中学数学解题方法

递推法

魏有德

四川教育出版社

递 推 法

魏 有 德

四 川 教 育 出 版 社

1989年·成都

责任编辑：刘　玲
封面设计：何一兵
版面设计：王　凌

中学数学解题方法　　　　递　推　法

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四 川 省 新 华 书 店 经 销　　自贡新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　　印张 4.5　字数 67 千
1989年11月第一版　　1991年 8 月第二次印刷
印数：5651—12650 册

ISBN 7-5408-1121-8/G·1092　　定价：1.35元

内容提要

本书介绍了中学数学中常用的解题方法——递推法，包括其基本概念、性质、递推数列的常见类型和通项的求法，以及一些数列求和的方法。本书通过大量实例说明运用递推法解题的一般思路和基本技能技巧。

本书主要供中学生课外阅读，也可作为广大教师和社会青年的参考读物。

前　　言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的"钥匙"。

这套丛书将系统介绍中学数学中基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以"方法"为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1.以方法成书。每册书全面系统地介绍了一种方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2.方法的介绍力求科学性与趣味性的统一。定义、定理、公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍的效果。

3.例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高级数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编　者

1988.10

目　　录

递推式和递推法

我们知道，若数列$\{a_n\}$满足：从第二项起它的后一项与前一项之差为常数（称为公差），则称此数列$\{a_n\}$为等差数列．若设它的首项为$a_1=a$，公差为d，则可用下式表示为：

$$\begin{cases} a_1=a, & (1) \\ a_{n+1}-a_n=d\ (n\in N). & (2) \end{cases}$$

同样，由等比数列的定义知，若数列$\{b_n\}$为一等比数列，设首项为$b_1=b\neq 0$，公比为$q\neq 0$，则此等比数列可用下式表示为：

$$\begin{cases} b_1=b, & (3) \\ b_{n+1}=qb_n\ (n\in N). & (4) \end{cases}$$

当$a_1=a$，$b_1=b$给定后，若令$n=1$，2，3，…则可由（2）、（4）式分别递推确定出数列的各项．

$\{a_n\}$：$a_1=a$，$a_2=a+d$，$a_3=a+2d$，…，

$\{b_n\}$：$b_1=b$，$b_2=bq$，$b_3=bq^2$，…，

这里（2）、（4）式在确定数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中起着递推的作用.

让我们再来考察一些实际例子.

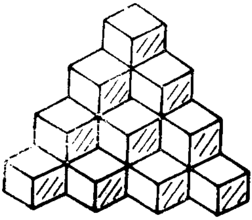
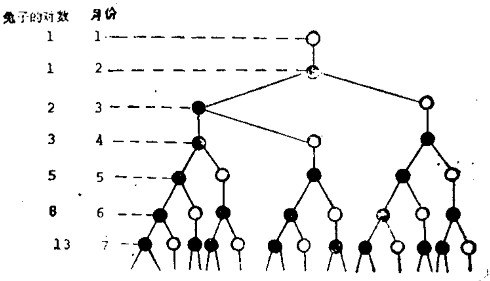


图1

实例1 一堆零件堆积物（如图1），第1层1个，第2层1＋2个，第3层1＋2＋3个，…，问堆积n层后，此堆积物共有多少个？

实例2（古老的兔子繁殖问题，又称斐波那契问题） 假定有一对兔子，第2个月成熟，第3个月产一对小兔，且以后每月再产一对小兔．任何一对兔子都遵循这个规律．若每对兔子皆为一雄一雌，无死亡又有生殖力．问一年里，这一对兔子能繁殖出多少对兔？一般地，第n个月后能繁殖出多少对兔？（如图2）



注：●表成熟兔子，○表未成熟兔子

图2

实例3（所谓“世界末日”问题） 相传在印度佛教圣地贝拿勒斯圣庙里，安放着一个黄铜板，板上插着三根宝石针，其中仅有一根从下到上放着由大到小的六十四片金片，这就是所谓梵塔，昼夜都有一个值班的僧侣按下列法则移动金片：一次只能移动一片，而且小片永远在大片的上面．当六十四片金片都从一根移动到另一根上时，世界就将在一声霹雳声中毁灭．

