

国家煤炭自然科学基金
河南省自然科学基金 资助项目

王裕清 武良臣 等著

HUCHIZHUICHILUNJIECHUQULILUNYUQIEXIAOAGUOCHENG FANGZHEN

弧齿锥齿轮 接触区理论 与切削过程仿真

煤炭工业出版社

国家煤炭自然科学基金、河南省自然科学基金资助项目

弧齿锥齿轮接触区理论与 切削过程仿真

王裕清 武良臣 等著

煤炭工业出版社

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

弧齿锥齿轮接触区理论与切削过程仿真/王裕清 武良臣等著. —北京: 煤炭工业出版社, 2004

ISBN 7-5020-2413-1

I. 弧… II. ①王…②武… III. ①弧齿锥齿轮-理论②弧齿锥齿轮-金属切削-仿真 IV. TH132.421

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 020095 号

煤炭工业出版社 出版
(北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
网址: www.cciph.com.cn
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行

*

开本 787mm×1092mm¹/₁₆ 印张 13
字数 300 千字 印数 1—1,000
2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷
社内编号 5184 定价 33.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 本社负责调换

序

弧齿锥齿轮是汽车、飞机、机床及石油、化工、冶金、矿山机械等设备上广泛使用的一种重要零件。随着现代化工业的飞速发展,对齿轮的传动性能和质量提出新的要求,必须提高齿轮的制造精度和承载能力,所以切齿工艺是这类齿轮加工中的关键性问题。

近几年来,由于国内外许多科学技术工作者的努力,弧齿锥齿轮和双曲线齿轮的接触区理论研究得到迅速发展,我国学者相继取得了不少的重大成果,出版了多种著作。焦作工学院王裕清、武良臣等同志对弧齿锥齿轮的接触区理论及切齿过程的动态仿真技术作了一些比较系统的理论探讨和试验研究,提出了一些有价值的成果。

《弧齿锥齿轮接触区理论与切削过程仿真》一书总结了作者们近 20 多年的研究成果,是作者们结合多年来发表的 30 多篇论文,以及在研究生教学过程中的科学实验和现场应用的经验,精心编写、数易其稿后完成的。本书反映了本学科国内外近年来的最新成果,是国内外结合现场工程实际,研究齿面接触区及其仿真技术的专著。

本书的新意在于结合工程实际的应用,特别是作者们自身研究的体会,寻找更合适的理论去高度概括和科学抽象,更完善地反映齿面接触的本质,同时采用仿真技术更直观地反映接触区变化的规律。我粗读此书,从内容上看有两个特点:从理论角度上看,该书不仅采用了目前专著中以投影几何、矢量代数、坐标变换为基础的数学处理方法,还采用了么正活动标架法。该方法使几何问题化为外微分式的计算,突破了用坐标变换来计算的传统框架。另外,本书运用现代的虚拟现实和仿真技术,避免了解析法的严密论证涉及较深数学知识和不能实时观测的困难。作为一本工程技术书籍,应具有齿轮技术工作者顺利阅读的特点,因此,作者在处理这一问题时,力求既保持论述的严密性又不失必要的通俗性。书中介绍的接触区软件开发就是一例。运用这些原理和方法,就可以在国产的或进口的弧齿锥齿轮机床上,按滚切法或半滚切法来加工弧齿锥齿轮,使齿轮的啮合斑点达到比较理想的位置、尺寸、大小和基本形状,从而提高生产率,减轻劳动强度,满足齿轮传动的质量要求。所以说,对从事齿轮技术的工程技术人员来讲,本书富有参考价值,

对教学、科研人员也值得一读。

我是十分支持本书出版的，并祝愿作者们在弧齿锥齿轮的理论与应用研究方面取得更多成果。

中国科学院 院士
华中科技大学教授

熊有伦

2004年5月8日

前 言

本书是研究弧齿锥齿轮接触区理论与切齿过程动态仿真技术的一本专著，是煤炭工业部煤炭自然科学基金项目（矿用弧齿锥齿轮切削过程计算机模拟研究）、河南省自然科学基金（弧齿锥齿轮强力切削理论和新型切齿机研制；弧齿锥齿轮切削过程计算机模拟研究）研究成果中的重要部分。

弧齿锥齿轮由于承载能力大，重迭系数大，传动平稳，强度高，可以获得很大的传动比，因而在汽车、拖拉机、机床、冶金机械和矿山机械等行业部门得到了广泛应用。长期以来，我国许多学者从啮合原理、设计计算、机床切齿调整计算、接触区控制等方面进行了系统的理论研究和试验研究，例如郑昌启教授著《弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮》（机械工业出版社，1988年）、西安交通大学机制教研室编著的《弧齿锥齿轮和准双曲线齿轮加工调整原理》（上海科学技术出版社，1979年）、曾韬教授著的《螺旋锥齿轮设计与加工》（哈尔滨工业大学出版社，1989年）、北京齿轮厂编的《螺旋锥齿轮》（科学出版社，1974年）和吴序堂教授著的《准双曲面齿轮传动基本原理》（机械工业出版社，1982年）等著作，为弧齿锥齿轮和双曲线齿轮的深入研究奠定了基础。

