

初級自然科學叢書

幾何基礎知識

趙華 涂世澤 編著
趙越之 金懋職

江蘇人民出版社

自然科学丛书

几何基础知识

赵华 涂世泽 编著
赵燧之 金慰藏

*

江苏省书刊出版业营业登记证出〇〇一五

江苏人民出版社出版

南京湖南路十一号

江苏省新华书店发行 地方国营杭州印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张8 9/16 字数191,000

一九五九年三月第一版

一九五九年三月南京第一次印刷

印数 1—10,000

统一书号: 13100·93

定 价: (6) 七 角

序 言

几何学是研究物体的形状、大小和相互位置的科学。和其他一切科学一样，几何学是由于人们的生活和生产的实际需要而产生的。

我国在三千年以前所制造的陶器上，已经有了含着菱形、正方形和圆内接正方形等图案的花纹。二千四百年前的墨子书中讲到了许多几何学方面的知识。在著名的古代算书“九章算术”和“周髀算经”里，对于直角三角形各边间的关系，已有很多的论述和应用。

在古代的埃及，尼罗河每年泛滥，冲坏了耕地的疆界。埃及的农民为了在尼罗河泛滥以后修复耕地的疆界，就研究了测绘耕地的图形和计算面积的法则。后来希腊人从埃及人那里学到了这些法则，并逐渐地加以充实使之发展成为一门完整的科学；这就是“几何学”。在希腊语中，“几何学”这个名词的原义就是“测量土地的技术”。在二千二百多年前，希腊的一位数学家欧几里得写了一本书叫做“几何原本”，这本书对于几何学的发展起了巨大的作用。

由于我们制造物体时，必须使它们的形状和大小适合于用途，并且必须把它们安放在需要的位置上，因此研究物体的形状、大小和相互位置的几何学，在生产建设上实是一门很重要的科学，例如测量土地山川、兴修水利、建造铁道和桥梁、基本建设、制造和安装机器等等，我们都要用到几何学的知识。

现在，我们的党已发出了技术革命和文化革命的号召，大

家都要向科学进军，几何学是必须学习的一门基础科学。这本几何基础知识，就是供给初中文化程度的干部、工人和农民同志，在工作和生产的业余时间，进行自学之用而编写的。因此，在内容上，注意了适应成年人自学的特点，对定义、定理的叙述，力求深入浅出，对例题的解法和说理，力求透澈。在每章之后，加以归纳，作出小结，以便读者复习。对于习题的安排，注意了由浅入深，循序渐进，并对难解的习题作了提示，以减少自学的困难。

几何学是逻辑性很强的一门科学。学习时只要循序渐进，对每条公理和定理了解深透，就能掌握几何学的法则，运用到生产实践中去，书中所提出的证明题、作图题和计算题，希望读者能耐心地练习解法，并且建议读者，要经常地联系生产中所要解决的关于物体的形状、大小和相互位置的作图和计算等问题，这样就能获得出色的学习成果。

編 者

目 录

序 言

緒 論	1
-----	---

第一章 直 线	8
---------	---

I 命题、定义、公理、定理和推論	8
------------------	---

II 直线、射线、线段、折线	10
----------------	----

III 等量公理	15
----------	----

IV 角的概念	21
---------	----

V 圆的概念	29
--------	----

VI 三角板、量角器的用法	35
---------------	----

VII 相交直线和平行直线	39
---------------	----

VIII 定理和逆定理	50
-------------	----

第二章 三角形	55
---------	----

I 三角形的一般性质	55
------------	----

II 多边形的一般性质	58
-------------	----

III 三角形中的相等关系	61
---------------	----

IV 线段的垂直平分线和角的平分线	77
-------------------	----

V 三角形中的不等关系	80
-------------	----

VI 斜线和射影的关系	90
-------------	----

VII 否定定理和逆否定理	93
---------------	----

VIII 基本作图	95
-----------	----

IX 轴对称图形	104
----------	-----

第三章 特殊四邊形	108
I 平行四邊形	108
II 矩形、菱形、正方形	116
III 由平行四邊形的性質可以証得的定理	125
IV 梯形	129
V 中心對稱	134
第四章 圓	144
I 圓的性質	144
II 圓心角、弧、弦和弦心距之間的相依關係	149
III 圓和直線的位置關係	154
IV 兩圓位置關係	160
V 圓和角的關係	168
VI 兩圓的公切線	176
VII 圓和多邊形、四點共圓	180
第五章 三角形的特殊點	184
第六章 証題法	201
I 推証的一般方法	201
II 着手証題的門徑	209
第七章 軌跡	244
第八章 作圖	251

