

复合材料

及其结构的力学进展

第四册

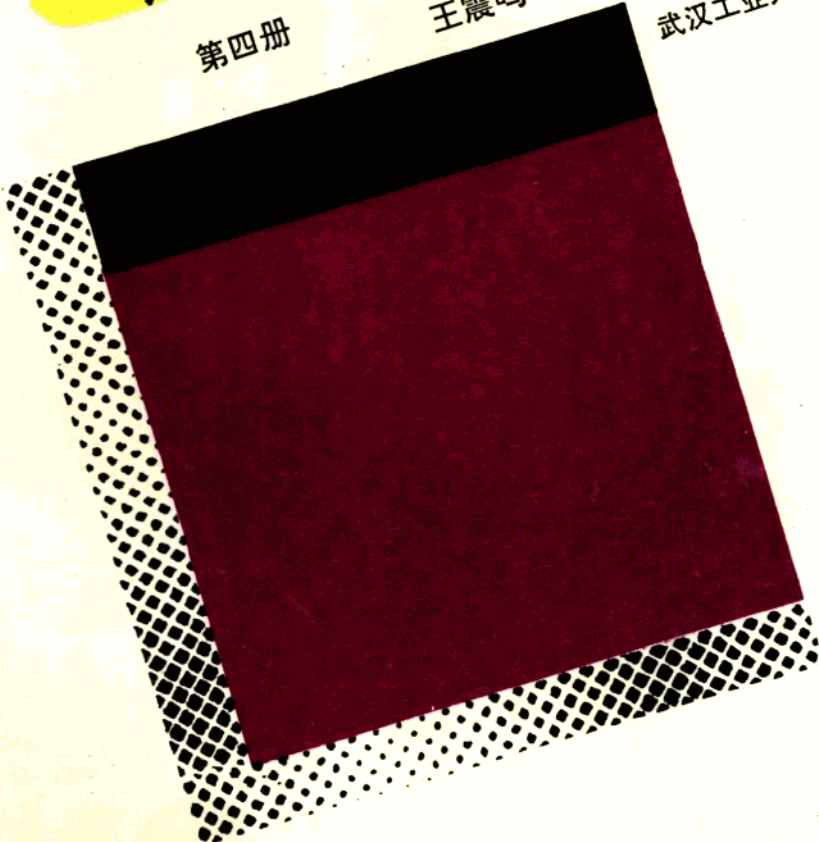
王震鸣

吴代华

范赋群

主编

武汉工业大学出版社



3

88

F H C L J Q J G D L X J Z

# 《复合材料及其结构的力学进展》(第四册)

## 编辑委员会

主任委员 王震鸣

副主任委员 范赋群 吴代华 张志新

编委 (按姓氏笔划为序)

丁惠梁 冯广占 刘方龙 许陆文

朱梅庄 张恒 沈大荣 李顺林

李思简 张继栋 杜善义 杨桂

周履 洗杏娟 段祝平 黄小清

黄茂光 嵇醒 韩杰才 童贤鑫

蒋咏秋

## 前 言

《复合材料及其结构的力学进展》已出版了四册论文集,再加上《复合材料力学进展》论文集,这五册论文集共有78章,讨论了约70个专题,涉及的内容已非常广泛。这些专题由数十位在中国复合材料力学界和航空航天部门比较著名的正、副教授级(包括研究员和高级工程师)的专家、学者撰写稿件,具有高度的学术水平、较大的理论价值和实用价值,值得参考。其中,《复合材料及其结构的力学进展》第一、二册,没有公开发行,第三、四册已由武汉工业大学出版社公开发行;《复合材料力学进展》已由北京大学出版社公开发行。以上五册论文集,如有需要购买者,可与王震鸣主编联系(100086,北京中关村937楼202号,家中电话2568272)。

在《复合材料及其结构的力学进展》第四册出版以后,决定出版《复合材料及其结构的力学、设计、应用和评价》论文集。这是因为《复合材料及其结构的力学进展》主要涉及力学方面,范围较窄,况且已经写了约70个专题,若近期出版第五册,主题和内容就难免重复了,实际上,在上述五册论文集中,已有若干篇关于复合材料及其结构的设计、应用和评价方面的论文,所以出版《复合材料及其结构的力学、设计、应用和评价》论文集,是有其原因的,也是客观形势的需要。

《复合材料及其结构的力学、设计、应用和评价》论文集的约稿范围就广泛得多了。其中的力学可以认为是《复合材料及其结构的力学进展》的继续,也可包括范围更广的复合材料及其结构的力学,不限于“力学进展”。此外,论文集的稿件范围还包括树脂基、金属基和陶瓷基复合材料及其制造工艺,可包括碳/碳复合材料和水泥基复合材料及其制造工艺;包括结构复合材料和功能复合材料;包括先进复合材料和工程复合材料;包括航空和航天结构,桥梁和高层建筑,军用和民用产品;包括复合材料的微观力学、宏观力学和结构力学;包括复合材料的工艺力学、界面力学、计算力学、实验力学、本构关系和强度理论;包括设计优化和可靠性分析;包括线性力学和非线性力学;包括复合材料的各种板壳理论以及弯曲、稳定、应力分析和振动问题;包括断裂、疲劳、蠕变和冲击问题;包括复合材料及其结构的各种性能试验和无损检测;包括生物复合材料及其应用;包括复合材料在车辆和船舶上的设计和应用;包括各种复合材料(先进复合材料和工程复合材料,结构复合材料与功能复合材料等)及其结构、产品的设计、应用和评价等。范围是很广的,与《复合材料及其结构的力学进展》和《复合材料力学进展》相比,范围是大大地扩大了。稿件可以是总结性、评述性的论文,可以是分析计算或(和)实验(试验)研究方面的论文,可以是结构和产品的设计、应用和评价方面的论文,也可兼而有之。论文的篇幅为1.5—2.0万字。约稿对象限于具有博士学位者和具有正、副高级职称者,对第一作者的职称和学术水平有较高的要求。要求论文稿件具有我国现实高水平的学术质量或(和)较大的应用价值,有助于我国复合材料事业的发展 and 将科技转化为生产力。与此同时,要求论文具有尽可能高的理论水平与应用价值,理论水平与应用价值应该兼顾,不能偏废。所以,对稿件的要求是相当严格的。现在要出版高水平的科学技术论著,非常困难。它有较强的文学篇幅,就难以全面、系统和深入地表达这重要而又有创造性的科研成果。这个出版物可以提供这种条件。