焦作工学院机制教研室早在1975年初，针对煤矿机械中弧齿锥齿轮加工的需要，曾到上海汽车齿轮厂、汉阳汽车齿轮厂、咸宁工程机械厂、新乡运输总公司等单位进行调研，为邵阳地区煤矿机械厂和咸宁地区煤矿机械厂研制了弧齿锥齿轮和双曲线齿轮简易铣齿机，解决了刮板输送机中弧齿锥齿轮的加工问题。从20世纪80年代开始，教研室先后承担了河南省自然科学基金项目“弧齿锥齿轮强力切削理论和新型切齿机研究”、“弧齿锥齿轮切削过程计算机模拟研究”，煤炭工业部煤炭自然科学基金项目“矿用弧齿锥齿轮切削过程计算模拟研究”以及“弧齿锥齿轮加工中虚拟现实技术”课题的研究工作，公开发表论文30余篇，培养了8届研究生，对弧齿锥齿轮接触区理论及机床调整计算等进行了深入的探索，研究了弧齿锥齿轮接触区的形状、大小、位置和计算方法，以及接触斑点的分布规律，研制了计算机高速模拟软件，对切削过程动态仿真技术和机床的传动特性也进行了研究，为弧齿锥齿轮的加工与应用创造了更有利的条件。目前有三项课题分别通过了省部级鉴定。

本书总结了教研室20余年的研究成果，特别是接触区理论和动态仿真方面的研究成果。本书是在河南理工大学王裕清教授主持下与武良臣教授合作

完成的。梁剑、陈国荣、焦锋、赵勇、许宝玉、李学军等同志参与了项目的研究和本书部分内容的撰写工作，在此对他们表示衷心的感谢。

在本书撰写过程中，得到了煤炭工业出版社和河南理工大学领导的大力支持。他们对撰写的指导思想和内容提出了许多宝贵意见。河南科技大学梁桂明教授、湖北工学院胡来璐教授、郑州工业大学夏恒青教授等有关专家对本书的撰写也给予了大力支持和帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

特别应该提到的是，中国科学院院士、华中科技大学熊有伦教授在百忙中审阅了书稿并欣然作序，在此谨致以深切的谢意。

由于我们水平所限，加之弧齿锥齿轮接触区理论和切削过程问题比较复杂，许多问题有待于进一步研究。因此，不妥之处，敬请读者批评指正。

著 者

2004 年 10 月

于河南理工大学

目 录

序
前言

第一章 弧齿锥齿轮齿面结构与齿侧面形成	1
第一节 齿面结构元素及运动关系	1
第二节 齿面结构的有关问题	3
第三节 弧齿锥齿轮齿廓形成	7
第四节 弧齿锥齿轮齿侧面形成的包络法	12
第五节 弧齿锥齿轮齿侧面形成的包复法	17
第六节 包络法与包复法的比较	19
第七节 齿侧面形成过程的三角测量算法	20
第八节 齿侧面形成过程计算机模拟	25
第九节 齿面模拟过程有关问题的处理	28
第二章 弧齿锥齿轮副接触区的基本理论	33
第一节 概 述	33
第二节 接触区分析原理	37
第三节 接触点主曲率的确定	43
第四节 瞬时接触椭圆和接触区	47
第五节 三副承载轮齿接触区	57
第六节 齿轮传动中的接触压力	63
第七节 锥齿轮传动副应力变形状态	70
第八节 连续载荷法解接触问题	73
第三章 弧齿锥齿轮副接触区分析	79
第一节 概 述	79
第二节 载荷对接触区的影响	80
第三节 接触斑点稳定性分析	85
第四节 接触区准线性理论分析	88
第五节 纵向接触斑点分析	95
第六节 局部接触几何参数分析	97
第七节 接触斑点形成的综合分析	100
第八节 非正交弧齿锥齿轮副展成法的机床调整	102
第九节 弧齿锥齿轮副接触分析的算法	110