緒 論

1. 几何学的起源

几何学与所有的其他科学一样，是发生于人类的生产与生活的实际需要，并不断地发展而愈来愈丰富的。

原始的人，为了选取安全的住所，他们需要辨别周围物体的形状和这些物体的分布的位置，为了能迅速地找到狩猎的地方，他们需要辨别各个物体之间的距离和它们相互之间的位置关系。

随着社会生活的发展，人类也就越来越感到有进一步研究物体的形状、大小和相互位置的需要。相传四千多年前，埃及境内的尼罗河，每年泛滥一次；每一次泛滥都将沿河两岸的土地淹没，原有的土地界限也冲失不明，因而每年都要为了消除争夺耕地的纠纷来修复这些界限；这样，便从实际的劳动中积累了一些简单的土地测量的知识。当时他们只是粗略地画出自己的土地形状，用步伐来测定距离；日子愈久，这些测量的知识便愈来愈丰富。后来埃及人阿默斯便将这些知识彙总记录起来，成为有名的阿默斯手册，从而奠定了最初的几何学。把这門科学叫作几何学是古代希腊人命名的。在希腊語中，“几何学”这个名詞的原义，就是“土地测量的技术”。

几何学的进一步的发展是与希腊人分不开的。希腊人和埃及通商，他们学习了埃及的文化，当然也学习了几何学。他们不仅接受了埃及人已有的零星实际的几何知识，而且还逐步地发挥和提高了这些感性知识成为比较完整的理論。

古代的哲学家法列斯(公元前635—548)、毕塔哥拉斯(公元前569—471)、傑莫克理特(公元前470—370)、柏拉图(公元前429—348)、欧道克斯(公元前408—355)都对几何学有过不小的贡献,但是这时的几何学也与实用大大的分开而达到了高度的抽象性。直到亞几默德(公元前287—212)才在生活的需要的影响下,使它引向应用的方面。

公元前三世紀时柏拉图学派的欧几里德(約公元前330—275)在埃及的亚历山大大学教数学,由于教材的需要,便将前人积累起来的几何知識,編成了有系統的书,这就是举世知名的“几何学原本”。这部书,直到現在,还是人們编写几何学教科书的藍本。

关于几何学的研究,在我国,也是很早就被重視的,并且曾有很多偉大的成就。考古家所发现的黑陶文化时期(公元前1000年)的陶器上便有各种几何图形的图案,我国古代的一本算书“九章算經”中也有“方田”一章,記載測量各种形状田地的算法。墨子(紀元前480—390)也曾一再談到有关几何图形的知識。

西洋的系統的几何学是在明朝才傳入我国。当时徐光启翻譯欧几里德的几何原本,根据英文Geometry一詞,依前三个字母Geo的音把它譯成了“几何”,这便是我們今天所用的“几何学”这个名称的由来。

2. 几何学的对象

我們已經知道,几何学是劳动人民在生活和生产的实际需要中,不断地观察周圍的物体的形状、大小与位置而发生和发展起来的。

各种物体是根据它的外形、重量和組成它們的物質的性质来相互区别的。每一个物体都有它自己的形状和大小,例

如，一个鉄球和一个肥皂泡，尽管組成他們的物質的性質不同，但他們所給与我們的印象却都是同样的球形，在制造各个物体的时候，我們也都尽量地使它們的形状符合于它們的用途，例如发射人造卫星的火箭所具有的形状，就要能符合于它所能达到的射程的需要。其次，我們也可以看出每一个物体又常常是在許多物体之間有其一定的位置的，例如我們常常会說“这本书是放在那个桌子上”，或者說“这个球放在那个圓柱的旁边”等等。善于决定物体間的相互位置在生产和生活中都是非常重要的。例如我們可以决定某一种工厂应建筑在某一个地区，某一部机器应放在工厂的某一部分，某一个碉堡应筑在战場的某一区域，等等。