本出版物需要收取版面费并给予稿酬。有愿意接受约稿者,可与主编王震鸣研究员联系。

《复合材料及其结构的力学进展》一至四册能够出版,是和中国力学学会办公室的支持和帮助分不开的,是和中国复合材料力学界和航空、航天部门的设计所和强度所的许多同志的支持和帮助分不开的,是和华南理工大学与武汉工业大学的经费资助以及这两所大学的出版社的支持分不开的,是和论文作者的努力与支持分不开的。在此,我代表担任过主编的周履、范赋群、吴代华教授和我自己向他们致以诚挚的谢意。虽然,总的说来成绩是主要的,但其中还存在缺点和错误,欢迎广大读者批评指正,并在以后出版的论文集中加以改进。

王震鸣

1993年10月20日

# 目 录

<b>第一章 复合材料齿轮粘弹性力学问题的研究</b> .....张 恒 王震鸣 ( 1 )	
第一节 引言..... ( 1 )	
第二节 齿轮复合材料的粘弹性..... ( 2 )	
第三节 复合材料齿轮的温度场分析..... ( 4 )	
第四节 复合材料齿轮的粘弹性应力分析..... ( 9 )	
参考文献..... ( 17 )	
<b>第二章 陶瓷基复合材料性能的细观力学研究</b> .....杜善义 李文芳 ( 18 )	
第一节 引言..... ( 18 )	
第二节 陶瓷基复合材料增韧的研究进展..... ( 19 )	
第三节 研究含随机分布微裂纹非均匀体有效性能的一个新模型..... ( 22 )	
第四节 随机分布微裂纹对相变陶瓷力学性能的影响..... ( 24 )	
第五节 随机分布微裂纹对晶须增韧 CMC 材料性能的影响..... ( 27 )	
第六节 随机分布微裂纹对延性相增韧 CMC 材料力学性能的影响..... ( 30 )	
参考文献..... ( 34 )	
<b>第三章 动态松弛法及其在复合材料叠层板壳非线性分析中的应用</b> ..... .....黄小清 范赋群 ( 36 )	
第一节 引言..... ( 36 )	
第二节 动态松弛法的基本原理..... ( 36 )	
第三节 求解叠层板及叠层扁壳的经典非线性弯曲问题..... ( 38 )	
第四节 求解双模量复合材料叠层板的非线性弯曲问题..... ( 41 )	
第五节 求解复合材料叠层平板与圆柱微曲板的非线性稳定问题..... ( 44 )	
第六节 对叠层板的线性和非线性初始破坏分析..... ( 45 )	
第七节 结束语..... ( 47 )	
参考文献..... ( 47 )	
<b>第四章 单向复合材料损伤本构模型的细观分析</b> .....夏源明 袁建明 杨振昌 ( 49 )	
第一节 引言..... ( 49 )	
第二节 单向复合材料的一维损伤本构模型..... ( 50 )	
第三节 单向复合材料的 Monte Carlo 数值模拟..... ( 56 )	
第四节 单向复合材料冲击拉伸过程的 Monte Carlo 数值模拟..... ( 65 )	
第五节 结束语..... ( 69 )	
参考文献..... ( 70 )	
<b>第五章 短纤维复合材料的弹性与弹塑性行为的理论研究</b> .....陈浩然 杨庆生 ( 71 )	
第一节 引言..... ( 71 )	
第二节 短纤维复合材料的特点..... ( 71 )	

第三节	短纤维复合材料的弹性性能	( 72 )
第四节	短纤维复合材料的弹塑性性能	( 76 )
第五节	结束语	( 82 )
	参考文献	( 82 )
<b>第六章</b>	<b>复合材料中的应力波</b>	张继栋 ( 84 )
第一节	引言	( 84 )
第二节	层状无限介质中的波	( 84 )
第三节	均匀各向异性板中的波	( 86 )
第四节	各向异性层合板中的波与弹性力学方法	( 89 )
第五节	各向异性层板中的波与近似方法	( 92 )
第六节	复合材料中应力波的细观力学分析	( 94 )
第七节	应力波的实验研究	( 96 )
	参考文献	( 98 )
<b>第七章</b>	<b>半解析数值法在复合材料及其结构力学问题中的应用</b>	
	洪志泉 方赤峰	( 101 )
第一节	引言	( 101 )
第二节	半解析数值法的概述	( 101 )
第三节	半解析数值法的应用	( 107 )
第四节	结束语	( 113 )
	参考文献	( 113 )
<b>第八章</b>	<b>复合材料界面和界面力学的几个问题</b>	伍章健 余寿文 ( 116 )
第一节	引言	( 116 )
第二节	界面研究的几个基本问题	( 116 )
第三节	复合材料界面的细观力学研究方法	( 119 )
第四节	界面相与复合材料桥联协同作用的机理	( 121 )
第五节	界面断裂力学	( 125 )
第六节	复合材料界面力学的实验	( 128 )
第七节	结论和展望	( 130 )
	参考文献	( 130 )
<b>第九章</b>	<b>超高模聚乙烯纤维增强复合材料的力学性能和微观结构</b>	冼杏娟 ( 133 )
第一节	引言	( 133 )
第二节	纵向的比拉伸强度和比刚度高	( 133 )
第三节	优越的能量吸收性能	( 134 )
第四节	界面粘结对UHMPE纤维复合材料力学性能的影响	( 136 )
第五节	UHMPE纤维与其他高性能纤维混杂时的混杂效应	( 137 )
第六节	UHMPE纤维编织复合材料的力学性能	( 139 )
第七节	UHMPE纤维增强复合材料的动态力学性能	( 139 )
第八节	加工方法对UHMPE纤维复合材料试件力学性能的影响	( 141 )
第九节	UHMPE纤维及其复合材料的其他性能	( 143 )