第四章 弧齿锥齿轮副接触区调整软件的开发	119
第一节 开发平台的选定	119
第二节 数据结构的组织	121
第三节 齿轮副动态啮合的原理及方法	127
第四节 软件开发的具体实现	128
第五节 软件应用实例	134
第五章 弧齿锥齿轮切削过程动态特性研究	145
第一节 切削过程动态特性对齿轮加工精度的影响	145
第二节 切削过程中工件主轴径向振动测试	146
第三节 切削过程传动误差分析	154
第六章 弧齿锥齿轮铣齿机传动特性研究	158
第一节 弧齿锥齿轮铣齿机传动概述	158
第二节 铣齿机传动误差分析	159
第三节 传动系统动态过渡过程特性	164
第四节 传动系统动态特性的状态分析法	169
第五节 Y2250 型铣齿机传动系统模态分析	172
第七章 弧齿锥齿轮铣齿机切削系统辨识	180
第一节 弧齿锥齿轮切削系统辨识方法的研究	180
第二节 铣齿机切齿过程辨识的基本问题	185
第三节 铣齿机切削系统测试	189
参考文献	191

第一章 弧齿锥齿轮齿面结构与齿侧面形成

第一节 齿面结构元素及运动关系

由于齿轮齿形、加工方法和齿轮工作安装结构上的复杂性,弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮的齿形加工质量,主要由齿轮副传动中齿面上的接触区(接触印痕)和运动的平稳性来衡量。加工弧齿锥齿轮和准双曲线齿轮时,为了保证啮合质量,必须精确地调整齿轮副啮合斑点的形状、大小和位置,这一般是通过正确地决定展成运动参数来达到的。这里所说的展成运动参数是广义的。它包括精切小轮时的刀盘直径和刀齿形角、刀盘的安装螺旋角、轮坯和刀盘的水平位移距离和垂直位移距离、展成传动比以及产形轮的节锥角等。展成运动参数中每一项的改变都会影响小轮齿面的结构。正确地决定展成运动参数,就是为了控制两个啮合表面的这些元素之间的相互关系。

一、齿面结构的元素

令 X 点为被加工的小轮齿面 T 上任意一点(图 1-1)。作一圆锥,令其轴线和顶点各与小轮的轴线 S_1O_1 和根锥顶点 S_1 重合,并使其锥面通过齿面 T 上的 X 点,这个圆锥就称为通过 X 点的坐标锥。其锥顶半角 φ_x 称为坐标锥角。 X 点到锥顶 S_1 点的距离 L_x 称为坐标锥距。

图 1-1 中的齿面 T 是左螺旋的小轮的凸齿面。过 X 点作三个互相垂直的单位矢量 e_1 、 e_2 和 e_3 , 其中 e_1 是沿着坐标锥的法线方向, e_3 是沿着坐标锥母线方向,而 e_2 的方向是按右手规则①依 e_1 、 e_2 、 e_3 的顺序来确定的。

令 n 为齿面 T 在 X 点的法线单位矢量,其方向规定为由齿面的实体指向空域。将 n 沿 e_1 、 e_2 和 e_3 方向分解成三个分量,则在 X 点的领域内,齿面 T 的结构用下列的五个元素表示:

- (1) 法向压力角(以下简称压力角) $\alpha_x = \angle BXE$;

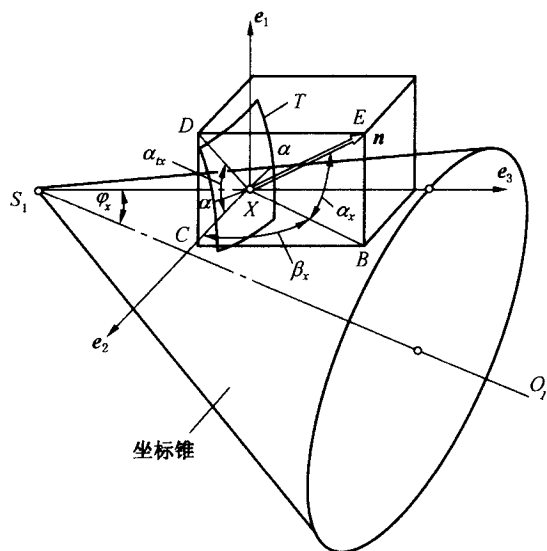


图 1-1 坐标锥

① 为了得到同样形式的公式,对于右螺旋的小轮, e_2 的方向应按左手规则依 e_1 、 e_2 、 e_3 的顺序确定。

(2) 螺旋角 $\beta_x = \angle CXB$;

(3) 对角系数 $D_x = \frac{d\alpha_x}{dL_x}$;

(4) 齿线曲率 χ_x 齿面 T 与坐标锥的交线 aa 称为齿线; 在坐标锥的展开图 (图 1-2) 中, 齿线 aa 在 X 点的曲率称为齿线曲率;

(5) 齿形曲率 ζ_x 齿面 T 与以 S_1 点为中心并通过 X 点的球面的交线 bb 称为齿形曲线 (图 1-3), 这条曲线在 X 点的测地曲率称为齿形曲率。