將我們在观察一切物体的形状、大小和它們之間的相互位置等方面所获得的丰富印象，加以抽象的概括，便成为一种專門知識，这便是几何学。

所以，几何学是研究物体的形状、大小和相互位置的学科。

3. 体、面、线、点

(1) 几何体

在几何学中，我們所研究的是物体的形状、大小和位置，而不研究物体的物理性質。因此一个鉄球和一个同样大小的雪球，一个橡皮管和一个同样大小的玻璃管，虽然它們是用不同的材料制成的，它們的物理性質完全不同，但是我們仍然把它們同样的看作是球或圓柱体。

象这样只研究物体的形状、大小和位置，而不研究它們的物理性質时，我們就把这些物体叫做“几何体”。

因为几何体是脱离它的物理性質来研究的，所以它具有下面的性質：几何体可以任意移动（变更它的位置）而它的大

小、形状和它本身各部分的相互位置都不改变，例如我们将一个鋼块从桌子的这边移到桌子的那边，它虽然移动了位置，但它的形状、大小和它本身各部分的位置却是沒有改变的。

(2)面

物体总是用它的面来和相邻的物体分开的，例如桌面便是用它的面与空气分开，杯中的水和油混在一起后，也总是用它的面将两者分开。

几何学中的面，是我们所想象的。尽管实际的面是脱离了物体本身就不能单独存在的，但是对于几何的面，却要脱离物体来单独地想象。在这样想象时，几何的面是看作沒有任何厚薄的。

(3)綫

房屋里两面墙相交的地方给我们的印象是綫。将一张紙对折后涂上不同的顏色，这两种不同顏色的分界地方给我们的印象也是綫。

几何学中的綫，也是我们所想象的。尽管綫是不能离开面而单独存在的，但是对于几何的綫，却要离开面来单独想象。

几何的綫是看作沒有任何粗細的。

(4)点

夜間天空的星，头髮的尽头，桌面上两条边的相交处，都给我们以点的印象。

几何学中的点也是离开綫来单独想象的；在自然界中这样的点，实际是并不存在的，我们只能在想象中来体会它。

几何的点沒有任何大小。

4. 体、面、綫、点的抽象性

从实际的客观存在来讲，面、綫、点都依附于体而存在的，

但是我們上面所講的几何学中的体、面、綫、点都具有抽象性。这是不是脱离实际了呢，我們認為并不如此。这可以从恩格斯在反杜林論里所說的話得到闡明：“数和形的概念不是从任何地方得来，而仅仅是从现实世界中得到的。……和数的概念一样，形的概念也完全是从外面世界中得到的，而不是在头脑中从純粹的思維中产生出来的。要能达到形的概念，先应当存在具有一定形状的物体，而且应把这些形状拿来比較。純粹数学的对象，是现实世界的空間形式和数量关系。所以是非常现实的資料。这些資料表現于非常抽象的形式之中。这一事实只能表面地掩盖它的来自现实世界的根源。可是为要能够在其純粹状态中来研究这些形式和关系，那么就必須完全使它們脱离其內容。將內容放置一边作为不相干的东西，这样我們就得到沒有大小的点，沒有厚度和寬度的綫……”。斯大林在“馬克思主义与語言学問題”中，也曾說过：“几何学上的定理是把具体对象加以抽象化，把各种对象看成沒有具体性的物体，并在决定它們之間相互关系的时候，不当成某些具体对象間的具体关系，而当成一般沒有任何具体性的物体間的相互关系”。

5. 用动的观念来看体、面、綫、点

自然界中的一切，是在不断地运动和变化着的。因此我們也可以用动的观点来看体、面、綫、点。

例如黑夜中用一支点燃的香烟在迅速地移动，便給我們有一条綫的感觉。用刀切豆腐，便能得到一个光滑的面。用两个手指挟着直立的硬币使它在桌上旋轉，便能看到一个象球体的形状。这些事例虽然也不是理想中的几何的体、面、綫、点，但是却也說明了一些問題，那便是“点运动成綫，綫运动成面，面运动成体”。