第十节 结束语	(144)
参考文献	(144)
<b>第十章 机敏材料和机敏结构的研究进展</b>	孙国钧 茅人杰 (145)
第一节 引言	(145)
第二节 机敏材料在主动振动控制技术中的应用前景	(147)
第三节 光纤在机敏结构中的应用	(149)
第四节 电流变体在机敏结构中的应用	(150)
第五节 形状记忆合金增强复合材料	(151)
第六节 压电材料在机敏结构中的应用	(154)
第七节 结束语	(156)
参考文献	(156)
<b>第十一章 复合材料离散加筋曲板在面内载荷作用下用于屈曲分析的有限条法</b>	章贤鑫 B·盖尔 (160)
第一节 引言	(160)
第二节 典型的复合材料曲板条元素的分析	(160)
第三节 结构屈曲判别式的建立	(175)
第四节 解法, 算例和计算结果	(177)
第五节 小结	(179)
参考文献	(180)
附录	(180)
<b>第十二章 在湿热环境下碳纤维/树脂复合材料结构强度的研究</b>	俞树奎 和润志 郑锡涛 (182)
第一节 引言	(182)
第二节 飞机复合材料结构的湿热环境设计准则	(182)
第三节 复合材料的吸湿规律和预浸润技术	(186)
第四节 湿热环境对复合材料力学性能的影响	(192)
第五节 在湿热环境下复合材料机械连接件的强度与寿命	(194)
第六节 复合材料结构的湿热环境试验系统	(197)
第七节 在湿热/温载谱作用下结构强度和耐久性的试验验证	(200)
第八节 结束语	(204)
参考文献	(204)
<b>第十三章 纤维增强复合材料中的桥连裂纹</b>	罗海安 (205)
第一节 引言	(205)
第二节 桥连裂纹的理论模型	(206)
第三节 桥连裂纹的稳定性	(209)
第四节 桥连裂纹的临界载荷	(212)
参考文献	(215)
<b>第十四章 复合材料层板的强迫振动问题</b>	沈大荣 李 华 (216)
第一节 引言	(216)

第二节	几类典型铺设层板线性强迫振动方程的推导	(216)
第三节	几类典型铺设层板线性强迫振动问题的数值计算	(218)
第四节	几类典型铺设层板的非线性强迫振动分析	(224)
第五节	几类典型铺设层板非线性强迫振动问题的数值计算	(226)
第六节	讨论和结论	(230)
	参考文献	(232)
<b>第十五章</b>	<b>复合材料机翼在气动弹性和强度约束下的设计剪裁研究</b> .....丁惠梁	(234)
第一节	引言	(234)
第二节	COMPASS 系统的结构配置	(234)
第三节	结构分析与灵敏度分析	(235)
第四节	优化剪裁技术	(237)
第五节	实例应用	(239)
第六节	结束语	(245)
	参考文献	(245)
<b>第十六章</b>	<b>复合材料梁的强度、冲击和疲劳性能的研究</b> .....	
	.....薛元德 陈心爽 刘壮健	(246)
第一节	引言	(246)
第二节	损伤和破坏机制	(246)
第三节	复合材料梁的强度	(247)
第四节	冲击性能	(252)
第五节	疲劳	(255)
	参考文献	(260)
<b>第十七章</b>	<b>金属-陶瓷梯度材料的优化设计</b> .....王继辉 张清杰 吴代华	(261)
第一节	引言	(261)
第二节	梯度材料的微观结构特征	(262)
第三节	梯度材料的微观力学和性能预测	(264)
第四节	热应力分析和设计模型	(265)
第五节	热应力分析结果与讨论	(267)
第六节	结论	(270)
	参考文献	(270)



# 第一章 复合材料齿轮粘弹性力学问题的研究

张 恒

王震鸣

(洛阳工学院, 471039)

(中国科学院力学研究所, 100080)