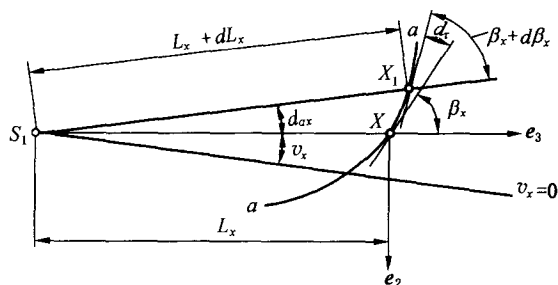


图 1-2 坐标锥的展开图

二、双曲线齿轮传动的基本关系

双曲线齿轮的小轮轴线相对于大轮轴线向上或向下偏置了一个距离 E , 图 1-4 表示一对双曲线齿轮, 双轮的轴线分别为 X_1 和 X_2 , C_1C_2 为两轴线间的公垂线, C_1C_2 长一般称为偏置量。轴线 X_1 和 X_2 不相交, 两轴线在 C_1C_2 的垂直平面上投影的交角称为轴线交角。一般, 双曲线齿轮的轴线交角都是 90° 正交角。

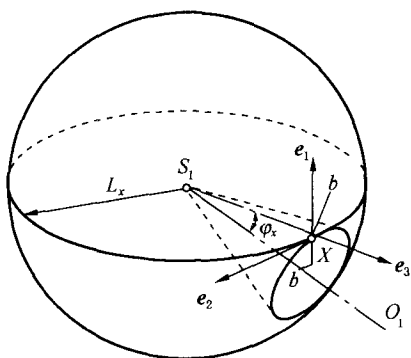


图 1-3 球面上的齿形曲线 bb

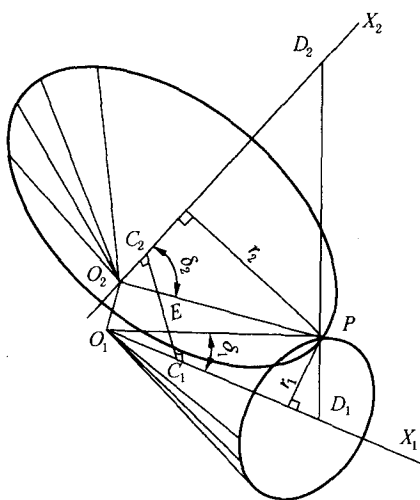


图 1-4 一对双曲线齿轮

P 点代表齿面中点的接触位置, P 点到两轴线间的垂直距离为 r_1 和 r_2 。直线 D_1D_2 为绕两轴线的回转表面在 P 点公切面的法线, D_1D_2 与两轴线相交于 D_1 和 D_2 点。过 P 点垂直于 D_1D_2 的平面 O_1PO_2 称为节平面, 此平面与两轴线相交于 O_1 和 O_2 点, O_1P 和 O_2P 分别表示两轮的锥距。 O_1P 与轴线 X_1 的交角 δ_1 称为小轮的节角, O_2P 与轴线 X_2 的交角 δ_2 称为大轮的节角。此处所说的节面是有相对滑动的。如果把任何瞬时的相对运动, 分为一个沿相对滑动轴的轴向滑动, 和以此轴为瞬时回围轴的相对回转运动, 此相对滑动轴也就是瞬时回转轴, 它位于过 P 点的 O_1PO_2 平面上。当瞬时回围轴绕轴线 X_1 和 X_2 回转时, 描绘出两个回转双曲面。以上为双曲线齿轮的基本关系。

第二节 齿面结构的有关问题

一、齿面结构的意义

为了提高弧齿锥齿轮和准双曲线齿轮的加工生产率, 大轮的齿面经常是用双面切削法同时切出一个齿槽的两侧齿面。当齿轮副的传动比(z_2/z_1)较大, 大轮的齿面还可采用成形法加工。在这种情况下, 大轮的齿面就完全同产形表面(或称刃锥表面)的形状一样。当大轮的齿面用展成法加工时, 这个齿面就不是锥面, 而是与刃锥表面共轭的一种曲面。

为了使齿轮副得到理想的啮合斑点, 必须根据大轮的齿面来确定小轮的齿面。按照它们在机器中工作时的相对安装位置和传动比进行转动, 小轮的“理论齿面”就被大轮的既定齿面按瞬时线接触的方式所确定。

这样确定的小轮理论齿面, 可用数学方法表达出来, 但在生产中是难以制造的, 而且, 考虑到齿轮副在制造和装配过程中的误差, 以及在热处理和承受载荷情况下的变形, 也不需要制造这样的理论齿面。

然而这个理论齿面是实际加工小轮齿面的重要基础, 即根据这个理论齿面, 可以确定小轮齿面上某个经过选择的“改形中心点 M ”的齿面结构元素, 并根据这些元素将理论齿面加以合理的“改形”, 从而可以制造出更加满足实用要求的小轮齿面。