若按太阳系的寿命约为五百亿年计算，问是否真有“一声霹雳声”之时？（设每秒移动一次）

这类实际问题很多．当我们仔细分析一下，不难看出它们有这样几个共同特点：

①都可以归结为求某个数列的第n项(即通项）的值或表达式．

事实上，在实例1中如果设图1所示的堆积n层后的堆积物总个数为a_n（$n\in N$），则要求的是数列$\{a_n\}$的通项a_n；在实例2中，如果设第n个月共有F_n对兔，则要求的是数列$\{F_n\}$的通项F_n的值；在实例3中（一般情形），如设按规则把n片全部移动到另一根针上共需b_n次（即b_n秒钟），则要求的是数列$\{b_n\}$的通项b_n．

②这些数列的通项值或表达式很难直接得出，但是它们的第n项的值都是在它们的前一项或

前几项的基础上产生出来的．也就是说，这些数列的相邻几项之间存在着某种依赖关系．

事实上，在实例1中，放n层后的总个数a_n是在放（$n-1$）层后的总个数a_{n-1}的基础上再放（$1+2+3+\cdots+n$）$=\frac{n(n+1)}{2}$个，因此a_n与a_{n-1}有关系式：

$$a_n=a_{n-1}+\frac{n(n+1)}{2}\ (n\geqslant 2,\ n\in N) \qquad (5)$$

其中$a_1=1$．

在实例2中，由于第n个月（$n\geqslant 3$，$n\in N$）的兔子对数F_n是由这样两部分组成：一部分是第（$n-1$）月已有的兔对数F_{n-1}，另一部分是第n月新生的兔对，而这恰好是第（$n-2$）月已有的兔对数F_{n-2}．因此F_n与F_{n-1}，F_{n-2}有关系式：

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geqslant 3,\ n\in N) \qquad (6)$$

其中$F_1=F_2=1$．

在实例3中，当$n=1$时，$b_1=1$．为了移动n片，必须先按规则把上面的$n-1$片移到另一根针上，这需要b_{n-1}次，再把最下面的大片移到第三根针上，最后通过b_{n-1}次把第二根针上的$n-1$片移到第三根针上，即完成移动过程．这样就有关系式：

$$b_n=2b_{n-1}+1\ (n\geqslant 2,\ n\in N) \qquad (7)$$

其中$b_1=1$．

③这些数列当给了最初一项或几项的值(称为初始值)后，就可以根据关系式(5)、(6)、(7)依次递推出其他各项的值：

初始值　第2项　第3项　第4项　第5项　…

$a_1=1 \Rightarrow a_2=4 \Rightarrow a_3=10 \Rightarrow a_4=20 \Rightarrow a_5=35 \Rightarrow \cdots$

$F_1=F_2=1 \Rightarrow F_3=2 \Rightarrow F_4=3 \Rightarrow F_5=5 \Rightarrow \cdots$

$b_1=1 \Rightarrow b_2=3 \Rightarrow b_3=7 \Rightarrow b_4=15 \Rightarrow b_5=31 \Rightarrow \cdots$

换句话说，数列$\{a_n\}$、$\{F_n\}$、$\{b_n\}$分别可由关系式(5)、(6)、(7)及相应的初始值唯一的递推确定出来。

关系式(5)、(6)、(7)由于起着递推出各项的作用，通常称为递推关系式或递归关系式，简称递推式或递归式．一般地，有如下定义．

定义1 一个数列$\{x_n\}$：x_1，x_2，…，x_n，…中第n项x_n与它前面若干项x_{n-1}，x_{n-2}，…，x_{n-k}(k为小于n的某一自然数)的关系式：$x_n=f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_{n-k})$，称为($k$阶)递推式，其中$f$表示$x_{n-1}$，…，$x_{n-k}$的一个单值式子．