6. 几何图形

將我們所观察到的一切物体的形状、大小和它們之間的相互位置关系等方面所获得的丰富印象，加以抽象的概括便产生了几何图形，所以几何图形是由若干个点、綫、面結合而成的；也就是，点、綫、面的集合，叫作几何图形。

几何图形分作两种：所有的点在同一平面上的图形叫平面几何图形，所有的点不在同一平面上的图形叫空間几何图形。我們在紙上做出的图形，会給我們以平面几何图形的概念；任一几何体会使我們有空間几何图形的概念。

初等几何学中所分的平面几何与立体几何两种学科，便是分別研究这两种几何图形的。立体几何是研究空間图形的形状、大小及其位置等性質的学科，而平面几何是研究在同一个平面上几何图形的形状、大小及其位置等性質的学科。

7. 研究几何学的方法

我們可以直接量出一个書櫥的高度，也可以直接量出矮小的房子的高度，但若量一幢十层以上的大樓的高度，就比较困难。若需要量正在飞行的飞机的高度，那就更困难得多了。由此可見，寻常所用的直接测量的方法，对于研究几何图形的性質來說，显然是远远不够的。所以我們在几何学里所用的方法，不能只限于实际测量，而必須运用推理的方法，也就是說，假若我們能够找出所研究的事物的某一种性質后，便可根据这个性質来进行正确地推理，从而发现新的性質。这也正符合于我們認識客觀事物的規律。

事实上，我們認識一切事物，首先是由于感官的作用，看到事物的各个表面的几何形象，看到事物之間的外部联系，摸一摸，量一量，这是我們認識事物的开端，是認識的基本阶段，叫做感性知識。經過了实践，人們再运用思維，加上一番判断

推理的工夫，便将認識向前推进了一大步。这时能够抓住事物的本质，掌握了事物的全面的，乃至内部的联系；这是認識事物的发展阶段，叫做理性認識。几何学便是这样从感性認識发展到理性認識的。在几何学的研究上，由于采用了推理的方法，便可从已有的知識出发，正确地导出一些在一定的条件下必然产生的一定的結論。掌握了这些結論，便又可以反轉来指导我們对实际事物再作进一步地認識。这种正确推理的方法，便是研究几何学的主要方法。

小 結

在緒論里，我們講了如下的內容：

1. 几何学的起源——几何学发生于人类社会生活的实际需要。
2. 几何学的对象——几何学是研究物体的形状、大小和相互位置的科学。
3. 点、綫、面、体的概念；几何图形。
4. 研究几何的方法——不限于直接測量，而且主要的是运用推理的方法。

第一章 直 綫

I. 命題、定义、公理、定理和推論

8. 命 題

“命題”是屬於邏輯學範圍的名詞；在幾何學里，對於它，總是逕行引用而不加以解釋的。但為了使讀者能真正了解它的涵義，我們給出了如下的說明：

命題就是用以敘述一個明確判斷的完整的語句。所謂“判斷”，就是對所述的对象要有所肯定或有所否定。

例如：“馬有四足”、“魚不是哺乳動物”，都是命題——它們都是完整的句子，而且對所述的对象都有所肯定或否定。

又如：“明天不一定下雨”，就不是命題——它虽是完整的句子，但對所述的对象既不有所肯定，也不有所否定。

又如：“這張桌子”、“必定相等”，都不是命題——它們都不是完整的句子。

9. 定 义

凡是說明名詞或術語意義的命題，叫做定义。

科學里常常有一些專門名詞或術語。為了解釋這些名詞或術語，便需要用一種判斷性的語言來說明它的意義。而這種說明又必須有制約性，使它與其他名詞不會相混。例如，算術上對除法的定义是“知道了乘法中的積和一個乘數而求另一個乘數的計算方法，叫做除法”。又如前面我們講過的“平面幾何學是研究在同一平面上幾何圖形的形狀、大小及其位