二、齿轮副的安装位置

为了确定小轮的齿面结构, 须了解齿轮副的相对安装位置。图1-5是弧齿锥齿轮副的装配示意图。两轮的轴线相交于点 S , 这个点同时也是两轮的节锥顶点和根锥顶点。小轮和大轮的节锥角各为 φ_1 和 φ_2 , 而

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \delta \quad (1-1)$$

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (1-2)$$

式中 δ ——两轮轴线的夹角, 通常 $\delta = 90^\circ$;

z_1 、 z_2 ——小轮和大轮的齿数。

节锥上齿圈中点 C 到锥顶 S 点的距离称为节锥距, 用 L_c 表示。图中的直线 SC 是两轮的节锥共同母线, 在齿轮副的啮合传动过程中, 两轮就绕着这条母线相对滚动。在齿轮

轴向截面图中, 节锥母线与根锥母线之间的夹角称为齿根角, 小轮和大轮的齿根角分别为 γ_1 和 γ_2 , 因而小轮的根锥角

$$\varphi_i = \varphi_1 - \gamma_1 \quad (1-3)$$

而大轮的根锥角

$$\varphi_j = \varphi_2 - \gamma_2 \quad (1-4)$$

图 1-6 为准双曲线齿轮副中的大轮示意图。分度锥顶点 S_g 与根锥顶点 S_2 不重合, 两点之间的距离用 C_p 表示。分度锥上的齿圈中点 C 到分度锥顶点之间的距离用 L_g 表示, 而 C 点的半径用 R_g 表示。

图 1-7 为准双曲线齿轮副的装配示意图。小轮轴线 S_1O_1 不同大轮轴线 S_2O_2 相交, 两轴线之间的偏置距离为 E_p 。大轮的根锥顶点 S_2 到小轮轴线 S_1O_1 的偏置投影距离用 A_p 表示。小轮的根锥顶点 S_1 到大轮轴线 S_2O_2 的偏置投影距离用 B_p 表示。以上所说的几个尺寸, 可以从齿轮副的图纸或设计计算的结果中查阅。

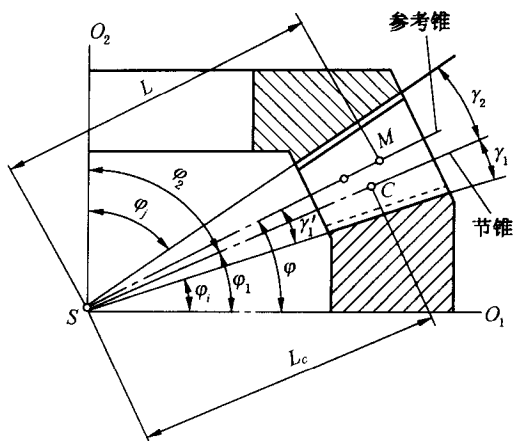


图 1-5 弧齿锥齿轮副的装配示意图

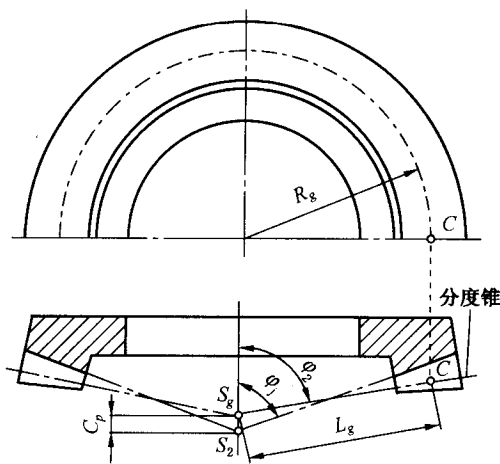


图 1-6 准双曲线齿轮副中的大轮示意图

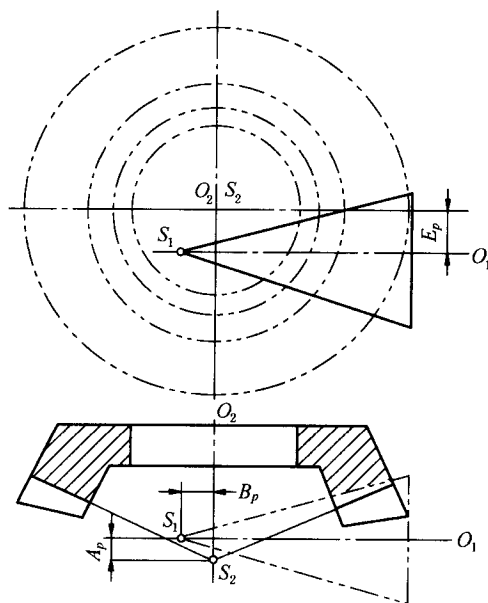


图 1-7 准双曲线齿轮副的装配示意图

三、小轮的参考锥和改形中心点

确定小轮的齿面结构, 往往在小轮上规定一个参考锥。这是因为当齿轮副的传动比

(z_2/z_1) 较大时, 在齿轮副经过变位 (移距修正) 之后, 小轮的齿根角 γ_1 较小, 而大轮的齿根角 γ_2 则较大。这样, 如果以分度锥 (或节锥) 上的齿圈中点 C 为啮合斑点的中心, 则啮合斑点必然靠近小轮的齿根 (图 1-8a) 和大轮的齿顶 (图 1-8b), 因而形成不完全的和不好的啮合斑点, 这就严重地影响啮合质量。