例如，(2)、(4)、(5)、(7)是一阶递推式，(6)是二阶递推式．

特别地，我们称

$$x_n=p_1x_{n-1}+p_2x_{n-2}+\cdots+p_kx_{n-k}+g(n)$$
$$(k<n,\ k\in N) \tag{8}$$

为k阶常系数线性非齐次递推式，其中p_i（$i=1$，2，…，k）为常数，$p_k\neq 0$，$g(n)$为n的不恒为零的函数．相应地称

$$x_n=p_1x_{n-1}+p_2x_{n-2}+\cdots+p_kx_{n-k}$$
$$(k<n,\ k\in N) \qquad (9)$$

为k阶常系数线性齐次递推式．

脚指数的平移变换不影响递推式的本质，因此（8）式又可写成

$$x_{n+k}=p_1x_{n+k-1}+p_2x_{n+k-2}+\cdots+p_kx_n+\varphi(n),$$

这里$\varphi(n)=g(n+k)$．（9）式又可写成

$$x_{n+k}=p_1x_{n+k-1}+p_2x_{n+k-2}+\cdots+p_kx_n.$$

（8）、（9）式中，若p_i（$i=1$，2，…，k）至少有一个不是常数而是n的函数，此时它们不再是常系数的，而称为k阶线性递推式（$g(n)\equiv 0$时是齐次的，$g(n)\neq 0$时是非齐次的）．不是线性的递推式称为非线性递推式，例如$x_n=x_{n-1}^2/x_{n-2}$（$n\geqslant 3$），$x_{n+1}=x_n+x_{n-1}^2$（$n\geqslant 2$）等．

定义2 由递推式及初始值来确定数列的方法称为递推法．由递推法得出的数列称为递推数列．由递推法确定出递推数列的过程称为解递推式．解递推式就是指求此递推数列的通项表达式．

由上不难看出，递推法实质上是由归纳法来定义数列（即定义在自然数集合上的函数）的一种方

法。

显然，要回答前面实例1、2、3所提出的问题，就是解递推式（5）、（6）、（7）（具体解法将在第三节中介绍）．因此，求递推数列的通项表达式便成为研究递推数列的一个基本内容．当然还有许多其他值得我们去考察的问题，例如，递推数列的单调性问题、有界性问题、求和问题，等等．这些都是我们后面讨论的问题．

关于递推式和递推数列还有两点说明：

①我们这里讲的递推式是指在给定了相应的初始值后，可由递推式唯一确定一递推数列的递推式．但一个数列可由几个不同形式的递推式及相应的初始值确定．例如，递推式$a_n=a_{n-1}+1$（$n\geqslant2$）及初始值$a_1=1$和递推式$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$($n\geqslant3$)及初始值$a_1=1$，$a_2=2$确定的递推数列都是自然数列$\{n\}$．

②一般来说，k阶递推式只有给定了前k项的值（即k个初值——初始值）后，才能由递推式唯一确定一个递推数列．初值的个数小于阶数时，一般是不能唯一确定数列的．同一递推式不同的初始值确定的递推数列（一般）是不一样的。

等差数列、等比数列

一、等差、等比数列的性质和应用

如前面的分析，等差、等比数列可分别由递推式（2）、（4）及相应的初始值（1）、（3）确定，因而等差、等比数列是递推数列．由于它们的特殊性、广泛性，人们已对它们进行了较全面深入的研究．其基本结果列表如下（见表一）：

灵活运用等差、等比数列的定义和基本性质是解决有关等差、等比数列问题的关键．

例1 数列$\{x_n\}$的前n项和$s_n=an^2+bn+c$（a，b，c为常数，$a\neq0$），问$\{x_n\}$是否为一等差数列．

解：因$x_1=s_1=a+b+c$，当$n\geqslant2$时，$x_n=s_n$

表一：

	等差数列$\{a_n\}$	等比数列$\{b_n\}$
常用递推式和初始值	$a_{n+1}=a_n+d$ a_1为初始值	$b_{n+1}=qb_n$ b_1为初始值
一般形式	a_1，a_1+d，$a_1+2d\cdots$	b_1，b_1q，$b_1q^2,\cdots$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$b_n=b_1q^{n-1}$
前n 项和S_n公式	$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ $=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 或$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$	$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ $=\dfrac{b_1-b_nq}{1-q}$ $(q\neq1)$ 或$S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq1)$
基本性质	1.a，b，c成等差数列 $\Leftrightarrow 2b=a+c$。 （b称为a，c的等差中项） 2.$a_i+a_j=a_m+a_k$ $(i+j=m+k)$， 特别地，与首末项等距离的两项之和等于首末两项之和。	1.不为零的a，b，c成等比数列 $\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{ac}$或$b^2=ac$。 （b称为a，c 的等比中项） 2.$b_i\cdot b_j=b_m\cdot b_k$ $(i+j=m+k)$。 特别地，与首末项等距离的两项之积等于首末两项之积。 3.无穷递缩等比数列$(\|q\|<1)$之和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{b_1}{1-q}$。