## 第一节 引 言

齿轮传动技术的发展与其所用材料的发展是密切相关的。最早的齿轮应用可追溯到公元前1世纪罗马建筑师维特鲁维亚斯在他的著作中所记载的水力磨粉机。中国历史上著名的记程车和指南车发明于公元1世纪到2世纪,其动力传动也采用了齿轮机构。可以确认,上述齿轮都是木制的。其后,齿轮材料经历了铜、铸铁及今天广泛使用的各种钢材,并有渗碳淬火、火焰淬火、高频淬火、氮化、喷丸硬化、氰化及软氮化等一系列齿面硬化技术。自从1935年研制成功尼龙纤维以来,高分子合成材料工业迅速发展,聚合物作为一种新型的齿轮材料已得到了广泛的应用。与金属齿轮相比,聚合物齿轮的加工经济效益好、生产效率高、成本低。同时,传动平稳、减振、降噪、自润滑、耐磨及重量轻也是聚合物齿轮重要的优点。但是,聚合物的致命弱点如强度低、导热性差、热变形大及易受温度、湿度和加载方式的影响等,限制了聚合物齿轮的应用和发展。目前,此类齿轮主要应用于纺织工业、食品工业、家电和仪器仪表等有自润滑、耐腐蚀要求及轻载传动的场合。近20年来,高性能复合材料及其制造工艺得到了迅速的发展。复合材料的突出优点是比强度高、比刚度大及性能的可设计性。由于成本方面的问题,复合材料主要应用于航天、航空和军事工业。随着科学技术的不断发展,复合材料生产自动化程度的不断提高,以及作为复合材料重要原材料的碳纤维其成本不断降低,复合材料制品的成本已经大幅度下降。目前,复合材料的应用已迅速扩展到造船、汽车制造、机床、化工机械及机器人等民用工业领域。毫无例外,在齿轮制造行业,复合材料的应用也越来越广泛。

实际上,早在上个世纪初出现的所谓“无声小齿轮”就是一种复合材料齿轮。它是用牛皮纤维制成的,与金属齿轮啮合时可以作“无声”传动,因其具有很高的抗冲击性能而著名。由于天然牛皮易吸湿膨胀、变软,加之承载能力有限,牛皮小齿轮并没有得到广泛的应用。近年来,用碳纤维、玻璃纤维以及棉纤维增强聚合物复合材料制成的齿轮已进入了工业应用的阶段。此类复合材料齿轮不仅具有聚合物齿轮的减振、降噪、耐腐蚀、耐磨和自润滑等一系列优点,而且具有金属齿轮的承载能力高、传递功率大等优点。目前,复合材料齿轮已广泛应用于纺织机械、化工机械、泵、造纸机械、印刷机械、机械工具、压缩机、运输机械、牛奶场设备、研磨设备及洗衣房设备等领域。

和金属齿轮相比,复合材料齿轮的失效形式有其独特之处。主要失效形式可分为断

齿、磨损、点蚀及烧伤等等。由于纤维的存在，齿轮复合材料呈现各向异性。由于基体为聚合物，而大多数聚合物具有粘弹性变形特性，齿轮复合材料具有显著的粘弹性，其动态粘弹性性能对齿轮的工作有重要的影响。上述情况使得传统的金属齿轮的设计计算方法不能原封不动地搬过来处理复合材料齿轮。随着复合材料齿轮的应用逐渐广泛，建立一套适用于复合材料齿轮的设计计算方法及实验资料数据库，已成为工程实践的迫切需要。目前，国内外对复合材料齿轮的研究工作主要集中在承载能力、轮齿温度、摩擦磨损性能、动态粘弹性性能及制造工艺诸方面。本章侧重于复合材料齿轮静、动态力学性能问题的分析和研究，建立热-粘弹性变形的数值计算方法，为高性能复合材料齿轮的材料设计、结构设计和工艺设计提供可靠的理论基础。

## 第二节 齿轮复合材料的粘弹性

实验结果表明，绝大多数聚合物材料具有粘弹性。目前齿轮用复合材料的基体材料主要有尼龙、聚甲醛、聚四氟乙烯、聚碳酸酯、聚氨酯、酚醛树脂和环氧树脂等聚合物，它们都具有粘弹性。因此，齿轮用复合材料也具有较明显的粘弹性。特别是在轮齿啮合过程中，随着摩擦热和内耗热的逐渐产生，引起轮齿温度的逐渐升高，轮齿的粘弹性变形十分显著，它对轮齿的抗冲击、抗疲劳、减振及降噪性能都有重要的影响。颗粒增强聚合物复合材料(如MC尼龙齿轮、高密度聚乙烯齿轮等)可看作各向同性粘弹性材料，纤维增强聚合物复合材料则视为各向异性粘弹性材料。实验表明，目前常用的齿轮复合材料皆可近似地看作为线性粘弹性材料。

### 一、粘弹性本构方程

由弹簧和阻尼器可以组成多种粘弹性力学模型，如 Maxwell 模型、Voigt 模型及三元件模型等等。其中三元件模型比较适用于聚合物及颗粒增强聚合物复合材料，它给出的微分型本构关系为

$$\frac{E_2 \eta}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon} + \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \epsilon = \sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} \quad (1)$$

在初瞬时作用有常应力  $\sigma$  的条件下，积分(1)式，求得变形过程中的应变为

$$\epsilon = \frac{\sigma}{H} + \frac{H - E}{HE} \sigma (1 - e^{-Et/Hn}) \quad (2)$$

式中  $H = E_2$ ,  $E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ ,  $n = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$ 。

设初瞬时作用应力  $\sigma = \sigma_0$ ，以后应力随时间变化，即  $\sigma = \sigma(t)$ 。根据叠加原理，利用式(2)可求出任意时刻  $t$  时材料的应变

$$\epsilon = \frac{\sigma(t)}{H} + \frac{H - E}{H^2 n} \int_0^t \sigma(\tau) e^{-E(t-\tau)/Hn} d\tau$$

式中，令  $\frac{H - E}{H^2 n} e^{-E(t-\tau)/Hn} = K(t - \tau)$ ，得

$$\epsilon = \frac{\sigma(t)}{H} + \int_0^t \sigma(\tau) K(t - \tau) d\tau \quad (3)$$