“**相等性質的學科**”，便是對平面幾何學這個名詞的定義。

幾何學上的許多定義，常常是證明定理時必須用的根據。

10. 公理

公理在希臘文的意思，就是值得承認的真理。

我們也可說：不加證明而採用的命題叫做公理。

公理是人類在生活與生產實踐中總結出來的；它們都是**屢試屢驗的真理**。

在數學里，能適用於各科的公理，叫**數學公理**。僅適用於幾何學一科的公理，叫做**幾何公理**。在幾何公理中，有關幾何作圖方法的公理，又叫做**作圖公法**。

例如：“**等於同量的量相等**”，“**全量等於各分量的和**”等，都是數學公理。

又如，前面我們講過的“**幾何體可以任意移動，而它的大小、形狀和它本身各部分的相互位置都不改變**”的性質，便是幾何學上很重要的“**移形公理**”。

11. 定理

希臘文稱幾何定理為**易于了解的真理**。我們也可以說：**凡經過推理方法証實其確能成立的幾何命題，叫做幾何定理**。

除定義和公理外，任一幾何命題所表達的幾何事實都必須經過證明才能肯定它的真實性。已經證明為真實的命題，就稱它為**幾何定理**。

〔註〕 其實不僅幾何學上有定理，在算術中也有定理。例如：“如果一個數的數字和能被9整除，則這個數也能被9整除”，便是算術中整數性質的定理。在代數中也有定理，例如：“兩個數的和與差的乘積等於它們的平方的差”，便是代數中關於乘法的定理；不過這類定理在代數中更多地是以公式的形式出現的：如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。

定理都可表示为条件命题的形式，它既有条件又有結論，一般地说，命题的前一部分是定理的条件，命题的后一部分是定理的結論。

几何定理是几何学中一个很重要的組成部分。我們今后将陸續地講到它，为了能很好地学习几何学。我們必須对定理有充分地了解和彻底的認識。否則，我們將不能有效地解决一切有关图形的实际問題。

12. 推 論

有些几何定理是从别的定理直接推导出来或稍加变化而得的，也就是說，它的真实性并不需要象一般定理一样的进行推理，而只要稍加思索就可以断定的。象这样的定理，我們称它为推論(或叫系)。

有时有些定理在証明别的定理时用得很少，甚至于用不到，我們便将这些定理列入习题中，供作推理的練習之用。这样一些定理，又叫做証明題。

II. 直綫、射綫、綫段、折綫

13. 直 綫

直綫是最簡單的綫。

从小孔中射出来的光綫以及在黑夜里将点燃的香烟头笔直地迅速移动，都給我們以直綫的概念。

对于直綫，我們要把它想象成是可以向两方无限伸長的。

(一)有关直綫性質的基本公理：

经过任意两点，可以引一条直綫，并且只能引一条直綫。

这在日常生活实践中，我們都有充分的事实可以驗證。

例如：用两只手代表两个点，可以紧紧地拉直一根細繩，而且只能拉紧一根細繩。如果有两根繩的話，則或者是两根繩重

合,或者是一根紧,一根松。从这个公理里,我們又可以发觉到两条直綫只可能有一个交点,不可能有两个交点,因为如果有两个交点,便是經過两点可引两条直綫而不是只能引一条直綫了。

(二)直綫的表示法:

在几何里,对于“点”,通常是用大写的拉丁字母来表示的;并且,对于用字母A表示的点,我們就把它叫作“点A”,对于用字母B表示的点,我們就把它叫作“点B”(注意:不同的点,要用不同的字母表示)。

表示直綫的方法,一般地,都是用表示这直綫上的任何两点的两个大写的拉丁字母来表示,例如,直綫AB或直綫BA(图1);

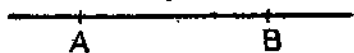


图 1



图 2

或者用一个小写字母来表示,例如,直綫 a (图2)。

(三)直綫性质的应用:

(1)木工将木料鋸成木板时,先要在木料两端各取一个点,然后在这两点之間拉紧一条墨綫,作出直綫来,于是沿着这条墨綫鋸成木板。

(2)测量人員埋設标杆时,也是利用直綫性质的。他們每次都是将眼睛靠近第三根标杆的端点来看前两根标杆的端点,如果这标杆恰恰擋住前面两根标杆的視綫时,这三根标杆便在同一条直綫上。

(四)运用直尺作直綫的方法:

我們都是用直尺来画直綫的。例如已知两个点A和B,求作一条通过这两点的直綫,便将直尺的一边紧紧地靠着这