf{A} 的旋度。用式表示:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{\Delta s_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_1} \mathbf{A} dl}{\Delta s_x} \mathbf{i} + \lim_{\Delta s_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_2} \mathbf{A} dl}{\Delta s_y} \mathbf{j} + \lim_{\Delta s_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_3} \mathbf{A} dl}{\Delta s_z} \mathbf{k}, \quad (17-17)$$

也就是 $\text{rot } \mathbf{A}$ 在直角坐标制的 x 分量, y 分量和 z 分量是:

$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \lim_{\Delta s_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_x} \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta s_x},$$

$$\text{rot}_y \mathbf{A} = \lim_{\Delta s_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_y} \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta s_y},$$

$$\text{rot}_z \mathbf{A} = \lim_{\Delta s_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_z} \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta s_z}.$$

这样, 沿面元 ds 的周界的环量 $\text{rot } \mathbf{A} \cdot ds$, 沿一个曲面 s 的界綫(周界) l 的环量

$$\int_s \text{rot } \mathbf{A} ds = \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (17-18)$$

因为, 两个相邻的面元公共界綫上的綫积分量相互抵消的, 变换公式(17-18)叫做斯托克斯定理。这定理表明: 在矢量場 \mathbf{A} 内, 旋度的面积分等于沿这面的界綫的环量。这和变换公式(17-7)及(17-9)相对应。

特再指出, $\text{rot } \mathbf{A}$ 是一矢量点函数。

由給定的矢量点函数 \mathbf{A} 可以根据旋度的定义, 即公式(17-17), 来求 \mathbf{A} 的旋度。现在将直角坐标制中计算旋度的一般公式导出如下: 图 17-3 示出 \mathbf{A} 場内所取中心在 p 点而和 x 軸垂直的一个很小的矩形面 Δs_x , 它的边是 Δy 和 Δz , 各和坐标軸平行。 p 点的坐标是 (x, y, z) , 这一点上的旋度是我們要来决定的。

根据中值定理

$$\int_{ab} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} A_z \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) dz = A_z \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, \xi \right) \Delta z,$$

式中 $\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, \xi \right)$ 是 ab 上的某点, 相似地,

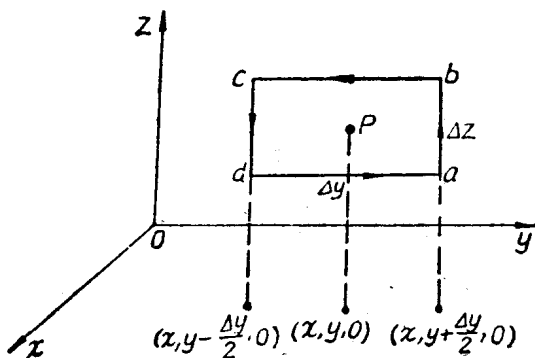


图 17-3. 旋度的计算。

$$\int_{bc} \mathbf{A} d\mathbf{l} = -A_y \left(x, \eta, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y,$$

$$\int_{cd} \mathbf{A} d\mathbf{l} = -A_z \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, \xi' \right) \Delta z,$$

$$\int_{da} \mathbf{A} d\mathbf{l} = A_y \left(x, \eta', z - \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y,$$

式中 $(x, \eta, z + \frac{\Delta z}{2})$, $(x, y - \frac{\Delta y}{2}, \xi')$ 和 $(x, \eta', z - \frac{\Delta z}{2})$ 是 bc , cd 和 da 上的某点。矩形面的面积 $\Delta s_x = \Delta y \cdot \Delta z$ 。

根据定义,式(17-17), $\text{rot } \mathbf{A}$ 的 x 分量

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{A} &= \lim_{\Delta s_x \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta s_x} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\left\{ A_z \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, \xi \right) - A_z \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, \xi' \right) \right\} \Delta z}{\Delta y \Delta z} - \\ &\quad - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\left\{ A_y \left(x, \eta, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - A_y \left(x, \eta', z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right\} \Delta y}{\Delta y \Delta z} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{A_z\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - A_z\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A_y\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - A_y\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} A_z(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} A_y(x, y, z),
 \end{aligned}$$

或

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

同样可得

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

这样以来,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \quad (17-19)
 \end{aligned}$$

和

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}]. \quad (17-20)$$

由此可见, 取矢量点函数 \mathbf{A} 的旋度等于用算子 ∇ 对 \mathbf{A} 矢乘。这一运算具有检旋(检验涡旋)的作用。就是说, 如果在某点上 $\operatorname{rot} \mathbf{A} \neq 0$, 则这点上存在着涡旋密度, 如果在某点上 $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ 则该点上不存在涡旋密度。我们将在 § 17-3 中看到磁场内 $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$ 的点上必然有电流密度 δ 存在, 这时电流密度就是这种涡旋密度之一。如果一个矢量场, 它们的旋度到处等于零, 这种矢量场叫做