(3) 式的一般形式即著名的 Boltzmann 积分表达式，它给出各向同性线性粘弹性材料的

本构关系。同理,也可导出另一种形式的线性粘弹性本构关系

$$\sigma = \varepsilon(t)E + \int_0^t \varepsilon(\tau)R(t-\tau)d\tau \quad (4)$$

在式(3)和式(4)中,可分别令  $K(t-\tau) = \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ ,  $R(t-\tau) = \frac{dG(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ ,  $J$  和  $G$  分别称为蠕变函数和松弛函数。

方程(4)可被推广到各向异性线性粘弹性材料及复杂应力状态,得

$$\sigma_{ij}(t) = G_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t \varepsilon_{kl}(t-\tau) \frac{dG_{ijkl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (5)$$

或由方程(3)推广为

$$\varepsilon_{ij}(t) = J_{ijkl}(0)\sigma_{kl}(t) + \int_0^t \sigma_{kl}(t-\tau) \frac{dJ_{ijkl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (6)$$

式(5)及式(6)中的  $G_{ijkl}$  和  $J_{ijkl}$  分别称为张量松弛函数和张量蠕变函数,它们都是对称张量。

## 二、动态粘弹性性能

复合材料齿轮的减振、降噪特性以及抗冲击、耐疲劳等性能皆与材料的动态粘弹性性能密切相关,研究齿轮复合材料的动态粘弹性力学性能具有很重要的实用价值。

### 1. 复模量和复柔量

设粘弹性材料承受交变应变作用,可用复数形式表达为

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (7)$$

式中  $\varepsilon_0$  是应变幅,  $\omega$  为交变应变的圆频率。交变应变的应力响应可表示为

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)} \quad (8)$$

应力-应变关系可写成

$$\sigma = G^* \varepsilon \quad (9)$$

式中  $G^*$  亦为复数,称为复模量,它可表示为

$$G^* = G' + iG'' = |G|(\cos\delta + i\sin\delta) \quad (10)$$

式中的  $|G| = \sigma_0/\varepsilon_0$ 。上述表达式实质上表明交变应力可分解成两个有效分量:一个分量的振幅为  $\sigma_0 \cos\delta$ ,与应变同相位;另一个分量的振幅为  $\sigma_0 \sin\delta$ ,比应变超前  $90^\circ$ 。

交变载荷作用下的粘弹性应力-应变关系也可写成

$$\varepsilon = J^* \sigma \quad (11)$$

式中  $J^*$  为复柔量,且

$$J^* = J' - iJ'' = |J|(\cos\delta - i\sin\delta) \quad (12)$$

复柔量和复模量之间存在如下关系

$$\left. \begin{aligned} J^* &= 1/G^*, \quad |J| = 1/|G|, \\ J' &= G'/(G'^2 + G''^2), \quad J'' = G''/(G'^2 + G''^2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

### 2. 粘弹性材料的能耗

粘弹性体受到交变载荷作用时,由于应力和应变不同相位而产生粘滞效应,导致材料内部发热。发热量的多少取决于粘滞效应所引起的能量耗散的多少。为了计算材料内的能耗,可先计算外部作用所产生的变形功,它转化成材料内的能,包括弹性势能和耗散能

两部分。材料单位体积内的能量为

$$W = \int \sigma d\varepsilon \quad (14)$$

由式(7)得

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 i \omega e^{i \omega t} = i \omega \varepsilon$$

代入式(9)并考虑式(10)得

$$\sigma = G^* \varepsilon = G' \varepsilon + G'' \frac{1}{\omega} \dot{\varepsilon}$$

代入式(14)并在一个循环(应变周期)内积分,得

$$W = \int_0^T \sigma d\varepsilon = \left[ \frac{1}{2} G' \varepsilon^2 \right]_0^T + \int_0^T \frac{G''}{\omega} \dot{\varepsilon}^2 dt \quad (15)$$

式中  $T = 2\pi/\omega$  为周期。根据式(15); 在交变载荷的一个周期  $T$  内, 材料的内能由两部分组成; 等号右端第一项表达的弹性势能和第二项表达的粘滞损耗能, 它们分别对应复模量的实部  $G'$  和虚部  $G''$ 。  $G'$  和  $G''$  分别称为储能模量和损耗模量。

根据式(15)可计算粘弹性材料在交变载荷作用下的能耗。例如交变应变  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$  作用下, 材料单位体积内的能耗为

$$W_d = \frac{G''}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \omega^2 \varepsilon_0^2 \sin^2 \omega t dt = \pi \varepsilon_0^2 G''$$

在复合材料齿轮工作时, 由于周期性啮合力的作用, 轮齿材料的能耗将引起轮齿发热, 从而进一步影响轮齿材料的机械性能。

### 三、线性粘弹性问题

线性粘弹性问题的基本方程由本构方程(5)或(6)和平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (16)$$

及协调方程

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} \quad (17)$$

组成。问题的初始条件和边界条件为

$$u_i(t) = \varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) = 0 \quad -\infty < t < 0 \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(t) n_j &= S_i(t) && \text{在 } B_\sigma \text{ 上} \\ u_i(t) &= \Delta_i(t) && \text{在 } B_u \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

最常用的线性粘弹性问题的求解方法是积分变换法。采用 Laplace 变换或 Fourier 变换可将线性粘弹性问题的基本方程变换成线性弹性力学的基本方程。在变换空间内按线弹性问题求解后, 把解答反演即得到线性粘弹性问题的解。对于边界形状复杂的工程实际问题, 需要采用数值计算方法, 这样就出现了数值解的反演问题。Schapery 给出了 Laplace 变换的近似反演方法, 包括直接法和配置法。