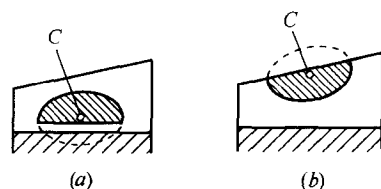


图 1-8 不好的啮合斑点

在生产中, 当齿轮副的齿齿切成以后, 须装到滚动检验机上进行啮合检验, 并规定在轻微载荷 (约为工作载荷的 20%) 的啮合中, 大轮齿面上的啮合斑点中心 M_0 应在一定的位置, 而啮合斑点则应有一定的方向和尺寸 (长度和高度)。 M_0 点的位置可用 $M_0(L_0, \varphi_0)$ 表示, 即 M_0 点的锥距 S_2M_0 应为某个数值 L_0 , 而 M_0 点所在锥面的锥角 (锥顶半角) 应为某个数值 φ_0 (图 1-9a)。

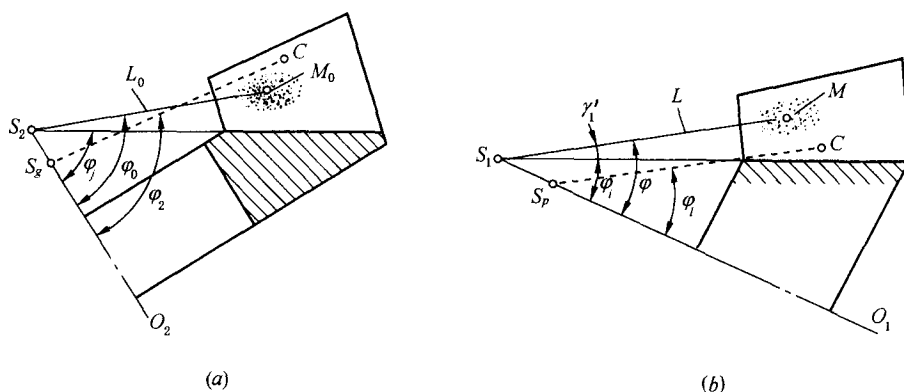


图 1-9 大轮齿面上的啮合斑点中心 M_0 和小轮齿面上的改形中心点 M

通过齿轮副的啮合, 在小轮齿面上也有相应的啮合斑点 (图 1-9b), 其中心点 $M(L, \varphi)$ 的位置以及斑点的方向和尺寸决定于大轮齿面上的啮合斑点。那么, 在小轮上, 以根锥顶点 S_1 为顶点, 以小轮轴线 S_1O_1 为轴线、并通过 $M(L, \varphi)$ 点的一个锥面就称为小轮的参考锥。在加工齿轮的齿面时, 就以 $M(L, \varphi)$ 点为中心来改造小轮理论齿面的形状, $M(L, \varphi)$ 点就称为小轮齿面上的改形中心点。

在小轮的轴向截面内, 参考锥的母线与根锥母线之间的夹角称为参考的齿根角, 用 γ'_1 表示, 显然

$$\gamma'_1 = \varphi - \varphi_i \quad (1-5)$$

四、小轮的坐标锥

确定小轮的齿面结构, 须考虑齿轮副的啮合关系, 在分析啮合关系时, 可以将小轮轴线 S_1O_1 平行于坐标系 xyz 中的轴线 Oy (图 1-10) 以及将大轮轴线 S_2O_2 平行于轴线 Ox (图 1-11 和图 1-12) 来设置。