### 第三节 复合材料齿轮的温度场分析

相对于金属材料, 聚合物基复合材料具有刚度小、导热性差、热胀冷缩大、耐热性能不佳及机械强度低等弱点。这些弱点都将对复合材料齿轮的工作产生重要的影响。在设计计算复合材料齿轮的几何尺寸及进行强度计算时, 上述因素都应加以考虑。温度是影响聚

合物基复合材料齿轮工作特性的重要参数之一。当复合材料齿轮轮齿进入啮合时,齿面的摩擦热及粘弹性材料特有的内耗热不能由导热性差的轮齿复合材料迅速传出,由此引起轮齿温升。随之而来的是温升引起的齿形变化。局部温升过高时,会发生齿面烧伤或熔化等与金属齿轮不同的损伤形式。因此,发热及温升计算是设计复合材料齿轮必不可少的组成部分。

### 一、复合材料齿轮的瞬时温升简化计算

工作中的复合材料齿轮轮齿受到周期性变化的啮合力作用,轮齿内产生周期性变化的应力场。由于材料的粘弹性,应力的作用引起材料的内耗热。同时,齿面所承受的摩擦力引起摩擦热。由于复合材料导热性不良,所产生的热量不能迅速传出,从而导致齿轮工作过程中的瞬时温升。

#### 1. 啮合点的瞬时内耗温升

设聚合物基复合材料齿轮可模型化为 Voigt 粘弹性体,设轮齿啮合点处的应力分布符合正弦规律。在不计摩擦力的情况下,接触应力沿齿面法向。沿齿面积分接触应力,可得轮齿的法向啮合力。

$$F = \int_{-b_H}^{b_H} \sigma_0 \sin \frac{\pi \xi}{2b_H} d\xi \quad (20)$$

式中  $b_H$  为赫兹接触变形区的宽度之半,  $F$  为单位齿宽法向外载荷,  $\sigma_0$  为接触面上压应力的最大值

$$\sigma_0 = \frac{\pi F}{4b_H} \quad (21)$$

在轮齿啮合过程中,对于齿面上的某一点  $A$ , 接触应力区是变化的,相当于一个正弦压力波的移动。 $A$  点处压应力的变化规律可表示为

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t \quad (22)$$

由于粘弹性应变的滞后,  $A$  点处的应变为

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (23)$$

式中  $\phi$  为滞后角,  $\omega$  为压力波的圆频率,它可表示为

$$\omega = \frac{\pi^2 n_1 \rho_1}{60 b_H} \quad (24)$$

式中  $\rho_1$  为接触点处的曲率半径,  $n_1$  为齿轮的转速。整个压力波通过  $A$  点所用的时间可由下式计算

$$t_H = \frac{\pi}{\omega} = \frac{60 b_H}{\pi n_1 \rho_1} \quad (25)$$

整个压力波通过  $A$  点时,  $A$  点处单位体积内的能量耗散为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{t_H} \sigma(t) d\varepsilon(t) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \omega \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \omega t \cos(\omega t - \phi) dt \\ &= \frac{1}{2} \pi \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \phi \end{aligned} \quad (26)$$

Voigt 粘弹性材料的复模量为

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}(\cos\phi + i\sin\phi) = E(1 + i\omega\tau) \\ &= E'(\omega) + iE''(\omega) \end{aligned} \quad (27)$$

式中  $\tau$  为延迟时间, 它可表达为

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (28)$$

式中  $E$  和  $\eta$  分别为 Voigt 模型中弹簧的刚度和阻尼元件的粘度系数。由式(27)可导出

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad (29)$$

$$E'(\omega) = E = \frac{\sigma_0 \cos\phi}{\epsilon_0} \quad (30)$$

$$E''(\omega) = E\omega\tau = \frac{\sigma_0 \sin\phi}{\epsilon_0} \quad (31)$$

把式(31)、式(29)及式(21)代入式(26), 得

$$W = \frac{\pi^3 F^2}{32Eb_H^2} \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (32)$$

在接触点处取微小体元  $\Delta V$ , 设体元内的能量耗散全部转化为热能, 则  $\Delta V$  内的热量  $\Delta H$  可由下式计算

$$\Delta H = \frac{\pi^3 F^2 \Delta V}{32Eb_H^2 J} \frac{\omega\tau}{H\omega^2\tau^2} \quad (33)$$

式中  $J$  为热功当量系数。由于啮合过程经历的时间很短, 可近似地认为, 在接触点处所产生的内耗热全部被材料吸收, 引起温升  $\Delta T_0$ 。

$$\Delta H = \nu c \Delta V \Delta T_0 \quad (34)$$

式中  $\nu$  和  $c$  分别为材料的比重和比热。合并式(34)和式(33)得

$$\Delta T_0 = \frac{\pi^3 F^2}{32\nu c Eb_H^2 J} \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (35)$$

式(35)即复合材料齿轮啮合点瞬时内耗温升的计算公式。

## 2. 啮合点瞬时摩擦温升

齿轮轮齿在啮合过程中, 接触表面上有相对滑动和滚动。由于摩擦热的产生, 使齿面温度升高。布洛克(Blok)建立了接触区温升的计算理论。他对纤维增强塑料齿轮的摩擦温升问题作了如下假设:

(1) 摩擦所产生的热量全部被齿轮吸收, 没有向环境散失; (2) 接触区的长度与宽度相比可视为无限长, 热源可视为一个无限长的窄带, 沿窄带长度方向没有热传导; (3) 热源沿齿面移动的速度足够快, 远远大于热传导的速度, 沿热源移动方向上的热传导可忽略不计; (4) 接触区的摩擦发热强度按椭圆规律分布。