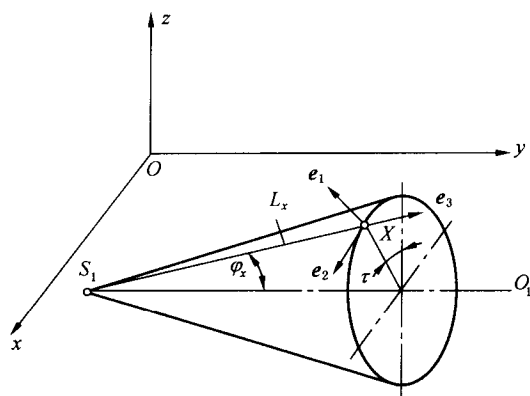


图 1-10 小轮的坐标锥

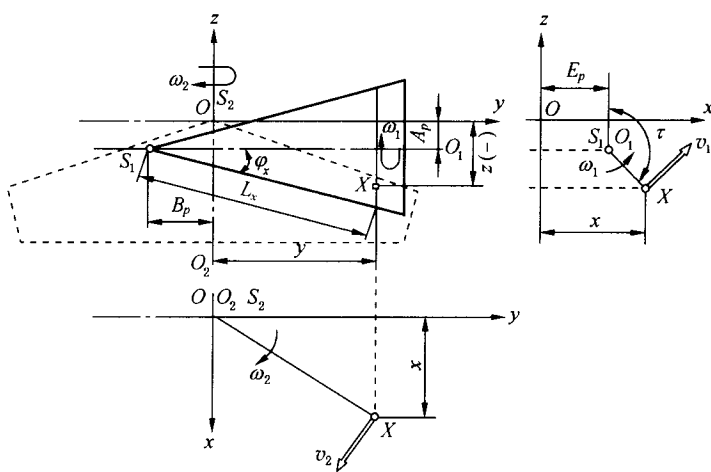


图 1-11 用成形法精切大轮时刀盘和齿轮的位置

图 1-10 中的角度 τ 是小轮的轴向截面 XS_1O_1 与坐标平面 yOz 之间的夹角 (二面角), 称为小轮的啮合位置角。它表示小轮齿面上的任意点 $X(L_x, \varphi_x)$ 同大轮齿面接触时轴向截面 XS_1O_1 的位置。当顺着 S_1O_1 方向看去, 如果轴向截面 XS_1O_1 是由坐标平面 yOz 起按顺时针方向转动时, 则 τ 角为正值。

在第一节中已知坐标锥上 X 点的三个单位矢量 e_1 、 e_2 和 e_3 , 利用矢量旋转公式可得啮合位置角为 τ 时 e_1 和 e_2 在坐标系 xyz 中的分量 (即方向余弦):

$$\left. \begin{aligned} e_{1x} &= \cos \varphi_x \sin \tau \\ e_{1y} &= -\sin \varphi_x \\ e_{1z} &= \cos \varphi_x \cos \tau \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

$$\left. \begin{aligned} e_{2x} &= \cos \tau \\ e_{2y} &= 0 \\ e_{2z} &= -\sin \tau \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

由图 1-10 可见, 当 $0^\circ < \tau < 90^\circ$ 时, e_2 的箭头方向是背离坐标平面 yOz 的; 而当 $90^\circ < \tau < 180^\circ$ 时, e_2 的箭头方向是朝着坐标平面 yOz 的。由图 1-11 可见, 齿轮副啮合时, X 点的啮合位置角 τ 的数值大约为 180° 。

第三节 弧齿锥齿轮齿廓形成

一、问题的提出

弧齿锥齿轮传动广泛地应用于煤矿、汽车、拖拉机和机车等动力机械传动中, 它的质量好坏直接关系到机器的使用性能和寿命。但是目前关于弧齿锥齿轮传动研究还很不充分, 而且大多集中在啮合理论研究方面, 而对于切削过程理论及规律的研究甚少, 尤其是加工中参数选择的优化, 致使弧齿锥齿轮加工质量不高, 严重地影响了它的使用效果。因此研究用多刃刀具或成形砂轮加工弧齿锥齿轮的问题具有十分重要的意义。

齿侧表面是用 10~20 把刀齿的刀盘加工的。每个刀齿随刀盘快速旋转, 多次与轮坯接触。在加工过程中, 参数的选择直接影响齿侧表面的形状, 所以必须拟订程序和编制算法模拟加工过程, 因而数学模型的研究就显得特别重要。只有这样, 才能进行参数的优化。本节所提出的算法, 不考虑金属切削刀具轨迹的情况, 而是把刀具在不同位置的母面压印作为研究对象, 探讨母面的方程、轮齿侧面母面包络族、加工中由数学模型所得曲面的包络面, 并将上述两个面制在同一平面上进行比较。

二、母面及其方程

为了描述轮齿的加工过程引入四个直角坐标系, 如图 1-12 所示。

Σ : 刀具和工件静止位置联系的坐标系^[111]。原点 O 为假想平顶齿轮的锥顶, z 轴与平顶齿轮的回转轴重合, x 轴与被切齿轮的根锥母线重合, 并且 $O - xyz$ 为右手系统。

Σ_d : 与刀具刚性联系的坐标系。当标架转动 ψ 角等于零时, 坐标原点 O_d 与点 O 的距离为 U , 且 $\overline{OO_d} = U$, 轴 x_d, y_d, z_d 所有的运动平行于轴 x, y, z 。