在上述假设的基础上, 布洛克导出纤维增强塑料齿轮的瞬时摩擦温升计算公式为

$$\Delta T_f = 0.83 \frac{\mu F |\nu_1 - \nu_2|}{(\sqrt{\nu_1 c_1 \lambda_1 \nu_1} + \sqrt{\nu_2 c_2 \lambda_2 \nu_2}) J \sqrt{b_H}} \quad (36)$$

式中  $\mu$  为摩擦系数,  $F$  为单位宽度齿面上的法向载荷,  $J$  为热功当量系数,  $b_H$  为赫兹接触半宽度,  $v$  为齿轮轮齿接触点的移动速度,  $\rho$ ,  $c$  和  $\lambda$  分别为材料的比重、比热和导热系数。上述参数中的下标 1 和 2 分别表示啮合中的两个齿轮。

以上给出啮合点的瞬时内耗温升和瞬时摩擦温升的计算公式。实际上, 复合材料齿轮啮合时啮合点处的瞬时温升由三部分叠加而成: 齿面进入啮合前的温度  $T_m$  (本体温度), 啮合点的瞬时摩擦温升  $\Delta T_f$  和啮合点的瞬时内耗温升  $\Delta T_o$ , 即

$$T = T_m + \Delta T_f + \Delta T_o \quad (37)$$

式中  $T_m$  可用经验公式计算:

$$T_m = T_0 + 0.11F \quad (^\circ\text{C}) \quad (38)$$

式中  $T_0$  为齿面外围介质的温度,  $F$  为单位齿宽上的啮合力。

## 二、有限元法计算啮合点处的瞬时温度场

上述简化计算方法应用方便, 但精度不高。在上述公式推导过程中, 忽略了热传导的影响。实际上, 在接触区及邻近区域沿着齿面方向和垂直于齿面方向都有热传导, 存在着一个三维瞬态温度场。由于齿宽远远大于接触区宽度, 该问题可简化为二维问题进行计算。二维非稳定温度场的控制方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (39)$$

式中  $T$  为温度,  $t$  为时间,  $K$  为导热系数,  $\rho$  为材料密度,  $c$  为材料的比热。问题的初始条件可取为

$$T(x, y, t)|_{t=0} = T_m \quad (40)$$

问题的边界条件有三类。在接触区附近, 距离接触区一定距离处, 可视为第一类边界条件

$$T(x, y, t)|_{L_1} = T_m \quad (41)$$

接触区可视为第二类边界条件

$$K \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial n} \Big|_{L_2} = q \quad (42)$$

式中  $n$  为齿面外法向,  $q$  为摩擦热强度。接触区邻近区域与润滑剂或环境介质接触, 有对流传热作用, 可视为第三类边界条件

$$-K \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial n} \Big|_{L_3} = \alpha(T - T_f) \quad (43)$$

式中  $\alpha$  为换热系数,  $T_f$  为介质温度。

将求解区域划分成若干单元。分别建立内部单元和边界单元的泛函  $J_{内}$  和  $J_{边}$  (在建立泛函时对温度的时间导数作差分处理), 然后建立单元插值函数 (一般可取位置坐标的线性函数)

$$T = [N_i, N_j, N_m] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \end{Bmatrix} \quad (44)$$

式中  $N_i, N_j$  和  $N_m$  为形函数, 与单元节点坐标有关;  $T_i, T_j$  和  $T_m$  为单元各节点的温度值。把温度插值函数代入单元泛函表达式, 作变分运算, 得到单元泛函的变分为

$$\begin{cases} \frac{\partial T^e}{\partial T_i} \\ \frac{\partial T^e}{\partial T_j} \\ \frac{\partial T^e}{\partial T_m} \end{cases} = [K]^e \{T\}^e - \{P\}^e + \frac{1}{\Delta t} [N]^e \{T\}_i^e - \frac{1}{\Delta t} [N]^e \{T\}_{i-\Delta t}^e \quad (45)$$

式中  $\{P\}^e$  为与介质有关的向量,  $\{T\}_i^e$  为任意时刻  $t$  时的温度向量,  $\{T\}_{i-\Delta t}^e$  为  $t-\Delta t$  时刻的温度向量,  $\Delta t$  为时间差分步长。利用式 (45) 进行有限元的总体合成, 根据泛函的极值条件, 可得有限元法的总体方程

$$[K] + \frac{1}{\Delta t} [N] \{T\}_i = \frac{1}{\Delta t} [N] \{T\}_{i-\Delta t} + \{P\} \quad (46)$$

式中  $\{T\}_{i-\Delta t}$  为各节点在  $t-\Delta t$  时刻的温度向量。在第一次迭代时, 可把  $\{T\}_{i-\Delta t}$  取为初始温度向量。上式中的矩阵  $[K]$ 、 $[N]$  和  $\{P\}$  分别由单元特征方程 (45) 中相应的矩阵  $[K]^e$ 、 $[N]^e$  和  $\{P\}^e$  经总体合成而得。求解方程 (46) 即可由  $t-\Delta t$  时刻的节点温度求得  $t$  时刻的节点温度。如此反复迭代, 即可由初始温度求得任意时刻的温度。

### 三、齿轮温度的测量

采用计算的方法进行轮齿的温度场分析, 难免产生偏差, 原因在于轮啮合时的啮入冲击和转动过程中齿面和环境之间的热交换很难在计算中加以考虑。采用实验方法进行轮齿温度场分析是必要的。