$\widetilde{\Sigma}_g$: 定坐标系。其原点为 O_g , 在坯件分度圆锥顶点上, 轴 Z_g 与轮加工过程中的速度向量 ω_g 相重合。系统 $\widetilde{\Sigma}_g$ 由坐标系 Σ 移动 $(\Delta L, \Delta E, \Delta B)$ 至 O_g 点并绕 y 轴转动 $\left(\frac{\pi}{2} + \Gamma\right)$ 角

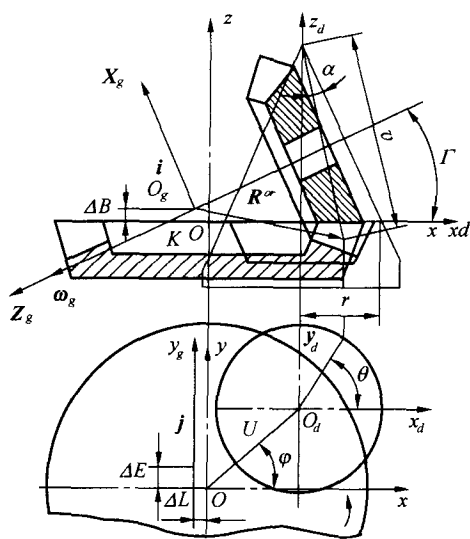


图 1-12 四直角坐标系

得到的。其中: ΔL 为坯件轴向移动值; ΔE 为双曲线形坯件 (垂直轮位) 移动值; ΔB 为点 O_g 到平顶齿轮平面的距离; Γ 为工件箱安装角。

Σ_g 与旋转工件刚性联接, 在 $\psi = 0$ 时, 坐标系 Σ_g 与坐标系 $\widetilde{\Sigma_g}$ 重合。

母面是指切削刃无限多几何位置的集合。在 Σ_d 系统中, 其方程具有下列形式

$$\boldsymbol{\rho}_d = M(3, \theta) v \sin i_d + (r \operatorname{ctg} \alpha - v \cos \alpha) \mathbf{k}_d \quad (1-8)$$

式中 i_d 、 $\mathbf{k}_d$ —— 坐标系 Σ_d 中的单位矢量;

$\boldsymbol{\rho}_d$ —— 点 O_d 至母面上所研究点 (θ, ψ) 的径向矢量;

θ 、 v —— 见图 1-12;

α —— 刀具的廓形角;

r —— 刀具的形成半径;

$M(3, \theta)$ —— 向量绕 z 轴的旋转矩阵

$$M(3, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在坐标系 Σ_g 中, 任一 ψ 时刻的母面方程

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{H}_d + M_d \boldsymbol{\rho}_d \quad (1-9)$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ —— 由原点 O 开始至矢量 $\boldsymbol{\rho}_d$ 点的径向矢量;

M_d 、 $\mathbf{H}_d$ —— 母面相对于坯件运动规律的旋转矩阵和位移向量, 且 $\mathbf{H}_d$ 为由点 O 和点 O_d 所引出的矢量, 矩阵 M_d 表示转动的信息。

$$M_d = M(3, \psi/i_0) M\left(2, \frac{\pi}{2} + \Gamma\right) \quad (1-10)$$

式中 i_0 —— 展成链传动比, 等于坯件角速度与标架角速度之比;

$M\left(2, \frac{\pi}{2} + \Gamma\right)$ —— 以角 $\frac{\pi}{2} + \Gamma$ 绕 y 轴 (2 轴) 旋转时的旋转矩阵。

$$M\left(2, \frac{\pi}{2} + \Gamma\right) = \begin{bmatrix} -\sin \Gamma & 0 & \cos \Gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \Gamma & 0 & -\sin \Gamma \end{bmatrix}$$

公式 (1-9) 中的位移向量

$$\mathbf{H}_d = M_d(\overline{O_g O} + \overline{OO_d})$$

$$\text{或者} \quad \mathbf{H}_d = M_d[\{\Delta L + M(3, \psi) U\} \mathbf{i} - \Delta E \mathbf{j} + \Delta B \mathbf{k}] \quad (1-11)$$

式中 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ —— 单位矢量。

由于 ρ 与 v 、 θ 、 ψ 三个参数有关, 则方程 (1-9) 就是母面族的方程, 且角 ψ 是族的参数。包络的条件为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \psi} = 0$$

在上述研究条件下, 可导出下列方程

$$v \sin \theta \cos \Gamma + U[\cos \alpha \sin(\theta - \psi)(\sin \Gamma - i_0) + \sin \alpha \cos \Gamma \sin \varphi] + \Delta E \\ (\cos \alpha \cos \theta \sin \Gamma - \sin \alpha \cos \Gamma) + \Delta L \cos \alpha \sin \theta \sin \Gamma - \gamma \sin \alpha \sin \theta \sin \Gamma = 0 \quad (1-12)$$

解方程式 (1-12) 得