测量高速转动过程中复合材料齿轮的温度需要有专门的方法。通常可采用内埋热电阻、红外热像仪及变色示温涂料等方法, 其中采用红外热像仪的方法测量精度较高。

复合材料齿轮在运转过程中温度升高, 热量以电磁波的形式由轮齿表面向周围空间发射。在复合材料齿轮的温升范围内, 其热辐射以红外辐射为主。受热表面向垂直于表面的上空半球空间的各个方向发射红外线。热像仪通过红外扫描单元把来自发热体的电磁热辐射能量转化成电子视频信号, 该信号经过放大传输到显示屏上。这个热图像可以通过一个接口输送到计算机去处理。为了记录和存贮, 热像仪配有数字磁带机、磁带录相机和专用照相机。为了对图像进行模拟数据分析, 热像仪还配有采样面积选择器、热辐射分析器、热面积分析器、采样读出指示器、热剖面控制器、图像数据终端和通道选择器等等。

示温涂料是以颜色变化来指示物体表面温度及温度分布的特种涂料, 有可逆型和不可逆型两大类。可逆型涂料被加热到某一温度即发生色变, 冷却时其颜色又恢复到原来状态。不可逆型涂料发生色变后不能恢复。示温涂料的测温原理是建立在某些无机和有机化合物在受热时发生颜色变化这一现象上的 (热色现象), 它们是由具有热色现象的化合物作为颜料配制而成的。随着温度的变化, 某些有机化合物的分子结构产生变化, 电子给予体与电子接受体如酸-碱、酮-醇、内酰胺-内酰胺之间发生了平衡移动, 或两种空间构型发生变化, 或两种晶体结构的变化等等。上述变化引起色变, 称为热色现象。例如硫化铅和过氧化钡混合, 冷时为黑色, 受热后变成灰色或白色。采用示温涂料测量温度特别适用于连续运转的部件、大面积及复杂表面的情况。它可以很直观地给出物体表面的温度分布规律, 不需要任何仪器设备, 使用方便、简单。



对于复合材料齿轮,很容易在制造过程(模压、离心浇铸)中置入热电偶元件。但由于齿轮运转所造成的困难,埋入热电偶的方法往往产生较大的偏差。

研究复合材料齿轮轮齿的温度分布,可以先从摩擦热和内耗热入手,用有限元法或有限差分法计算发热量及齿内温度值,然后借助实验方法验证计算结果;也可以先用实验方法测量出齿面温度分布,然后以实测结果为基础,用数值方法求出齿内的温度值。在很多情况下,第二种方法往往能获得较精确的结果。

#### 第四节 复合材料齿轮的粘弹性应力分析

对复合材料齿轮承载能力的研究,是目前最热门的研究方向之一。轮齿啮合时的弯曲应力及接触应力对复合材料齿轮的承载能力有重要的影响。关于轮齿弯曲应力及接触应力的计算,不少论文沿用金属齿轮的计算公式。由于没有考虑聚合物基复合材料齿轮的粘弹性变形及材料本身的各向异性,上述计算往往和实验结果有较大的偏差。相对于金属齿轮,温度对复合材料齿轮的刚度、强度及啮合性能有更重要的影响。例如,通常金属齿轮轮齿的弯曲折断发生在弯曲应力最大的齿根处,而某些颗粒增强复合材料齿轮的断齿位置却在节点附近。经实验测定得知,由于摩擦热和内耗热不能及时传出,在复合材料齿轮轮齿的节点附近形成了高温区,引起节点附近材料性能的显著降低,导致该处断齿的发生。

和金属齿轮相比,复合材料齿轮的另一特点是刚度低、变形大。复合材料齿轮轮齿在啮合过程中齿形将产生较大的改变,具体表现为压力角增大、两齿面在偏离作用线的位置接触。过大的轮齿变形会引起一定的滞后。为区别于钢齿轮,可把聚合物基复合材料齿轮称为软质齿轮。研究软质齿轮的动力传递机构,首先要分析计算轮齿的变形。因此,复合材料齿轮的应变分析在复合材料齿轮的传动设计和齿轮结构设计方面显得要比金属齿轮重要得多。

本节介绍复合材料齿轮轮齿的应力和变形计算方法。在计算过程中将考虑轮齿材料的粘弹性、温度的影响及材料的各向异性。

##### 一、热-粘弹性弯曲应力分析

由于复合材料齿轮工作时产生的摩擦热和内耗热不能迅速经由导热性较差的本体材料传出,在轮齿内形成了一个梯度较大的不均匀温度场。轮齿内温度的不均匀分布对复合材料齿轮的强度分析有两方面的影响:其一是材料本身的不均匀热膨胀引起的温度应力;其二是温度的不均匀分布引起材料粘弹性性能的不均匀性。温度应力的计算可采用常规的方法,如何考虑材料性能的不均匀变化则是一个难题。本节利用时间-温度等效原理来计及不均匀分布温度场的影响,利用 Laplace 变换-有限元复合法<sup>[6]</sup>求解轮齿内的热-粘弹性应力场和位移场。

##### 1. 时间-温度等效原理及其应用

时间-温度等效原理的最简单含意是:只要改变时标,就可以使一个温度下的粘弹性变形行为和另一个温度下的粘弹性变形行为联系起来。可用数学形式表达为

$$E(T_1, t) = E(T_2, t/a_T) \quad (47)$$

式中  $E$  为材料的模量函数,  $t$  为时间,  $T_1$  和  $T_2$  为温度,  $a_T$  为时间移动因子。式(47)的含意是在温度  $T_2$  下所测得的模量时间曲线在对数时间坐标上平行移动一个距离  $a_T$ , 就得